Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

11 • 2008

МЕХАНІКА

УДК 539.3
© **2008**

К. В. Аврамов

Нелинейные нормальные формы параметрических колебаний

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

An iterative procedure combining the Rausher approach and nonlinear modes is suggested to analyze nonlinear systems with parametric terms. The example of the application of this method to the analysis of beam parametric vibrations interacting with a discrete oscillator is considered.

Существует много методов анализа параметрических колебаний дискретных систем. Для исследования таких систем с малым параметром применяются методы Ван дер Поля, многих масштабов, Мельникова [1, 2]. Подходы к анализу параметрических колебаний в существенно нелинейных системах излагаются в [3, 4]. В данной работе для анализа параметрических колебаний предлагается итерационная процедура, сочетающая метод Раушера и нелинейных нормальных форм колебаний [4, 5]. Этот подход является эффективным при анализе систем с большим числом степеней свободы. Например, он является эффективным при исследовании параметрических колебаний в нелинейных системах с десятками степеней свободы. Ранее метод Раушера применялся для анализа вынужденных колебаний нелинейных систем [6–9].

В общем случае нелинейную систему, совершающую параметрические колебания, запишем таким образом:

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j + F_j(\xi_1, \ldots, \xi_n, \dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_n) + \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \xi_i \cos(2\Omega t) = 0, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Рассмотрим движение динамической системы (1) около нелинейных нормальных форм, которые представим так:

$$\begin{aligned} \xi_\nu &= \xi_\nu(\xi_l, v_l) = a_1^{(\nu)} \xi_l^2 + a_2^{(\nu)} \xi_l v_l + \cdots; \\ v_\nu &= v_\nu(\xi_l, v_l) = b_1^{(\nu)} \xi_l^2 + b_2^{(\nu)} \xi_l v_l + \cdots; \qquad \nu = 1, \ldots, m; \qquad \nu \neq l. \end{aligned} \tag{2}$$

Для определения таких движений построим итерационный процесс. Аналогичная процедура для расчета вынужденных колебаний описана в работе [10]. На первой итерации предположим, что $\xi_l \neq 0$; $v_l \neq 0$ и $\xi_\nu = v_\nu = 0$. Тогда динамическая система (1) сводится к уравнению

$$\ddot{\xi}_l + \omega_l^2 \xi_l + \widetilde{F}_l(\xi_l, \dot{\xi}_l, \ddot{\xi}_l) + a_{ll}\xi_l \cos(2\Omega t) = 0. \tag{3}$$

Для исследования динамики системы (3) воспользуемся методом гармонического баланса. Тогда движения представим так:

$$\xi_l = A_0 + A_1 \cos(\Omega t) + B_1 \sin(\Omega t) + A_2 \cos(2\Omega t) + B_2 \sin(2\Omega t). \tag{4}$$

Величины $(A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \Omega)$ удовлетворяют системе пяти нелинейных алгебраических уравнений: $\Phi_\mu(A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \Omega) = 0$; $\mu = \overline{1,5}$.

Целью анализа системы (1) является получение амплитудно-частотной характеристики. Тогда параметр A_2 задается с некоторым шагом и для каждого значения A_2 решается система нелинейных уравнений относительно $(A_0, A_1, B_1, B_2, \Omega)$.

Из уравнения (4) получим:

$$\begin{aligned} \xi_l &= A_0 + A_1 z_2 + B_1 z_1 + A_2(z_2^2 - z_1^2) + 2B_2 z_1 z_2; \\ \dot{\xi}_l &= -A_1\Omega z_1 + B_1 \Omega z_2 - 4\Omega A_2 z_1 z_2 + 2\Omega B_2(z_2^2 - z_1^2), \end{aligned} \tag{5}$$

где $z_1 = \sin \Omega t$; $z_2 = \cos \Omega t$. Уравнения (5) могут быть перестроены таким образом:

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_l + \alpha_2 \dot{\xi}_l + \alpha_3 \xi_l^2 + \alpha_4 \dot{\xi}_l^2 + \cdots; \\ z_2 &= \beta_0 + \beta_1 \xi_l + \beta_2 \dot{\xi}_l + \beta_3 \xi_l^2 + \beta_4 \dot{\xi}_l^2 + \cdots, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots$ — неизвестные коэффициенты. Уравнения (5) вводятся в (6) и приравниваются коэффициенты при $\xi_l^{j_1} \dot{\xi}_l^{j_2}$; $j_1 = 0, 1, \ldots; j_2 = 0, 1, \ldots$. В результате получаем две системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} [M]A = R_1; \qquad [M]B = R_2, \qquad R_1^T = [0,0,1,0,0,0]; \qquad R_2^T = [0,0,0,0,1,0]; \\ A^T = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]; \qquad B^T = [\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5]; \\ M = \begin{bmatrix} 0 & -A_2 & -2B_2\Omega & B_1^2 - 2A_0A_2 & A_1^2\Omega^2 & -B_1A_1\Omega - 2A_0B_2\Omega \\ 0 & 2B_2 & -4A_2\Omega & 4A_0B_2 + 2A_1B_1 & -2B_1\Omega^2 A_1 & B_1^2\Omega - 4A_0A_2\Omega - A_1^2\Omega \\ 0 & B_1 & -A_1\Omega & 2A_0B_1 & 0 & -A_0A_1\Omega \\ 0 & A_2 & 2B_2\Omega & 2A_0A_2 + A_1^2 & B_1^2\Omega^2 & B_1A_1\Omega + 2A_0B_2\Omega \\ 0 & A_1 & B_1\Omega & 2A_0A_1 & 0 & A_0B_1\Omega \\ 1 & A_0 & 0 & A_0^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{7}$$

Решая системы линейных алгебраических уравнений (7), получаем ряд (6). Тогда из (6) могут быть получены следующие соотношения:

$$\sin(\Omega t) = S(\xi_l, \dot{\xi}_l); \qquad \cos(\Omega t) = C(\xi_l, \dot{\xi}_l). \tag{8}$$

Теперь соотношения (8) введем в систему (3) и получим псевдоавтономную динамическую систему [11]:

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j + R_j(\xi_1, \ldots, \xi_n, \dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_n, \ddot{\xi}_1, \ldots, \ddot{\xi}_n) = 0; \qquad j = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Решение системы (9) представим в виде нелинейной нормальной формы (2). Тогда функции $\xi_\nu(\xi_l, v_l)$; $v_\nu(\xi_l, v_l)$ удовлетворяют следующей системе уравнений в частных производных, которая получена в [5]:

$$
\begin{aligned}
&v_\nu(\xi_l, v_l) = \\
&\quad = v_l \frac{\partial \xi_\nu}{\partial \xi_l} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial v_l}[\omega_l^2 \xi_l + R_l(\xi_1, \ldots, \xi_n, v_1(\xi_l, v_l), \ldots, v_n(\xi_l, v_l); -\omega_1^2 \xi_1; \ldots; -\omega_n^2 \xi_n)]; \\
&\omega_\nu^2 \xi_\nu(\xi_l, v_l) + R_\nu(\xi_1, \ldots, \xi_n, v_1(\xi_l, v_l), \ldots, v_n(\xi_l, v_l); -\omega_1^2 \xi_1; \ldots; -\omega_n^2 \xi_n) = \\
&\quad = -v_l \frac{\partial v_\nu}{\partial \xi_l} + \frac{\partial v_\nu}{\partial v_l}[\omega_l^2 \xi_l + R_l(\xi_1, \ldots, \xi_n, v_1(\xi_l, v_l), \ldots, v_n(\xi_l, v_l); -\omega_1^2 \xi_1; \ldots; -\omega_n^2 \xi_n)].
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Ряды (2) вводятся в систему (10) и приравниваются коэффициенты при $\xi_l^{j_1} v_l^{j_2}$; $j_1 = 0, 1, \ldots$; $j_2 = 0, 1, \ldots$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $a_1^{(\nu)}$, $a_2^{(\nu)}, \ldots, b_1^{(\nu)}$, $b_2^{(\nu)}, \ldots$. Решая эту систему, найдем функцию (2). На этом заканчивается первая итерация.

Рассмотрим вторую итерацию. Функция (2) вводится в l уравнение системы (1). В результате получим одно неавтономное уравнение второго порядка, которое в общем случае можно представить так:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\xi}_l + \omega_l^2 \xi_l + F_l[\xi_1(\xi_l, v_l), \ldots, \xi_n(\xi_l, v_l); v_1(\xi_l, v_l), \ldots, v_n(\xi_l, v_l); -\omega_1^2 \xi_1(\xi_l, v_l); \ldots \\
&\quad \ldots; -\omega_n^2 \xi_n(\xi_l, v_l)] + a_{ll} \xi_l \cos(2\Omega t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} a_{li} \xi_i(\xi_l, v_l) \cos(2\Omega t) = 0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Решение системы (11) представим в виде (4). После построения решения (4) методом гармонического баланса определяется функция (8) и нелинейная нормальная форма псевдоавтономной системы (9). Вторая итерация заканчивается определением нелинейной нормальной формы (2). Если коэффициенты $a_1^{(\nu)}$, $a_2^{(\nu)}, \ldots$ двух соседних итераций близки, то периодические движения для заданного значения A_2 считаются найденными. Для расчета всей амплитудно-частотной характеристики периодических колебаний задаются значения A_2 с некоторым шагом. Для каждой величины A_2 производится расчет периодических движений.

В качестве примера применения представленного выше метода рассмотрим взаимодействие стержня, совершающего параметрические колебания, с осциллятором с одной степенью свободы (рис. 1). Относительно безразмерных переменных и параметров такая динамическая система принимает вид

$$
\begin{aligned}
&w_*^{(IV)} + \frac{\chi}{2}(w_*'' w_*'^2)'' + w_*'' \left\{ f \cos(\Omega t) - 0{,}5 m \chi \int_0^1 (w_*'^2)_{\tau\tau}'' d\xi \right\} + \ddot{w}_* - \chi (\overline{N} w_*')' = \\
&\quad = c \delta(\xi - 0{,}5)\{q_* - w_*(0{,}5; t)\}; \\
&m_1 \ddot{q}_* = -c[q_* - w_*(0{,}5; t)]; \qquad \overline{N} = 0{,}5 \int_\xi^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} (w_*'^2)_{\tau\tau}'' d\xi_2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

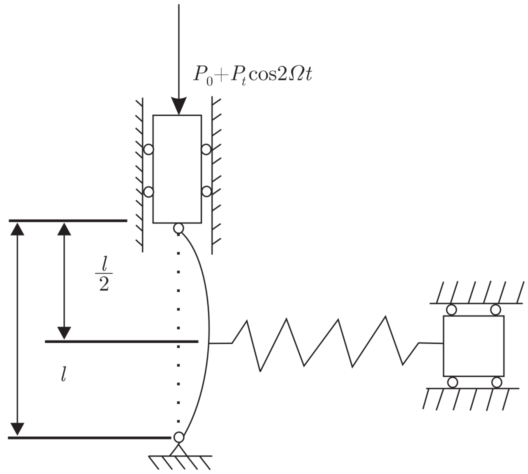

Рис. 1

В системе (12) учтена нелинейная инерционность и нелинейная кривизна. Такая модель параметрических колебаний стержня представлена в работе [12]. Предположим, что стержень совершает колебания по первой форме: $w(\xi,t) = \theta(t)\sin(\pi\xi)$. Применяя метод Бубнова–Галеркина, континуально-дискретную систему (12) сведем к системе с двумя степенями свободы, которая принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\theta} + \pi^4\theta + \frac{\chi}{8}\pi^6\theta^3 - \theta\pi^2[f\cos(2\Omega t) - 0{,}25m\chi\pi^2(\theta^2)^{\cdot\cdot}] + \chi\pi^2\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{32}\right)\theta(\theta^2)^{\cdot\cdot} - \\
&\qquad - 2c(q_* - \theta) = 0; \\
&m_1\ddot{q}_* + c(q_* - \theta).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Систему (13) представим относительно нормальных координат линейной части. Для этого введем замену переменных:

$$
[\xi_1\xi_2]^T = U^{-1}[\theta q_*]^T,
$$

где U — матрица, которая получается из проблемы собственных значений. Тогда систему (13) можно представить так:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\xi}_1 + p_1^2\xi_1 + \varsigma F_1(\xi_1,\xi_2,\dot{\xi}_1,\dot{\xi}_2,\ddot{\xi}_1,\ddot{\xi}_2,t) = 0; \\
&\ddot{\xi}_2 + p_2^2\xi_2 + \varsigma F_1(\xi_1,\xi_2,\dot{\xi}_1,\dot{\xi}_2,\ddot{\xi}_1,\ddot{\xi}_2,t) = 0; \\
&F_1(\xi_1,\xi_2,\dot{\xi}_1,\dot{\xi}_2,\ddot{\xi}_1,\ddot{\xi}_2,t) = \gamma_1\mathrm{P}_2(\xi_1,\xi_2) + 2\gamma_3P_1(\xi_1,\xi_2,\dot{\xi}_1,\dot{\xi}_2) + 2\gamma_3P_1(\ddot{\xi}_1,\ddot{\xi}_2,\xi_1,\xi_2) - \\
&\qquad - (f_{11}\xi_1 + f_{12}\xi_2)\cos(2\Omega t),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где $P_2(\xi_1,\xi_2)$; $P_1(\xi_1,\xi_2,\dot{\xi}_1,\dot{\xi}_2)$ — полиномы третьих степеней. Параметры a_1, a_2 не приводятся вследствие их громоздкости.

Теперь для анализа динамической системы (14) применим метод, предложенный выше. На первой итерации предположим, что $\xi_2 = 0$. Тогда система (14) преобразуется к виду

$$
\ddot{\xi}_1 + p_1^2\xi_1 + \varsigma[\gamma_1a_1^3\xi_1^3 + 2\gamma_3a_1^3(\dot{\xi}_1^2\xi_1 + \xi_1^2\ddot{\xi}_1) - f_{11}\xi_1\cos(2\Omega t)] = 0.
\tag{15}
$$

Колебания системы (15) представим так:

$$\xi_1 = A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t. \tag{16}$$

Используя метод гармонического баланса, получим следующие движения системы (15): состояния равновесия $A_1 = B_1 = 0$ и два вида периодических режимов с амплитудами

$$\begin{aligned}(A_1, B_1) &= \left(\sqrt{\frac{\Omega^2 - p_1^2 - 0{,}5 f_{11}}{0{,}75\gamma_1 - 0{,}5\gamma_3\Omega^2}}; 0\right);\\ (A_1, B_1) &= \left(0; \sqrt{\frac{\Omega^2 - p_1^2 + 0{,}5 f_{11}}{0{,}75\gamma_1 - 0{,}5\gamma_3\Omega^2}}\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Функция $\cos(2\Omega t)$ может быть получена из уравнений (17), (5)–(7) в следующем виде:

$$\cos(2\Omega t) = \alpha_1 q_1^2 + \alpha_2 \dot{q}_1^2 + \alpha_3 q_1 \dot{q}_1,$$

где α_1, α_2, α_3 зависят от A_1, B_1. Введем эту функцию в динамическую систему (14). В результате прийдем к следующей псевдоавтономной динамической системе:

$$\ddot{\xi}_i + p_i^2 \xi_i + r_i \varsigma [P_2(\xi_1, \xi_2) + P_1(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) + P_1(\ddot{\xi}_1, \ddot{\xi}_2, \xi_1, \xi_2) - \beta_1 \xi_1^2 \dot{\xi}_1 - \beta_2 \xi_1 \dot{\xi}_1 \xi_2] = 0, \tag{18}$$

где $P_2(\xi_1, \xi_2)$; $P_1(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2)$ — полиномы третьих степеней. В системе (18) определим нелинейные нормальные формы [5]

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \pi_4 \xi_1^3 + \pi_5 \xi_1^2 v_1 + \pi_6 \xi_1 v_1^2 + \pi_7 v_1^3 + \cdots;\\ v_2 &= \rho_4 \xi_1^3 + \rho_5 \xi_1^2 v_1 + \rho_6 \xi_1 v_1^2 + \rho_7 v_1^3 + \cdots.\end{aligned} \tag{19}$$

Для нахождения нормальных форм (19) воспользуемся уравнением типа (10). Используя это уравнение и процедуру его решения в степенных рядах, получим коэффициенты π_4, $\pi_5, \ldots, \rho_4$, $\rho_5, \ldots$. На этом заканчивается первая итерация метода.

Теперь нелинейную нормальную форму (19) введем в первое уравнение системы (18). В результате получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}&\ddot{\xi}_1 + p_1^2 \xi_1 + \varsigma\{\gamma_1 a_1^3 \xi_1^3 + 2\gamma_3 a_1^3 \dot{\xi}_1^2 \xi_1 + 2\gamma_3 a_1^3 \xi_1^2 \ddot{\xi}_1 - f_{11} \xi_1 \cos(2\Omega t) -\\ &\quad - f_{12}(\pi_4 \xi_1^3 + \pi_5 \xi_1^2 v_1 + \pi_6 \xi_1 v_1^2 + \pi_7 v_1^3) \cos(2\Omega t)\}.\end{aligned} \tag{20}$$

Уравнение (20) более точно описывает параметрические колебания на нелинейной нормальной форме по сравнению с уравнением (15). Решение динамической системы (20) представим в виде (16). Применяя метод гармонического баланса, приходим к системе двух нелинейных алгебраических уравнений относительно (A_1, B_1). На этом заканчивается первая итерация.

Теперь рассмотрим систему (см. рис. 1) со следующими параметрами: $f = 1$; $r = 0{,}289 \cdot 10^{-3}$ м; $M_1 = 0{,}0521$ кг; $c = 70$. Результаты численных расчетов представлены на амплитудно-частотной характеристике (рис. 2), где показана зависимость A_1, B_1 от Ω. Как следует из рис. 2, в системе (см. рис. 1) существует состояние равновесия, которое в области основного параметрического резонанса становится неустойчивым, и от этого равновесного

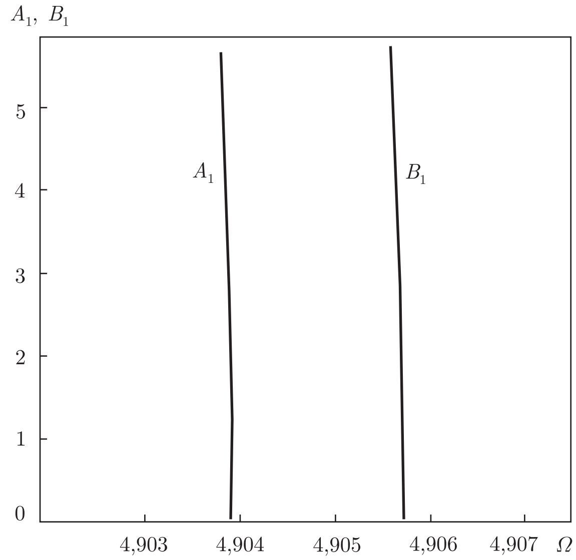

Рис. 2

состояния ответвляются устойчивые периодические колебания, которые описываются веткой A_1.

Работа частично поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины в рамках проекта Ф25.1/042.

1. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. – Москва: Мир, 1976. – 456 с.
2. *Морозов А. Д.* Глобальный анализ в теории нелинейных колебаний. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1995. – 288 с.
3. *Parker T. S., Chua L. O.* Practical numerical algorithms for chaotic systems. – New York: Springer, 1989. – 650 p.
4. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н.* Метод нормальных форм для существенно нелинейных систем. – Москва: Наука, 1989. – 215 с.
5. *Аврамов К. В., Пьерр К., Ширяева Н. С.* Нелинейные нормальные формы колебаний систем с гироскопическими силами // Доп. НАН України. – 2006. – № 11. – С. 7–10.
6. *Rauscher M.* Steady oscillations of system with nonlinear and unsymmetrical elasticity // J. Appl. Mech. – 1938. – **A-169**, No 5. – P. 24–28.
7. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1953. – 256 с.
8. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1961. – 765 с.
9. *Rosenberg R. M.* Steady-state forced vibrations // Internat. J. of Non-linear Mech. – 1966. – No 1. – P. 95–108.
10. *Товажнянский Л. Л., Аврамов К. В., Александров Е. Е. и др.* Академик Александр Михайлович Ляпунов. К 150-летию со дня рождения. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2007. – 285 с.
11. *Vakakis A. F., Manevitch L. I., Mikhlin Yu. et al.* Nonlinear modes and localization in nonlinear systems. – New York: Wiley, 1998. – 800 p.
12. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 500 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 29.02.2008