УДК 621.3

С. Д. Винничук, д-р техн. наук
Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4249171, e-mail: vynnychuk@i.ua)

Обоснование теории мощности системы периодических многофазных токов. I

Предложено рассматривать мощность трехфазного тока как мощность генератора (источника), помещенного в некоторой точке трехфазной системы. Определены составляющие полной мощности для симметричного и несимметричного периодических режимов.

Запропоновано розглядати потужність трьохфазного струму як потужність генератора (джерела), розміщеного у певній точці трьохфазної системи. Визначено складові повної потужності для симетричного та несиметричного періодичних режимів.

К л ю ч е в ы е с л о в а: активная и реактивная мощности, мощность искажения, мощность несимметрии.

Постановка задачи. Исследованиям по теории мощности посвящены работы многих выдающихся ученых, таких как Е. И. Беркович, К. Будяну, А. Ф. Крогерис, Л. С. Лурье, В. Неделку, С. Пенфилд, Г. Е. Пухов, И. Розенцвейг, С. Фрезе, Л. Чернецки и др. Результаты их исследований обобщены в роботах [1, 2]. Однако до настоящего времени остаются нерешенными вопросы определения составляющих полной мощности и их величин для симметричных и несимметричных режимов. Не существует однозначного мнения о способе определения величины реактивной мощности для несинусоидальных и несимметричных режимов [1, 3], не определена величина мгновенного значения реактивной мощности [4]. Способы определения величины активной мощности в точке сети и той ее величины, которую генератор передает в сеть, принципиально отличаются [5]. Нуждается в уточнении смысл понятия мощности несимметрии и ее составляющих как для синусоидальных, так и несинусоидальных режимов многофазных сетей.

Предлагается рассматривать составляющие мощности по отношению к источнику как создаваемые эквивалентным генератором, размещенным в заданной точке сети. Будем определять мгновенные активную и реактивную мощности по отношению к источнику, а также составляющие полной мощности для симметричных и несимметричных режимов, когда мощность несимметрии рассматривается как отклонение режима от симметричного.

Мощность переменного тока и ее составляющие в классической теории мощности. В большинстве случаев результаты исследований по теории мощности основаны на использовании мгновенной мощности одной фазы, а мгновенная мощность многофазных сетей является суммой мгновенных мощностей фаз.

Мощность потока энергии (мгновенная мощность) [1, 2] определяется как интеграл вектора Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$ по всей поверхности A, пересекающей пространство, занятое электромагнитным полем в заданной точке системы, и для независимых процессов в фазных проводах может быть определена как сумма интегралов по каждой из фаз:

$$p_\Sigma = \oint_A \mathbf{\Pi}\cdot d\mathbf{A} = \oint_A [\mathbf{E}_a\cdot\mathbf{H}_a]\, d\mathbf{A} + \oint_A [\mathbf{E}_b\cdot\mathbf{H}_b]\, d\mathbf{A} + \oint_A [\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{H}_c]\, d\mathbf{A},$$

где $\mathbf{E}_n$ и $\mathbf{H}_n$ ($n = a, b, c$) — векторы напряженности электрических и магнитных полей, описывающих процессы в проводах фаз a, b и c.

Для удобства примем $n=0$ для фазы a, $n=1$ для фазы b и $n=2$ для фазы c. Допустим, что в каждой из фаз для интеграла Пойнтинга справедливо соотношение

$$p_n(x,t) = \oint_A [\mathbf{E}_n\mathbf{H}_n]\, d\mathbf{A} = u_n(x,t)\, i_n(x,t),\ n = 0, 1, 2, \tag{1}$$

где x — координаты точки сети; t — текущее время. Тогда весь поток мощности, переданный через сечение A, можно записать в виде

$$p_\Sigma(x,t) = u_a(x,t)\, i_a(x,t) + u_b(x,t)\, i_b(x,t) + u_c(x,t)\, i_c(x,t)\,. \tag{2}$$

Зависимость (2) в случае симметричного синусоидального режима сводится к неизменной по времени величине

$$p_\Sigma(x,t) = 3U(x)\, I(x) \cos\alpha\,(x), \tag{3}$$

где $U(x)$ — действующее значение напряжения; $I(x)$ — действующее значение тока; $\cos\alpha\,(x)$ — косинус угла между током и напряжением.

В случае несинусоидальных периодических (гармоничных) режимов мгновенные значения токов и напряжений для произвольной фазы могут быть представлены рядами Фурье

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\sin(\omega kt + \varphi_k), \\ i(x,t) &= i_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} i_k(x)\sin(\omega kt + \psi_k)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

где φ_k и ψ_k — углы начала фазы для k-й гармоники напряжения и тока. Тогда условие симметричности фаз будет означать выполнение соотношений

$$u_n(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\sin\left(\omega kt+\varphi_k-\frac{2\pi n}{3}\right),$$
$$i_n(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} i_k(x)\sin\left(\omega kt+\psi_k-\frac{2\pi n}{3}\right),\ n=0,\ 1,\ 2, \tag{5}$$

и при подстановке (5) и (4) в зависимость (2) получим выражение

$$p_\Sigma(x,t)=3u_0(x)\,i_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\ i_k(x)\,\Phi_k(\,t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\sum_{m=1(m\neq k)}^{\infty} i_m(x)\,\Phi_{k,m}(\,t),$$

в котором при выполнении тождеств

$$\sum_{n=0}^{2}\sin(\omega kt-2n\pi/3)=0;\quad \sum_{n=0}^{2}\cos(\omega kt-2n\pi/3)=0,$$
$$\sum_{n=0}^{2}\sin(\omega kt-2n\pi/3)\sin(\omega mt-2n\pi/3)=0,\ m\neq k,$$
$$\sum_{n=0}^{2}\sin(\omega kt-2n\pi/3)\cos(\omega mt-2n\pi/3)=0,$$
$$\sum_{n=0}^{2}\sin^2(\omega kt-2n\pi/3)=\sum_{n=0}^{2}\cos^2(\omega kt-2n\pi/3)=3/2\,,$$

величины $\Phi_k(\,t)$ и $\Phi_{k,m}(\,t)$ принимают вид

$$\Phi_k(\,t)=\sin(\omega kt+\varphi_k)\sin(\omega kt+\psi_k)+$$
$$+\sin(\omega kt-2\pi/3+\varphi_k)\sin(\omega kt+2\pi/3)+$$
$$+\sin(\omega kt-4\pi/3+\varphi_k)\sin(\omega kt+\psi_k-4\pi/3)=3/2\cos(\varphi_k-\psi_k),$$
$$\Phi_{k,m}(\,t)=\sin(\omega kt+\varphi_k)\sin(\omega nt+\psi_n)+$$
$$+\sin(\omega kt-2\pi/3+\varphi_k)\sin(\omega nt-2\pi/3+\psi_n)+$$
$$+\sin(\omega kt-4\pi/3+\varphi_k)\sin(\omega nt+\psi_n-4\pi/3)=$$

$$=3/2\cos(\omega(k-n)\,t+\varphi_k-\psi_n)+1/2\cos(\omega(k+n)\,t+\varphi_k+\psi_n)+$$
$$+1/2\cos(\omega(k+n)\,t+\varphi_k+\psi_n-4\pi/3)+1/2\cos(\omega(k+n)\,t+\varphi_k+\psi_n-8\pi/3)=$$
$$=3/2\cos(\omega(k-n)\,t+\varphi_k-\psi_n).$$

Следовательно,

$$p_\Sigma(x,t)=3u_0(x)\,i_0(x)+3/2\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\;i_k(x)\cos(\varphi_k-\psi_k)+$$
$$+3/2\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\sum_{m=1(m\neq k)}^{\infty}i_m(x)\cos(\omega(k-m)\,t+\varphi_k-\psi_m)\,. \tag{6}$$

В соотношении (6) первое слагаемое мгновенной мощности определяет активную мощность постоянных составляющих тока и напряжения трехфазной сети. Суть второго и третьего слагаемых необходимо установить.

В общем случае активная мощность определяется как среднее значение мгновенной мощности на периоде. Оценим такую величину с использованием зависимости (6), полагая нулевыми постоянные составляющие тока и напряжения (i_0 и u_0):

$$P_\Sigma(x)=P_a(x)+P_b(x)+P_c(x)=$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T(u_a(x,t)\,i_a(x,t)+u_b(x,t)\,i_b(x,t)+u_c(x,t)\,i_c(x,t))\,dt=$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T\left(3/2\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\;i_k(x)\cos(\varphi_k-\psi_k)\right)dt+$$
$$+\frac{1}{T}\int_0^T\left(3/2\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\sum_{m=1(m\neq k)}^{\infty}i_n(x)\cos(\omega(k-n)\,t+\varphi_k-\psi_n)\right)dt=$$
$$=3/2\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\;i_k(x)\cos(\varphi_k-\psi_k)\,.$$

Здесь второе слагаемое — это среднее на периоде значение мгновенной активной мощности трех фаз $P_\Sigma(x,t)$, а третье слагаемое определяет величину отклонения мгновенного значения $p_\Sigma(x,t)$ от его среднего значения $P_\Sigma(x)$. Но определяется ли по такому отклонению значение реактивной мощности? Однозначно можно утверждать, что не определяется, так как для синусоидального симметричного режима отклонение $p_\Sigma(x,t)$ от $P_\Sigma(x)$ равно нулю. Тогда возникает следующий вопрос: в случае синусоидальных режимов весь суммарный поток мощности через произвольное сечение является потоком только активной мощности? Это — первое замечание к общей теории мощности.

Проблемы определения понятия реактивной мощности Q и зависимостей для нее оказались более сложными. Обычно реактивная мощность рассматривается как математическая величина, наиболее часто определяемая по Будяну:

$$Q_{\text{Б}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} u_k i_k \sin(\varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin(\varphi_k),$$

где φ_k — угол между током и напряжением для k-й гармоники при разложении токов и напряжений в ряд Фурье

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} i_k \sin(\omega kt - \varphi_k),\ \ u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin(\omega kt),\ \ U_k = u_k/\sqrt{2},\ \ I_k = i_k/\sqrt{2}.$$

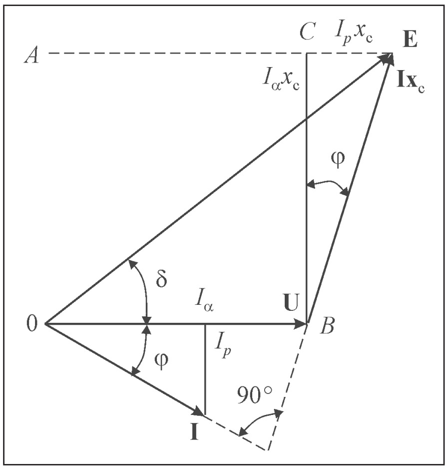
В общем случае при определении величины Q трехфазной симметричной системы используется зависимость (2) только для одной фазы, где по значениям токов и напряжений каждой из фаз в отдельности определяют: активную мощность P как среднюю на периоде величину, реактивную Q как отклонение мгновенной активной мощности от среднего ее значения на периоде, а полную S как произведение действующего значения тока I на действующее значение напряжения U. На основании математических преобразований зависимости (2) для мгновенной мощности одной фазы при ее представлении в виде ряда Фурье выделяют постоянную, косинусную и синусную составляющие, где синусная составляющая в случае синусоидальных токов и напряжений [6] часто отождествляется с так называемой реактивной мощностью цепи. Следовательно, правила определения величин активной и реактивной мощностей основаны на формальной математической процедуре условного выделения одной фазы из общей трехфазной системы. Это — второе замечание к общей теории мощности.

Известно, что для синусоидальных токов и напряжений справедливо соотношение

$$S^2 = P^2 + Q^2, \tag{7}$$

которое может быть нарушено для несинусоидальных симметричных токов и напряжений. Поэтому зависимость (7) дополняется мощностью искажения D:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2. \tag{8}$$



Векторная диаграмма электропередачи

При переходе к многофазным токам и напряжениям и определении мощностей как суммы соответствующих мощностей фаз в случае несимметричных соотношений между составляющими мощности в (8) для разных фаз нарушается соотношение для суммарной полной мощности. Величину такого рассогласования называют мощностью несимметрии H. Тогда

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 + H_a^2 + H_\varphi^2, \quad (9)$$

где H_a и H_φ — амплитудная и фазная мощности несимметрии. Соотношение (9) отображает суть классической теории мощности, и теории мощности Фризе, основными замечаниями к которой оказались примеры токов и напряжений, когда угол между током и напряжением в сети совпадал, но вследствие искажения несинусоидальных и (или) несимметричных токов и напряжений величина реактивной мощности не равнялась нулю. Один из вариантов таких токов и напряжений приведен в работе [7]. Наличие таких примеров дает основание утверждать, что вопрос отнесения составляющих мощности искажения и несимметрии к реактивной или активной составляющей полной мощности нуждается в дополнительном изучении, как и физический смысл реактивной мощности. Это — третье замечание к общей теории мощности.

Активная мощность трехфазной симметричной системы относительно источника. В теории электрических машин активная мощность P_g, передаваемая машиной в сеть, рассчитывается как произведение обобщенных векторов напряженности электрического поля **E** и вектора напряжения **U** по формуле

$$P_g = |\langle \mathbf{E} \times \mathbf{U} \rangle| / x_c = |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{U}| / x_c \sin\delta. \quad (10)$$

Проанализируем структуру векторов **E** и **U**. На рисунке представлены обобщенные векторы тока $\mathbf{I}(\mathbf{I} = \sqrt{2} I)$ и напряжения $\mathbf{U}(\mathbf{U} = \sqrt{2} U)$, соответствующие симметричному синусоидальному режиму работы трехфазной системы [8, с. 242], где элементы схемы представлены только индуктивными сопротивлениями. Значения токов и напряжений для каждой фазы являются проекциями векторов **I** или **U** на три оси времени [8], каждая из которых вращается с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки.

Как видно из рисунка, вектор $\mathbf{E}\,(|\mathbf{E}|=\sqrt{2}\,E)$ можно представить в виде суммы векторов

$$\mathbf{E}=\mathbf{U}+\mathbf{I}\mathbf{x}_c=\mathbf{U}+x_c\mathbf{I}_\perp, \tag{11}$$

где $\mathbf{I}_\perp$ — вектор, ортогональный вектору $\mathbf{I}$ и равный ему по длине. С учетом (11) выражение (10) в случае симметричного режима можно записать в виде

$$P_g=|\mathbf{P}_g|=|\langle\mathbf{E}\times\mathbf{U}\rangle|/x_c=|\langle(\mathbf{U}+x_c\mathbf{I}_\perp)\times\mathbf{U}\rangle|/x_c=$$
$$=|\langle\mathbf{I}_\perp\times\mathbf{U}\rangle|=\|\mathbf{I}_\perp\|\|\mathbf{U}\||\sin(90°-\varphi)|=\|\mathbf{I}\|\|\mathbf{U}\||\cos\varphi|. \tag{12}$$

Представим обобщенные векторы координатами: $\mathbf{I}_\perp=(i_{\perp,a},i_{\perp,b},i_{\perp,c})$, $\mathbf{U}=(u_a,u_b,u_c)$. Тогда величина мгновенной активной мощности будет

$$|\mathbf{P}_g|=|\langle\mathbf{I}_\perp\times\mathbf{U}\rangle|=\sqrt{\begin{vmatrix} i_{\perp,a} & i_{\perp,b}\\ u_a & u_b\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} i_{\perp,a} & i_{\perp,c}\\ u_a & uc\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} i_{\perp,b} & i_{\perp,c}\\ u_b & u_c\end{vmatrix}^2}=$$
$$=\sqrt{(i_{\perp,a}u_b-i_{\perp,b}u_a)^2+(i_{\perp,a}u_c-i_{\perp,c}u_a)^2+(i_{\perp,b}u_c-i_{\perp,c}u_b)^2}. \tag{13}$$

В случае симметричного режима формула (13) описывает всю активную мощность, передаваемую генератором в сеть. Такую зависимость можно использовать для определения полной активной мощности симметричного трехфазного тока для произвольной точки сети, если для вектора $\mathbf{I}=(i_a,\,i_b,\,i_c)$ построить ортогональный ему вектор $\mathbf{I}_\perp=(i_{\perp,a},\,i_{\perp,b},\,i_{\perp,c})$.

Рассмотрим синусоидальный режим и определим значения мгновенной и средней на периоде величин активной мощности в соответствии с соотношениями (10)—(13). Для синусоидального режима формула (13) может быть уточнена, а именно можно найти выражение для модуля векторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{I}_\perp$ и представить величину активной мощности в обычной форме через действующие значения тока и напряжения:

$$|\mathbf{P}|=\|\mathbf{I}\|\|\mathbf{U}\||\cos\varphi|=\frac{3}{2}I_aU_a|\cos\varphi|=3UI|\cos\varphi|. \tag{14}$$

Используя соотношение (5) для синусоидальных токов и напряжений, можно показать, что формула (14) даст такой же результат. Действительно,

$$|\mathbf{P}_g|=|\langle\mathbf{I}_\perp\times\mathbf{U}\rangle|=\sqrt{(i_{\perp,a}u_b-i_{\perp,b}u_a)^2+(i_{\perp,a}u_c-i_{\perp,c}u_a)^2+(i_{\perp,b}u_c-i_{\perp,c}u_b)^2}=$$
$$=U_aI_a\sqrt{9/4\sin^2(\pi/2-\varphi)}=3/2U_aI_a|\sin(\pi/2-\varphi)|=$$
$$=3/2U_aI_a|\cos\varphi|=3UI|\cos\varphi|.$$

В случае синусоидального симметричного режима величина активной мощности, передаваемой в систему генератором, в точности совпадает с величиной $p_\Sigma(x,t)$, согласно (3), со значением, полученным по формуле (13), и со значением активной мощности трехфазного тока, который определяется как утроенное среднее на периоде значения мгновенной мощности одной фазы.

Следовательно, для синусоидального симметричного режима суммарная мгновенная мощность трех фаз во всех случаях является независимой от времени величиной (константой), что характерно как для $p_\Sigma(x,t)$, так и для модуля мгновенного значения активной мощности (12) или (13).

Реактивная мощность трехфазной симметричной системы относительно источника. Для двух произвольных векторов, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, справедливо соотношение

$$(|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|)^2 = (|\langle \mathbf{A}\times\mathbf{B}\rangle|)^2 + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2. \tag{15}$$

Поэтому соотношение (15) справедливо и для векторов $\mathbf{I}_\perp = (i_{\perp,a}, i_{\perp,b}, i_{\perp,c})$, $\mathbf{U} = (u_a,\, u_b,\, u_c)$. Действительно,

$$(|\langle \mathbf{U}\times\mathbf{I}_\perp\rangle|)^2 + (\mathbf{U}\cdot\mathbf{I}_\perp)^2 =$$

$$= (i_{\perp,a}u_b - i_{\perp,b}u_a)^2 + (i_{\perp,a}u_c - i_{\perp,c}u_a)^2 + (i_{\perp,b}u_c - i_{\perp,c}u_b)^2 +$$

$$+ (i_{\perp,a}u_a + i_{\perp,b}u_b + i_{\perp,c}u_c)^2 = i_{\perp,a}^2 u_b^2 + i_{\perp,b}^2 u_a^2 - 2 i_{\perp,a}u_b i_{\perp,b}u_a +$$

$$+ i_{\perp,a}^2 u_c^2 + i_{\perp,c}^2 u_a^2 - 2\, i_{\perp,a}u_c i_{\perp,c}u_a + i_{\perp,c}^2 u_b^2 + i_{\perp,b}^2 u_c^2 - 2\, i_{\perp,c}u_b i_{\perp,b}u_c +$$

$$+ i_{\perp,a}^2 u_a^2 + i_{\perp,b}^2 u_b^2 + i_{\perp,c}^2 u_c^2 + 2\, i_{\perp,a}u_a i_{\perp,b}u_b + 2\, i_{\perp,a}u_a i_{\perp,c}u_c + 2\, i_{\perp,b}u_b i_{\perp,c}u_c =$$

$$= i_{\perp,a}^2(u_b^2 + u_c^2 + u_a^2) + i_{\perp,b}^2(u_a^2 + u_c^2 + u_b^2) + i_{\perp,c}^2(u_a^2 + u_b^2 + u_c^2) =$$

$$= (i_b^2 + i_c^2 + i_a^2)(u_b^2 + u_c^2 + u_a^2) = |\mathbf{U}|^2\cdot|\mathbf{I}_\perp|^2 = |\mathbf{U}|^2\cdot|\mathbf{I}|^2 = s^2(x,t).$$

Следовательно,

$$s^2(x,t) = |\mathbf{U}(x,t)|^2\cdot|\mathbf{I}(x,t)|^2 = (|\langle \mathbf{U}(x,t)\times\mathbf{I}_\perp(x,t)\rangle|)^2 + (\mathbf{U}(x,t)\cdot\mathbf{I}_\perp(x,t))^2 =$$

$$= p_g^2(x,t) + z_g^2(x,t),$$

где $z_g(x,t)$ — некоторая мгновенная мощность, смысл которой необходимо установить.

Для синусоидального симметричного режима

$$z_g^2 = s^2 - p_g^2 = 9U^2I^2 - 9U^2I^2\cos^2\varphi = 9U^2I^2\sin^2\varphi = (3Q_{\text{Б}})^2,$$

т.е. $z_g(x,t)$ — это мгновенная реактивная мощность (МРМ). В общем случае для симметричного периодического режима можно записать

$$z_g^2(x,t)=s^2(x,t)-p_g^2(x,t)=$$

$$=|\mathbf{U}(x,t)|^2\cdot|\mathbf{I}(x,t)|^2-(|\langle\mathbf{U}(x,t)\times\mathbf{I}_\perp(x,t)\rangle|)^2=(\mathbf{U}(x,t)\cdot\mathbf{I}_\perp(x,t))^2.$$

Рассмотрим скалярное произведение обобщенных векторов тока и напряжения $\mathbf{U}(t)\cdot\mathbf{I}_\perp(t)$ в общем случае периодического гармоничного процесса и отсутствия постоянной составляющей для тока и напряжения. При условии симметричности токи и напряжения можно представить в виде

$$u_a(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\sin(\omega kt+\varphi_k),\ i_{\perp,a}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}i_k(x)\sin(\omega kt+\psi_k+\pi/2),$$

$$u_b(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\sin\left(\omega kt+\varphi_k-\frac{2\pi}{3}\right),\ i_b(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}i_k(x)\sin\left(\omega kt+\psi_k-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$u_c(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\sin\left(\omega kt+\varphi_k-\frac{2\pi}{3}\right),\ i_c(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}i_k(x)\sin\left(\omega kt+\psi_k+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right),$$

где φ_k и ψ_k — углы начала фазы для k-й гармоники напряжения и тока. Тогда скалярное произведение векторов $\mathbf{I}_\perp=(i_{\perp,a},i_{\perp,b},i_{\perp,c})$ и $\mathbf{U}=(u_a,u_b,u_c)$ запишем в виде

$$z_g(x,t)=\mathbf{U}(x,t)\cdot\mathbf{I}_\perp(x,t)=$$

$$=u_a(x,t)i_{\perp,a}(x,t)+u_b(x,t)\,i_{\perp,b}(x,t)+u_c(x,t)\,i_{\perp,c}(x,t)=$$

$$=\sum_{m=0}^{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\sin\left(\omega kt+\varphi_k-\frac{2m\pi}{3}\right)\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}i_n(x)\sin\left(\omega nt+\psi_n+\frac{\pi}{2}-\frac{2m\pi}{3}\right)\right)\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}u_k(x)\sin\left(\omega kt+\varphi_k-\frac{2m\pi}{3}\right)\left(\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}i_n(x)\sin\left(\omega nt+\psi_n+\frac{\pi}{2}-\frac{2m\pi}{3}\right)\right)+\\+i_k(x)\sin\left(\omega kt+\psi_n+\frac{\pi}{2}-\frac{2m\pi}{3}\right)\left(\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}u_n(x)\sin\left(\omega nt+\varphi_n-\frac{2m\pi}{3}\right)\right)+\\+u_k(x)\sin\left(\omega kt+\varphi_k-\frac{2m\pi}{3}\right)i_k(x)\sin\left(\omega nt+\psi_n+\frac{\pi}{2}-\frac{2m\pi}{3}\right)\end{array}\right)\right).\tag{16}$$

Изменив порядок суммирования в (16), получим

$$\left|z_g(x,t)\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \sum\limits_{m=0}^{2} u_k(x) \sin\left(\omega kt + \varphi_k - \frac{2m\pi}{3}\right) i_k(x) \sin\left(\omega nt + \psi_n + \frac{\pi}{2} - \frac{2m\pi}{3}\right) + \\ + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \left(\begin{array}{l} \sum\limits_{m=0}^{2} u_k(x) \sin\left(\omega kt + \varphi_k - \frac{2m\pi}{3}\right) i_n(x) \sin\left(\omega nt + \psi_n + \frac{\pi}{2} - \frac{2m\pi}{3}\right) + \\ + \sum\limits_{m=0}^{2} i_k(x) \sin\left(\omega kt + \psi_n + \frac{\pi}{2} - \frac{2m\pi}{3}\right) u_n(x) \sin\left(\omega nt + \varphi_n - \frac{2m\pi}{3}\right) \end{array} \right) \end{array} \right).$$

После преобразований

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1,\, n\neq k} \sum_{m=0}^{2} u_k(x) \sin\left(\omega kt + \varphi_k - \frac{2m\pi}{3}\right) i_n(x) \sin\left(\omega nt + \psi_n + \frac{\pi}{2} - \frac{2m\pi}{3}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1,\, n\neq k} u_k(x)\, i_n(x) \left(\sum_{m=0}^{2} \sin\left(\omega kt + \varphi_k - \frac{2m\pi}{3}\right) \sin\left(\omega nt + \psi_n + \frac{\pi}{2} - \frac{2m\pi}{3}\right) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1,\, n\neq k} u_k(x)\, i_n(x) \left(\frac{3}{2} \cos\left(\omega(k-n)t + \varphi_k - \psi_n + \frac{\pi}{2}\right) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1,\, n\neq k} u_k(x)\, i_n(x) \left(\frac{3}{2} \sin\left(\omega(k-n)t + \varphi_k - \psi_n\right) \right)$$

запишем

$$z_g(x,t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} u_k(x) i_k(x) \frac{1}{2} \sum\limits_{m=0}^{2} \left(\cos\left(\varphi_k - \psi_k - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2\omega kt + \varphi_k + \psi_k + \frac{\pi}{2} - \frac{4m\pi}{3}\right) \right) + \\ + \sum\limits_{n=1,\, n\neq k} u_k(x)\, i_n(x) \left(\frac{3}{2} \sin\left(\omega(k-n)t + \varphi_k - \psi_n\right) \right) \end{array} \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k(x) i_k(x) \cos\left(\varphi_k - \psi_k - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1,\, n\neq k} u_k(x)\, i_n(x) \sin(\omega(k-n)t + \varphi_k - \psi_n) \right).$$

Определим величину мощности как среднее на периоде значение МРМ:

$$Z_g(x) = \frac{1}{T}\int_0^T z_g(x,t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\begin{gathered} u_k(x)\,i_k(x)\cos\left(\varphi_k - \psi_k - \frac{\pi}{2}\right) + \\ + \sum_{n=1,\, n\neq k} u_k(x)\,i_n(x)\sin(\omega(k-n)\,t + \varphi_k - \psi_n) \end{gathered} \right) \right) dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\,i_k(x)\sin(\varphi_k - \psi_k) \right) dt +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \sum_{n=1(n\neq k)}^{\infty} i_n(x)\cos(\omega(k-n)\,t + \varphi_k - \psi_n) \right) dt =$$

$$= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\,i_k(x)\sin(\varphi_k - \psi_n) = 3\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)\,I_k(x)\sin(\varphi_k - \psi_k).$$

Как видим, выражение среднего на периоде значения МРМ $z_g(x,t)$ полностью совпадает с выражением реактивной мощности по Будяну и с ее утроенным значением для одной фазы. Именно поэтому величину $z_g(x,t)$ можно считать МРМ, которую в дальнейшем будем обозначать через $q_\Sigma(x,t)$, а мощность $Z_g(x)$ — реактивной мощностью трехфазной симметричной системы, которую обозначим $Q_g(x)$.

Мгновенная реактивная мощность одной фазы. В классической теории мощности активную мощность P одной фазы для произвольного периодического режима определяют как среднее значение ее мгновенной мощности $p(x,t) = u(x,t)\,i(x,t)$:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(x,t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\,i(x,t)\,dt, \tag{17}$$

где реактивная мощность — это отклонение мгновенной мощности $p(x, t)$ от P. Следовательно, нахождение реактивной мощности одной фазы возможно только тогда, когда уже известно значение активной мощности этой фазы. Но возможен и другой подход, а именно определение реактивной мощности на основании ее мгновенного значения, т.е. по формуле, аналогичной (17), если найдена зависимость для МРМ одной фазы.

Проблема определения МРМ известна давно. В работе [9] дано определение МРМ в d–q-координатах и предложен IRP-метод определения составляющих полной мощности. Но использование полной мощности в случае несимметричных режимов приводит к неправильному определению ее составляющих. В работе [4] указано, что основной причиной неправильных определений энергетических характеристик в трехфазной системе является отсутствие достаточного числа параметров, описывающих токи и напряжения трехфазного режима даже в случае синусоидальных токов и напряжений (всего два параметра при трех значениях токов и напряжений).

Мгновенная реактивная мощность может быть определена на основании формальных математических преобразований (гармоническая аппроксимация) зависимости (2) для одной фазы с выделением синусной составляющей [6] или на основании декомпозиции тока на ортогональные составляющие (см., например, [10]). В первом случае возникают проблемы с правильным определением энергетических характеристик, во втором — с обнулением синусной составляющей для суммарной МРМ трех фаз в симметричном синусоидальном режиме.

Таких недостатков не имеет зависимость (16), согласно которой значение реактивной МРМ q_g (источника) трехфазной симметричной системы можно записать в виде $q_\Sigma(x,t) = u_a(x,t)\, i_{\perp,a}(x,t) + u_b(x,t)\, i_{\perp,b}(x,t) + u_c(x,t)\, i_{\perp,c}(x,t)$, где в случае симметричных синусоидальных токов и напряжений значение МРМ принимает вид, аналогичный (4) для суммарной мгновенной активной мощности: $q_\Sigma(x,t) = \text{const} = 3U(x)\, I(x) \sin\alpha(x)$. Таким же способом можно определить и МРМ для каждой фазы:

$$\begin{aligned} q_a(x,t) &= u_a(x,t)\, i_{\perp,a}(x,t), \\ q_b(x,t) &= u_b(x,t)\, i_{\perp,b}(x,t), \\ q_c(x,t) &= u_c(x,t)\, i_{\perp,c}(x,t). \end{aligned} \tag{18}$$

Исследуем свойства зависимостей (18) для синусоидального и произвольного гармонических процессов. Покажем, что среднее на периоде значение МРМ является величиной реактивной мощности по Будяну. Пусть токи и напряжения симметричной трехфазной системы описываются зависимостями

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \sin(\omega k t + \varphi_k), \quad i(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} i_k(x) \sin(\omega k t + \psi_k),$$

$$i_\perp(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} i_k(x) \sin(\omega k t + \psi_k + \pi/2) = \sum_{k=1}^{\infty} i_k(x) \cos(\omega k t + \psi_k).$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2012. V. 34. № 2

Вычислим среднее на периоде значение МРМ $q(x,t) = u(x,t)\, i_{\perp}(x,t)$:

$$Q(x) = \omega \int_0^{1/\omega} q(x,t)dt = \omega \int_0^{1/\omega} u(x,t)\, i_{\perp}(x,t)dt =$$

$$= \omega \int_0^{1/\omega} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \sin(\omega kt + \varphi_k) \sum_{n=1}^{\infty} i_n(x) \cos(\omega nt + \psi_n) dt =$$

$$= \omega \int_0^{1/\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\begin{array}{l} u_k(x) \sin(\omega kt + \varphi_k) \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} i_n(x) \cos(\omega nt + \psi_n) + \\ + i_k(x) \cos(\omega kt + \psi_k) \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} u_n(x) \sin(\omega nt + \varphi_n) + \\ + u_k(x) \sin(\omega kt + \varphi_k) i_k(x) \cos(\omega kt + \psi_k) \end{array} \right) dt =$$

$$= \omega \int_0^{1/\omega} \sum_{k=1}^{\infty} (0 + 0 + u_k(x)\, i_k(x)/2(\sin(2\omega kt + \varphi_k + \psi_k) + \sin(\varphi_k - \psi_k)))\, dt =$$

$$= \omega \int_0^{1/\omega} \sum_{k=1}^{\infty} (u_k(x)\, i_k(x)/2(\sin(\varphi_k - \psi_k)))\, dt =$$

$$= \omega \sum_{k=1}^{\infty} (u_k(x)\, i_k(x)/2(\sin(\varphi_k - \psi_k))) \int_0^{1/\omega} 1dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (u_k(x)\, i_k(x)/2\sin(\varphi_k - \psi_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)\, I_k(x) \sin(\varphi_k - \psi_k)\,.$$

Таким образом, для произвольного гармонического процесса (включая и синусоидальный) среднее на периоде значение МРМ одной фазы является значением реактивной мощности по Будяну, и при этом не требуется выполнения условия симметричности токов и напряжений трехфазной системы. Следует заметить, что аналогичное представление реактивной мощности приведено в работе [1, с. 35], где для этого используются фазоры (векторы трех фазных напряжений, исходящие из центра тяжести треугольника).

Составляющие мощности относительно источника для трехфазной симметричной системы. Если реактивная мощность $Q_g(x)$ относительно источника полностью совпадает с ее определением по Будяну, то смысл активной мощности $P_g(x)$ относительно источника необходимо выяснить. Сравним величины активной мощности $P_g(x)$ и $P_\Sigma(x)$, рассматривая разность $P_g^2(x)-P_\Sigma^2(x)$, знак которой совпадает со знаком разности $P_g(x)-P_\Sigma(x)$:

$$(P_g^2-P_\Sigma^2)/9=(S^2-Q_g^2-P_\Sigma^2)/9=\frac{1}{9T}\int_0^T(i_a^2+i_b^2+i_c^2)(u_a^2+u_b^2+u_c^2)\,dt-$$

$$-\frac{1}{9T}\int_0^T(i_{\perp,a}u_a+i_{\perp,b}u_b+i_{\perp,c}u_c)^2\,dt-\frac{1}{9T}\int_0^T(i_au_a+i_bu_b+i_cu_c)^2\,dt=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2(x)\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2(x)\right)-\left(\sum_{k=1}^{\infty}U_k(x)\,I_k(x)\sin(\varphi_k-\psi_k)\right)^2-$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{\infty}U_k(x)\,I_k(x)\cos(\varphi_k-\psi_k)\right)^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\begin{array}{l}U_k^2(x)\,I_k^2(x)(1-\sin^2(\varphi_k-\psi_k)-\cos^2(\varphi_k-\psi_k))+\\+\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\left(\begin{array}{l}U_k^2(x)\,I_n^2(x)+U_n^2(x)\,I_k^2(x)-\\-2U_k(x)\,I_k(x)\,U_n(x)\,I_n(x)\sin(\varphi_k-\psi_k)\sin(\varphi_n-\psi_n)-\\-2U_k(x)\,I_k(x)\,U_n(x)\,I_n(x)\cos(\varphi_k-\psi_k)\cos(\varphi_n-\psi_n)\end{array}\right)\end{array}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(0+\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\begin{array}{l}U_k^2(x)\,I_n^2(x)+U_n^2(x)\,I_k^2(x)-\\-2U_k(x)\,I_k(x)\,U_n(x)\,I_n(x)\cos(\varphi_k-\psi_k-\varphi_n+\psi_n)\end{array}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\begin{array}{l}U_k^2(x)\,I_n^2(x)+U_n^2(x)\,I_k^2(x)-\\-2U_k(x)\,I_k(x)\,U_n(x)\,I_n(x)\cos(\varphi_k-\psi_k-\varphi_n+\psi_n)\end{array}\right)\ge 0. \qquad (19)$$

В (19) условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\begin{array}{l}U_k^2(x)\,I_n^2(x)+U_n^2(x)\,I_k^2(x)-\\-2U_k(x)\,I_k(x)\,U_n(x)\,I_n(x)\cos(\varphi_k-\psi_k-\varphi_n+\psi_n)\end{array}\right)\ge 0$$

вытекает из того факта, что для каждого из слагаемых двойной суммы справедливо соотношение

$$U_k^2(x)I_n^2(x)+U_n^2(x)I_k^2(x)-2U_k(x)I_k(x)U_n(x)I_n(x)\cos(\varphi_k-\psi_k-\varphi_n+\psi_n)=$$

$$= (U_k(x) I_n(x) - U_n(x) I_k(x))^2 +$$

$$+ 4U_k(x) I_k(x) U_n(x) I_n(x) \sin^2((\varphi_k - \psi_k - \varphi_n + \psi_n)/2), \qquad (20)$$

где равенство нулю возможно только в случае выполнения условий

$$I_n(x)/U_n(x) = I_k(x)/U_k(x) \, (\forall k, n \in N),$$

$$\varphi_k - \psi_k = \varphi_n - \psi_n \; (\forall k, n \in N), \qquad (21)$$

которые соответствуют случаю отсутствия искажения [1].

Анализируя (20), можно выделить амплитудную D_A и фазную $D_Ф$ составляющие мощности искажения:

$$D_A^2(x) + D_Ф^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} ((U_k(x) I_n(x) - U_n(x) I_k(x))^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} (4U_k(x) I_k(x) U_n(x) I_n(x) \sin^2(\varphi_k - \psi_k - \varphi_n + \psi_n)). \qquad (22)$$

Тогда в общем случае получим

$$S^2 = P_\Sigma^2 + Q_g^2 + D_A^2 + D_\Phi^2. \qquad (23)$$

Зависимости (22) и (23) имеют теоретический смысл. На практике суммарную величину мощности искажения можно определять на основе геометрической суммы $D^2 = D_A^2 + D_\Phi^2$, так как данные об амплитудах и фазах бесконечного числа гармоник в разложении токов и напряжений в ряд Фурье отсутствуют.

(*Продолжение статьи см. в следующем номере*)

It is proposed to consider power of the three-phase current as the power of the generator (source) placed in a certain point of the three-phase system. The complete power components have been determined for the symmetric and asymmetric periodic operations.

1. *Тонкаль В. Е., Новосельцев А. В., Денисюк С. П. и др.* Баланс энергий в электрических цепях. — Киев : Наук. думка, 1992. — 312 с.
2. *Крогерис А. Ф., Решевиц К. К., Трейманис Э. П., Шинка Я. К.* Мощность переменного тока. — Рига : Физ.-энерг. ин-т Латв. АН, 1993. — 294 с.
3. *Чиженко А. И.* Обменные энергетические процессы в цепях вентильних полупроводниковых преобразователей. . — Киев : Наук.думка, 2003. — 227 с.
4. *Leszek S. Czamecki.* Power Properties of Electrical Circuits and their Misinterpretations by the Instantaneous Reactive Power p-q Theory. //Proc. of XII International Simposium of Theoretical Electrical Engineering ISTET '03. — Vol. II. — Warsaw, 2003. — P. 261—267.
5. *Винничук С. Д.* Мощность переменного тока. Новый взгляд. /Сборник тр. конф. «Моделирование — 2006». — Киев : ИПМЭ НАН Украины, 2006. — С. 161—164.

6. *Родькин Д. И., Коренькова Т. В.* Мгновенная мощность сигналов произвольной формы. // Електромеханічні і енергозберігаючі системи. — 2010 (12). — Вип. 4. — С. 10 — 21.
7. *Кизилов В. У., Светелик А. Д.* О понятии «реактивная мощность» // Енергетика та електрифікація. — 2005. — № 2. — С. 35—38.
8. *Жданов П. С.* Вопросы устойчивости электрических систем /Под ред. Л. А. Жукова. — М. : Энергия, 1979. — 456 с.
9. *Akagi H., Nabae A.* The p-q theory in three-phase systems under nonsinusoidal conditions// Eurp. Trans. on Electric Power(ETEP). — 1993. — Vol. 3, No. 1. — P. 27—31.
10. *Агунов М. В.* Энергетические процессы в электрических цепях с несинусоидальными режимами и их эффективность. — Кишинев—Тольятти : МолдНИИТЭИ, 1997. — 84 с.

Поступила 26.09.11

ВИННИЧУК Степан Дмитриевич, д-р техн. наук, вед. науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1977 г. окончил Черновицкий госуниверситет. Область научных исследований — разработка методов, моделей и программных средств для анализа распределительных систем сжимаемой и несжимаемой жидкостей, авиационные системы кондиционирования воздуха; системная противоаварийная частотная автоматика электроэнергетических систем.