Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 201-212

В. М. Кузаконь

Одесская национальная академия пищевых технологий, Одесса
E-mail: `kuzakon_v@ukr.net`

Метрические дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости

В работе дается полное описание алгебры дифференциальных инвариантов расслоение кривых на плоскости относительно группы движений. Показано, что дифференциальные инварианты любого порядка получаются из дифференциальных инвариантов второго порядка при помощи дифференцирования последних вдоль инвариантных векторных полей.

1. Введение

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — расслоение кривых на плоскости. Найдем алгебру дифференциальных инвариантов этого расслоения относительно группы движения плоскости $\mathbb{R}^2$.

В координатах такое расслоение можно задать с помощью некоторой гладкой (класса C^∞) функцией двух переменных $u = f(x_1, x_2)$, такой, что ее дифференциал $df \neq 0$. Линии уровня этой функции совпадают с кривыми расслоения φ. Здесь x_1, x_2 — координаты на плоскости, u — координата на прямой $\mathbb{R}$.

Конечно, фунция f определена с точностью до перепараметризации прямой $\mathbb{R}$ (так называемого gauge-преобразования), то есть с точностью до преобразования

$f \to F(f)$, где $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная гладкая функция.

Движения плоскости вместе с gauge-преобразованием прямой порождают псевдогруппу Ли G пространства $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ с координатами x_1, x_2, u.

Базис алгебры Ли этой псевдогруппы состоит из следующих векторных полей на пространстве $\mathbb{R}^3$:

параллельных переносов в плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{146}$$

поворотов в плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно начала координат:

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \tag{147}$$

перепараметризации прямой $\mathbb{R}$:

$$h(u) \frac{\partial}{\partial u}. \tag{148}$$

Здесь $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Пусть $J^k = J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ — пространство k-джетов гладких функций $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Размерность пространства дифференциальных инвариантов — это коразмерность регулярных орбит продолжения псевдогруппы Ли G в расслоение J^k. Например, размерность пространства 1-джетов J^1 равна пяти, и размерность орбиты общего положения тоже равна пяти. Поэтому у расслоения кривых φ не существует дифференциальных инвариантов первого порядка.

Размерность орбиты общего положения в $J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ равна $k + 4$, а размерность пространства J^k равна $2 + C^k_{k+2}$. Поэтому коразмерность орбиты равна

$$\nu(k) = C^k_{k+2} - k - 2. \tag{149}$$

Это число совпадает с числом функционально независимых дифференциальных инвариантов, порядок которых не выше k.

Таким образом, число $\mu(k)$ инвариантов k-го порядка можно вычислить по формуле:

$$\mu(k) = \nu(k) - \nu(k-1) = k \tag{150}$$

В частности мы видим, что $\mu(2) = 2$ и поэтому у расслоения $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ существует ровно два независимых дифференциальных инварианта второго порядка [3]. В работе [4] эти инварианты построены:

$$I_1 = \frac{p_2^2 p_{11} - 2p_1 p_2 p_{12} + p_1^2 p_{22}}{(p_1^2 + p_2^2)^{3/2}}$$

и

$$I_2 = \frac{(p_1^2 - p_2^2)p_{12} + p_1 p_2 (p_{22} - p_{11})}{(p_1^2 + p_2^2)^{3/2}}.$$

Инвариант I_1 представляет собой кривизну кривой семейства, а инвариант I_2 — кривизну ортогональных траекторий семейства кривых.

В этой работе мы покажем, что алгебра дифференциальных инвариантов порождается этими инвариантами второго порядка.

2. Геометрия пространств k-джетов и преобразования Ли

На пятимерном пространстве J^1 существует естественная контактная структура — *распределение Картана* $C : J^1 \to TJ^1$, порожденная дифференциальной 1-формой Картана ω_0, $C(a) = \ker \omega_{0,a}$, $a \in J^1$.

В канонических координатах Дарбу $(x, u, p) = (x_1, x_2, u, p_1, p_2)$ на J^1 форма Картана имеет вид

$$\omega_0 = du - p_1 dx_1 - p_2 dx_2,$$

а распределение Картана порождено четверкой векторных полей

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{d}{dx_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Диффеоморфизм $\phi : J^1 \to J^1$ называется *контактным*, если он сохраняет распределение Картана. В терминах формы Картана это означает что $\phi^*(\omega_0) = \lambda\omega_0$ для некоторой необращающейся в нуль функции $\lambda \in C^\infty(J^1)$ [2].

Векторное поле X на J^1 называется *контактным*, если локальная однопараметрическия группа сдвигов вдоль траекторий этого поля состоит из локальных контактных диффеоморфизмов.

В терминах формы Картана контактность векторного поля означает, что операция взятия производной Ли вдоль этого поля от формы Картана — это просто умножение формы Картана на некоторую не обращающуюся в нуль функцию:

$$L_X(\omega_0) = \lambda\omega_0,$$

или, что эквивалентно, $L_X(\omega_0) \wedge \omega_0 = 0$.

Как известно, существует взаимно-однозначное соответствие между множеством гладких функций на J^1 и множеством контактных векторных полей. Для каждой функции $f \in C^\infty(J^1)$ векторное поле

$$X_f = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \left(f - \sum_{i=1}^{2} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \\ + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial p_i}$$

контактно. Функция f называется *производящей функцией* контактного векторного поля X_f. Наоборот, для всякого контактного векторного поля X функция $f = \omega_0(X)$ является его производящей функцией.

Заметим, что векторные поля (146)—(148) — контактные векторные поля с производящими функциями $p_1, p_2, x_1p_2 - x_2p_1$ и $h(u)$ соответственно. Поэтому алгебру Ли псевдогруппы G можно отождествить с алгеброй Ли контактных векторных полей с производящими функциями вида

$$f(x,u,p) = h(u) + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3(x_1p_2 - x_2p_1), \tag{151}$$

где a_1, a_2, a_3 — константы.

Перейдем к пространству J^k k-джетов гладких функций на $\mathbb{R}^2$. Размерность этого пространства равна $2 + C^k_{k+2}$. Пусть $x,u,p_{\mathbf{1}},p_{\mathbf{2}},\dots,p_{\mathbf{k}}$ — координаты на этом пространстве. Здесь $\mathbf{s} = \{t_1,\dots,t_s\}$ — мультииндексы длины s, где $t_1,\dots t_s \in \{1,2\}$.

На этом пространстве естественным образом определены дифференциальные 1-формы ω_0 и

$$\omega_{\mathbf{s}} = dp_{\mathbf{s}} - p_{\mathbf{s+1}}dx_1 - p_{\mathbf{s+2}}dx_2, \tag{152}$$

где $\mathbf{s}+1 = \{t_1,\dots,t_s,1\}$ и $\mathbf{s}+2 = \{t_1,\dots,t_s,2\}$ — мультииндексы длины $s+1$, $s = 1,\dots,k-1$.

Так, например, пространство J^2 восьмимерно. Его координаты: $x_1, x_2, u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22}$. Помимо формы Картана на пространстве J^2 определены еще две дифференциальные 1-формы:

$$\omega_1 = dp_1 - p_{11}dx_1 - p_{12}dx_2,$$

и

$$\omega_2 = dp_2 - p_{21}dx_1 - p_{22}dx_2.$$

Диффеоморфизм пространства J^k называется *преобразованием Ли* если он сохраняет распределение, заданное дифференциальными 1-формами ω_0 и (152).

Каждое преобразование Ли $\phi : J^k \to J^k$ естественно поднимается до преобразования Ли $\phi^{(1)} : J^{k+1} \to J^{k+1}$. Это преобразование определено на некоторой открытой всюду плотной области в J^{k+1}. Всякое преобразование Ли пространства J^k является поднятием некоторого контактного преобразования пространства J^1 [2].

Векторное поле X на J^k называется *полем Ли* если определяемые им семейства локальных диффеоморфизмов состоят из преобразований Ли. Как известно, всякое поле Ли на J^k является поднятием контактного векторного поля на J^1. Поднятие контактного векторного поля X_f на J^k будем обозначать $X_f^{(k)}$. Общая формула для нахождения приведена в [1]. Поднятие контактного векторного поля с производящей функцией $h = h(u)$ в J^2 имеет вид:

$$X_h^{(2)} = h(u)\frac{\partial}{\partial u} + h'(u)\left(\sum_{i=1}^{2} p_i\frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial p_{ij}}\right) + \\ + h''(u)\sum_{i,j} p_i p_j\frac{\partial}{\partial p_{ij}}.$$

Функция $g \in C^\infty(J^k)$ является дифференциальным инвариантом псевдогруппы G тогда и только тогда когда она является первым интегралом векторного поля $X_f^{(k)}$ с производящей функцией (151) [1].

3. Структура алгебры дифференциальных инвариантов

С расслоением φ, заданном функцией $f = f(x_1, x_2)$ связаны два векторных поля на плоскости:

$$A = \frac{1}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}} \left(f_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + f_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

и

$$B = \frac{1}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}} \left(f_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - f_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

— поля единичных векторов, нормальных и касательных к кривым расслоения φ соответственно. Эти векторные поля инвариантны относительно движений плоскости и перепараметризации $f \to F(f)$.

Введем следующие дифференциальные операторы, действующие из $C^\infty(J^{k-1})$ в $C^\infty(J^k)$:

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \left(p_1 \Delta_1^{(k)} + p_2 \Delta_2^{(k)} \right)$$

и

$$B_k = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \left(p_2 \Delta_1^{(k)} - p_1 \Delta_2^{(k)} \right),$$

где Δ_1 и Δ_2 — операторы полного дифференцирования по переменным x_1 и x_2 соответственно:

$$\Delta_i^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x} + p_i \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{\mathbf{s}} p_{\mathbf{i}+\mathbf{s}} \frac{\partial}{\partial p_{\mathbf{s}}} \qquad (i = 1, 2),$$

Суммирование здесь производится по всем мультииндексам $\mathbf{s}$ длиной от 1 до k. Напомним, что $\mathbf{i} + \mathbf{s} = \{i, t_1, \ldots, t_s\}$ для $\mathbf{s} = \{t_1, \ldots, t_s\}$. Например,

$$\Delta_1^{(3)} = \frac{\partial}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial u} + p_{11} \frac{\partial}{\partial p_1} + p_{12} \frac{\partial}{\partial p_2} + \\ + p_{111} \frac{\partial}{\partial p_{11}} + p_{112} \frac{\partial}{\partial p_{12}} + p_{122} \frac{\partial}{\partial p_{22}}$$

Операторы A_k и B_k представляют собой векторные поля на J^k. Не сложно проверить, что

(153) $$[A_k, B_k] = I_2 A_k - I_1 B_k.$$

Заметим, что диаграммы

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(J^{k-1}) \arrow[r, "A_k"] \arrow[d, "X_f^{(k-1)}"'] & C^\infty(J^k) \arrow[d, "X_f^{(k)}"] \\
C^\infty(J^{k-1}) \arrow[r, "A_k"] & C^\infty(J^k)
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(J^{k-1}) \arrow[r, "B_k"] \arrow[d, "X_f^{(k-1)}"'] & C^\infty(J^k) \arrow[d, "X_f^{(k)}"] \\
C^\infty(J^{k-1}) \arrow[r, "B_k"] & C^\infty(J^k)
\end{tikzcd}$$

коммутативны для векторных полей X_f с производящей функцией (151). Поэтому если функция $g \in J^{k-1}$ является инвариантом порядка $k-1$, то функции $A_k(g)$ и $B_k(g)$ представляют собой дифференциальные инварианты порядка k.

Таким образом, применяя операторы A_3 и B_3 к инвариантам I_1 и I_2, мы получим следующий набор дифференциальных инвариантов третьего порядка:

(154)
$$I_{11} = A_3(I_1), \quad I_{21} = B_3(I_1), \quad I_{12} = A_3(I_2), \quad I_{22} = B_3(I_2)$$

Укажем их координатное представление:

$$I_{11} = \frac{1}{(p_1^2+p_2^2)^3}\bigl(p_1^2p_2^2(-3p_{11}^2+8p_{12}^2+4p_{11}p_{22}-3p_{22}^2+p_1p_{111} \\ -p_1p_{122})+p_1^4(-2p_{12}^2-p_{11}p_{22}+p_1p_{122})-p_2^4(2p_{12}^2+ \\ +p_1(-p_{111}+2p_{122}))++p_{11}p_{22}+p_1^3p_2(6p_{11}p_{12}-6p_{12}p_{22}- \\ -2p_1p_{112}+p_1p_{222})+p_2^5p_{112}+p_1p_2^3(-6p_{11}p_{12}+ \\ 6p_{12}p_{22}-p_1p_{112}+p_1p_{222})\bigr)\,,$$

$$I_{21} = \frac{1}{(p_1^2+p_2^2)^3}\bigl(p_2^5p_{111}-3p_2^4(p_{11}p_{12}+p_1p_{112})+ \\ 3p_1^3p_2(-2p_{12}^2-p_{11}p_{22}+p_{22}^2+p_1p_{122})+ \\ p_1p_2^3(6p_{12}^2+3p_{11}(-p_{11}+p_{22})+p_1(p_{111}+3p_{122}))+ \\ p_1^4(3p_{12}p_{22}-p_1p_{222})- \\ p_1^2p_2^2(-9p_{11}p_{12}+9p_{12}p_{22}+3p_1p_{112}+p_1p_{222})\bigr)\,,$$

$$I_{12} = \frac{1}{(p_1^2+p_2^2)^3}\bigl(p_1^4(-2p_{11}p_{12}+p_{12}p_{22}+p_1p_{112})-p_2^5p_{122}+ \\ p_1p_2^3(-p_{11}^2+6p_{12}^2+3p_{11}p_{22}-2p_{22}^2-p_1p_{111}+p_1p_{122})+ \\ p_1^3p_2(2p_{11}^2-6p_{12}^2-3p_{11}p_{22}+p_{22}^2-p_1p_{111}+2p_1p_{122})+ \\ p_2^4(-p_{11}p_{12}+2p_{12}p_{22}-2p_1p_{112}+p_1p_{222})+ \\ \bigl(p_1^2p_2^2(9p_{11}p_{12}-9p_{12}p_{22}-p_1p_{112}+p_1p_{222})\bigr)\,,$$

$$I_{22} = \frac{1}{(p_1^2+p_2^2)^3}\left(-p_2^5 p_{112} + p_1^4(p_{12}^2 + p_{11}p_{22} - p_{22}^2 - p_1 p_{122}) + \right.$$
$$p_1^2 p_2^2 (2p_{11}^2 - 10p_{12}^2 - 4p_{11}p_{22} + 2p_{22}^2 - p_1 p_{111} + p_1 p_{122}) +$$
$$p_2^4 (p_{12}^2 + p_{11}(-p_{11} + p_{22}) + p_1(-p_{111} + 2p_{122})) +$$
$$p_1 p_2^3 (8p_{11}p_{12} - 4p_{12}p_{22} + p_1 p_{112} - p_1 p_{222}) +$$
$$\left. p_1^3 p_2 (-4p_{11}p_{12} + 8p_{12}p_{22} + 2p_1 p_{112} - p_1 p_{222})\right).$$

Не трудно проверить, что $X_f^{(3)}(I_{ij}) = 0$ для производящей функции (151), так что эти функции действительно являются дифференциальными инвариантами псевдогруппы G.

Построенные инварианты третьего порядка функционально зависимы, ибо согласно формуле (150), число инвариантов третьего порядка равно 3. Поэтому между инвариантами порядка не более третьего должно быть одно соотношение. Действительно, это соотношение имеет следующий вид:

$$I_{11} + I_{22} + I_1^2 + I_2^2 = 0. \tag{155}$$

Обозначая операции дифференцирования вдоль траекторий векторных полей A_3 и B_3 через

$$\frac{d}{dn} = A_3 \qquad \text{и} \qquad \frac{d}{ds} = B_3$$

соответственно, запишем соотношение (155) в виде дифференциального уравнения для инвариантов I_1 и I_2:

$$\frac{dI_1}{dn} + \frac{dI_2}{ds} + I_1^2 + I_2^2 = 0$$

Это уравнение будем называть *уравнением Gala*. Оно является аналогом уравнения Гаусса-Петерсона-Майнарди-Кодацци [1] в теории поверхностей.

Из уравнения Gala следует, что если инварианты I_1 и I_2 постоянны, то они равны нулю.

Обратимся теперь к инвариантам четвертого порядка. Их можно получить из инвариантов третьего порядка (154), применяя к ним операторы A_4 и B_4. В силу формулы (153) композиции операторов A_4B_3 и B_4A_3 дают одни и те же инварианты по модулю инвариантов более низкого порядка. Мы получаем шесть инвариантов четвертого порядка. Всего же мы получили 12 инвариантов порядка не менее 4. Применяя формулу (149), находим, что число функционально независимых инвариантов порядка не менее четырех равно девяти. Поэтому между построенными инвариантами должны существовать три соотношения. Одно из них — соотношение (155). Два других мы получаем их, дифференцируя (155) вдоль векторных полей A_4 и B_4.

Аналогично мы можем получить дифференциальные инварианты любого порядка. Соотношения между инвариантами получаются дифференцированием (155).

Итак, мы получаем следующую теорему, описывающую структуру дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости.

Теорема 1. *Все дифференциальных инварианты расслоения* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *отностиельно группы движений плоскости порождены дифференциальными инвариантами второго порядка* I_1 *и* I_2*, связанных уравнением Gala, и их всевозможными производными Ли вдоль векторных полей* A_k *и* B_k*.*

Список литературы

[1] *Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.28. М., 1988.

[2] *Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М., "Наука 1986. 336 стр.

[3] *Кузаконь В. М.* Диференціальні інваріанти субмерсій многовидів // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 295–298.

[4] *Кузаконь В.М.* Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2005. – 48, №4. – С. 95-99.