

---

УДК 621.318.38

**А. В. Жильцов \***, **И. П. Кондратенко \*\***, доктора техн. наук,  
**Р. С. Крищук \***

\* Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины  
(Украина, 03041, Киев, ул. Героев обороны, 12,  
тел. (044) 527-87-29, E-mail: azhilt@mail.ru)

\*\* Институт электродинамики НАН Украины  
(Украина, 03680, Киев, пр-т Победы, 56,  
тел. (044) 456-40-65, Email: dep7ied@ukr.net)

## **Моделирование электромагнитных процессов в однофазных индукторах поперечного магнитного поля**

Разработан метод расчета электромагнитного поля однофазного двустороннего индуктора с произвольным числом пар полюсов и согласованным направлением магнитного поля в немагнитном промежутке. Метод позволяет учитывать конечную ширину ферромагнитных сердечников, дискретный характер распределения обмоток и линейное распределение токовой нагрузки в зоне лобовых частей обмоток.

Розроблено метод розрахунку електромагнітного поля однофазного двостороннього індуктора з довільною кількістю пар полюсів та узгодженим напрямом магнітного поля в немагнітному проміжку. Метод дозволяє враховувати скінченну ширину феромагнітних осердь, дискретний характер розподілу обмоток та лінійний розподіл струмового навантаження в зоні лобових частин обмоток.

*Ключевые слова: метод расчета, электромагнитное поле, однофазный двусторонний индуктор, конечная ширина сердечника.*

Переменное магнитное поле с частотой 1—50 Гц рекомендовано использовать [1] для обработки зерна различных сельскохозяйственных культур с целью подавления болезнетворных организмов при хранении или предпосевной стимуляции. Переменное магнитное поле также используется при медикобиологических исследованиях клеточных структур, микроорганизмов, грибов. Обычно уровень магнитного поля не превышает 100 мТл. Для определения оптимальной величины магнитного поля при воздействии на биологические объекты должно быть соблюдено требование его однородности в заданном объеме. Это условие может быть реализовано в линейном индукторе поперечного магнитного поля.

Теория линейных индукторов поперечного магнитного поля развивалась в связи с использованием их для индукционного нагрева плоского

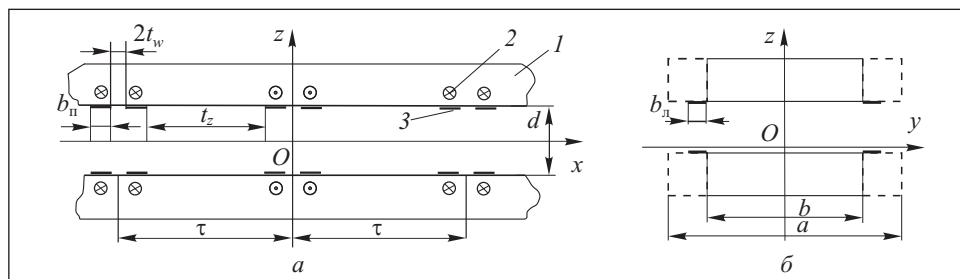
проката металлов. В работах [2, 3] описаны численные методы расчета электромагнитного поля линейных однофазных индукторов с учетом реальной формы магнитопроводов и катушек. Наряду с численными методами развиваются аналитические методы [4, 5], позволяющие установить функциональные связи между конструктивными и режимными параметрами индукционных систем и достаточно быстро получить обоснованные оценочные результаты. Однако разработанные методы расчета не устанавливают взаимосвязи между величиной электромагнитного поля и напряжением питания, что является удобным способом определения необходимого уровня поля, в частности, при обслуживании оборудования в лабораториях биологических или медицинских исследовательских центров.

Рассмотрим аналитический метод расчета электромагнитного поля в линейных однофазных индукторах поперечного магнитного поля с учетом дискретного распределения обмотки, ее лобовых частей и конечной ширины магнитопровода в режиме электропитания от источника напряжения.

В состав рассматриваемых индукторов входит два ферромагнитных сердечника с пазами для размещения катушек [4, 6]. Ферромагнитные сердечники размещаются один напротив другого, а включение катушек осуществляется так, чтобы магнитный поток, создаваемый токами в катушках, был согласованным по направлению. Каждая пара противоположных катушек образует один полюс. Число полюсов в индукторе выбирается четным. В этом случае возбуждаемое магнитное поле замыкается в пределах магнитопровода и исключается возможность возникновения пульсирующего магнитного поля, которое замыкается через всю активную поверхность сердечника, конструктивные элементы, боковые грани и ярмо магнитопроводов.

Последнее явление связывают с продольным краевым эффектом линейных индукционных машин. Однофазное исполнение индукторов с парным числом полюсов исключает появление продольного краевого эффекта. Но распределение магнитного поля в таком линейном индукторе определяется и конечной шириной магнитопровода. При этом катушки выступают за пределы сердечника по ширине. Ограниченная ширина сердечников обуславливает поперечный краевой эффект, следствием которого является неопределенность распределения магнитного поля в зоне лобовых частей катушек.

Результаты экспериментальных исследований по измерению магнитного поля за пределами ферромагнитного сердечника [7, 8] позволяют сделать вывод о том, что за пределами сердечника на расстоянии величины немагнитного зазора поле затухает практически до нуля. Поэтому далее будем рассматривать электромагнитное поле линейного однофаз-



Расчетная модель индуктора:  $a$  — вид на плоскости  $xOz$ ;  $b$  — вид на плоскости  $yOz$ ; 1 — ферромагнитный сердечник; 2 — ток; 3 — токовый слой обмотки

ного индуктора в ограниченной по ширине области  $-a/2 \leq y \leq a/2$ , где  $a = b + 2d$ .

Обмотку индуктора представим в виде токовых слоев, размещенных на внутренних поверхностях идеально гладких магнитопроводов (см. рисунок). Их ширина выбрана равной реальной ширине пазов  $b_n$ . Условно сердечник расширяется в обе стороны на величину немагнитного зазора и электрофизические свойства расширенных участков совпадают со свойствами сердечника. На поверхности этих участков в виде поверхностного токового слоя шириной  $b_n$  распределяются лобовые части обмотки. Обмотки верхнего и нижнего сердечников включены согласованно. Ток в обмотках считается заданным и изменяется по гармоническому закону.

Поскольку напряженность магнитного поля в идеальном магнитопроводе индуктора равна нулю, нет необходимости рассматривать в нем распределение магнитного поля. В немагнитном зазоре распределение индукции магнитного поля описывается уравнением Лапласа

$$\Delta \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{V}$  — вектор индукции магнитного поля.

По длине рассматриваемая область может иметь неограниченные размеры, а в качестве граничных условий могут быть выбраны условия периодичности

$$B_{x,y,z}(x, y, z) = B_{x,y,z}(x + 2s\tau, y, z), \quad (2)$$

где  $s$  — число пар полюсов.

По высоте область ограничивается поверхностями магнитопроводов, на которых соблюдаются обычные условия сопряжения областей с различными электрофизическими свойствами.

На границах области по ширине ( $y = \pm a/2$ ), как указано выше, нормальная составляющая индукции магнитного поля принимается равной

нулю:  $B_z = 0$ . В то же время, составляющая плотности тока  $j_y$  при  $y = \pm a/2$  также равна нулю для любого значения  $z$  (такое предположение вполне очевидно). Тогда из выражения

$$\operatorname{rot}_y H = \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = j_y = 0$$

следует равенство  $\partial H_x / \partial z = 0$  или  $H_x = \text{const}$  для любого значения координаты  $z$  ( $-d/2 \leq z \leq d/2$ ). Но в точке  $(\pm a/2; \pm d/2)$  токовый настил отсутствует и, следовательно, на поверхности условно расширенных магнитопроводов  $H_x = 0$ . Тогда по всей высоте зазора также можно принять  $H_x = 0$  или  $B_x = 0$ . Из уравнения  $\operatorname{div} B = 0$  следует граничное условие для составляющей индукции магнитного поля  $\partial B_y / \partial y = 0$ . Таким образом, уравнение Лапласа решается при таких граничных условиях по ширине индуктора:

$$B_x = 0, B_z = 0, \partial B_y / \partial y = 0. \quad (3)$$

Граничные условия (3) полностью совпадают с граничными условиями, полученными для модели индукторов, чередующихся по оси  $y$  с нечетной симметрией [8].

При решении краевой задачи (1)—(3) можно применить интегральное преобразование Фурье по переменной  $x$  и интегральное преобразование в конечных пределах с ядрами  $2/a \cos(qy)$  для составляющих индукции  $B_x$  и  $B_z$  магнитного поля и с ядрами  $2/a \sin(qy)$  для составляющей индукции  $B_y$  магнитного поля по переменной  $y$  [9]. После преобразования уравнение для комплексной амплитуды индукции магнитного поля в немагнитном промежутке принимает вид

$$\frac{d^2 \hat{B}_z}{dz^2} - \eta^2 \hat{B}_z = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\eta^2 = n^2 + q^2$ ;  $q = (2k-1)\pi/a$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ ;  $n$  — параметр преобразования Фурье;

$$\hat{B}_{z,x} = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} B_{z,x} \cos(qy) e^{inx} dx dy,$$

$$\hat{B}_y = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} B_y \sin(qy) e^{inx} dx dy,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ . Обратное преобразование описывается формулами

$$B_{z,x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}_{z,x} \cos(qy) e^{-inx} dn,$$

$$B_y = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}_y \sin(qy) e^{-inx} dn. \quad (5)$$

Решение уравнения (4) известно [10]:

$$\hat{B}_z = C_1 ch(\eta z) + C_2 sh(\eta z) / \eta, \quad (6)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования.

Для моделей индукторов, чередующихся с нечетной симметрией, преобразованные значения  $\hat{B}_x, \hat{B}_y$  могут быть определены по формулам [11]

$$\hat{B}_x = -\frac{in}{\eta^2} \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z}, \quad \hat{B}_y = -\frac{q}{\eta^2} \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z}.$$

Поэтому нет потребности в решении дифференциальных уравнений относительно каждой составляющей индукции магнитного поля, и задача определения магнитного поля сводится к нахождению постоянных интегрирования (6).

Если начало координат расположено на оси симметрии двустороннего индуктора при условии симметрии  $\left. \frac{dB_z}{dz} \right|_{z=0} = 0$ , то необходимо выполнение равенства  $C_2 = 0$ . На границе раздела воздуха и ферромагнитного сердечника выполняются такие условия:

$$H_x^+ - H_x^- = i_y, \quad H_y^+ - H_y^- = -i_x, \quad (7)$$

где  $H_x^+, H_x^-$  и  $H_y^+, H_y^-$  —  $x$ - и  $y$ -компоненты напряженности магнитного поля с внутренней и внешней стороны границы раздела воздуха и ферромагнитных сердечников. При бесконечно большой магнитной проницаемости ферромагнитных сердечников условия (7) имеют вид

$$H_x^+ = i_y, \quad H_y^+ = -i_x. \quad (8)$$

В соотношениях (7) и (8)  $i_x, i_y$  — составляющие токовой нагрузки индуктора, определенные для верхнего или нижнего индуктора, считаются заданными.

Из уравнения  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  и уравнений (8) находим граничное условие

$$\left. \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z} \right|_{z=\pm d/2} = \mu_0 \left( \frac{\partial i_y}{\partial x} - \frac{\partial i_x}{\partial y} \right),$$

откуда вычисляем

$$C_1 = \frac{\mu_0}{\eta sh(\eta d/2)} \left( \frac{\partial \hat{i}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{i}_x}{\partial y} \right).$$

Таким образом, для того чтобы найти распределение магнитного поля в немагнитном промежутке  $2p$ -полюсного индуктора, достаточно найти интегральное преобразование нормальной производной индукции магнитного поля на поверхности по заданной токовой нагрузке. Токовую нагрузку однофазного индуктора с  $p$  парами полюсов зададим в виде

$$\begin{aligned}
 i_y = & \frac{I_m w}{b_{\Pi}} \sum_{s=1}^p \{ [\Theta(x+s\tau-t_w) - \Theta(x+s\tau-t_w-b_{\Pi})] - \\
 & - [\Theta(x+s\tau-t_w-b_{\Pi}-t_z) - \Theta(x+s\tau-t_w-2b_{\Pi}-t_z)] - \\
 & - [\Theta(x+s\tau-t_w-\tau) - \Theta(x+s\tau-t_w-\tau-b_{\Pi})] + \\
 & + [\Theta(x+s\tau-t_w-\tau-b_{\Pi}-t_z) - \Theta(x+s\tau-t_w-\tau-t_z-2b_{\Pi})] \} \times \\
 & \times \left\{ \frac{y+b/2+b_{\Pi}}{b_{\Pi}} \left[ \Theta\left(y+\frac{b}{2}+b_{\Pi}\right) - \Theta\left(y+\frac{b}{2}\right) \right] + \Theta\left(y+\frac{b}{2}\right) - \Theta\left(y-\frac{b}{2}\right) - \right. \\
 & \left. - \frac{y-b/2-b_{\Pi}}{b_{\Pi}} \left[ \Theta\left(y-\frac{b}{2}\right) - \Theta\left(y-\frac{b}{2}-b_{\Pi}\right) \right] \right\} e^{i\omega t}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

где  $I_m$  — амплитудное значение тока;  $w$  — число элементарных проводников в пазу;  $b_{\Pi}$  — ширина паза;  $\Theta(\cdot)$  — единичная обобщенная функция, равная единице при значениях аргумента больше нуля и равная нулю при значениях аргумента меньше нуля;  $s$  — сечение проводника;  $t_w = \frac{\tau-t_z-2b_{\Pi}}{2}$  (если в

пазу две катушки обмотки  $t_w=0$ );  $\tau$  — полюсный шаг;  $t_z$  — шаг зубцов;  $b_{\Pi}$  — ширина лобовой части;  $b$  — ширина сердечника.

В соответствии с (9) в пределах ширины сердечника составляющая тока  $i_y$  для заданных значений переменной  $x$  является постоянной величиной. За пределами сердечника значение  $i_y$  уменьшается по линейному закону до нуля на промежутке  $b_{\Pi}$ .

Составляющая токовой нагрузки индукторов  $i_x$  вычисляется по формуле

$$i_x = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{-\infty}^x i_y dx \right), \quad (10)$$

что следует из закона непрерывности тока  $\operatorname{div} i=0$ . После выполнения интегральных преобразований находим постоянную интегрирования:

$$C_1 = \frac{\eta I_m w}{in \operatorname{sh}(\eta d/2)} k_w, \quad (11)$$

где  $k_w$  — обмоточный коэффициент,

$$k_w = 64 \sin\left(\frac{n\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{n(t_z + b_{II})}{2}\right) \times \\ \times \frac{\sin(nb_{II}/2) \sin(n\pi\tau) \sin(q(b+b_{II})/2) \sin(qb_{II}/2)}{nb_{II} \sin(n\tau) qa qb_{II}}.$$

Подставляя в (6) значение постоянной интегрирования (11), получаем распределение  $z$  составляющей индукции магнитного поля в немагнитном зазоре однофазного индуктора:

$$\hat{B}_z = \frac{\mu_0 \eta I_m w k_w}{in \operatorname{sh}(\eta d/2)} \operatorname{ch}(\eta z).$$

Для нахождения оригинала индукции магнитного поля выполним обратные преобразования:

$$B_z = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 \eta I_m w k_w \operatorname{ch}(\eta z)}{in \operatorname{sh}(\eta d/2)} e^{-inx} dn \right] \cos(qy) \right\}. \quad (12)$$

Таким образом, определение индукции магнитного поля в немагнитном промежутке сводится к численному вычислению интеграла (12). Но в (12) входит значение  $I_m$ , которое остается неопределенным для электромагнитного устройства, питаемого от источника напряжения. Найти амплитуду тока в обмотке можно, воспользовавшись определением полной электромагнитной мощности индуктора:

$$S_z = \frac{1}{2} I_m I_m^* z_m, \quad (13)$$

где \* — знак сопряжения комплексной величины;  $z_m$  — вносимое комплексное сопротивление последовательной схеме замещения индуктора. Полную электромагнитную мощность можно определить как поток вектора Умова—Пойнтинга через поверхности ферромагнитных сердечников [7]:

$$S_z = \pm \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} (E_x \dot{H}_y^* - E_y \dot{H}_x^*) dx dy,$$

где  $E_x, E_y$  и  $H_x, H_y$  — комплексные амплитуды соответствующих составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей на поверхности ферромагнитных сердечников. Знак плюс принимается при интегрировании по поверхности нижнего сердечника, знак минус — при интегрировании по поверхности верхнего сердечника. Поскольку верхний

и нижний сердечники идентичны, поток электромагнитной мощности может быть определен так:

$$S_z = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dx dy.$$

На поверхности сердечников выполняются условия (8), поэтому с учетом (10) поток полной электромагнитной мощности определяем так:

$$S_z = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_x \left( \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^x i_y^* dx \right) - E_y i_y^* \right\} dx dy. \quad (14)$$

Осуществляя интегрирование (14) по частям (первая составляющая интегрируется по  $x$ , а вторая — по  $y$ ), в классе ограниченных на бесконечности функций получаем

$$S_z = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \int_{-\infty}^x i_y^* dx \right) \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \right\} dx dy. \quad (15)$$

Далее, с учетом  $\text{rot } \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  и гармонического закона изменения компонентов электромагнитного поля во времени уравнение (15) после повторного интегрирования по частям по переменной  $x$  принимает вид

$$S_z = -i\omega \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i_y^* \int_{-\infty}^x B_z dx \right\} dx dy. \quad (16)$$

Значение компоненты магнитной индукции  $B_z$  на поверхности ферромагнитных сердечников в (16) является результатом обратного преобразования (5) преобразованного значения индукции. Подставляя в (16) значение  $B_z$  в соответствии с (5) и используя интегрирование по пространственной переменной  $x$  экспоненциальной функции, которая содержится в (5), освобождаемся от интеграла в фигурных скобках и приходим к следующему выражению для вычисления потока электромагнитной мощности:

$$S_z = \frac{\omega a}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \hat{B}_z \left( \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} i_y^* e^{-inx} \cos(qy) dx dy \right) dn. \quad (17)$$

Выражение в скобках в (17) является двумерным интегральным преобразованием комплексно сопряженной величины токовой нагрузки (9).



Выполняя интегральные преобразования токовой нагрузки и возвращаясь к выражению (17), окончательно находим поток электромагнитной мощности из ферромагнитных сердечников:

$$S_z = \frac{i\mu_0\omega aw^2}{4\pi} I_m I_m^* \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{n^2} k_w^2 dn. \quad (18)$$

Сравнивая (18) и (13), находим вносимое комплексное сопротивление последовательной схемы замещения индуктора:

$$z_m = \frac{i\mu_0\omega aw^2}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{n^2} k_w^2 dn.$$

Последовательная схема замещения кроме сопротивления  $z_m$  включает комплексное сопротивление обмотки индуктора  $z_1$ , рассчитываемое известными методами [7].

Таким образом, для расчета распределения индукции магнитного поля в немагнитном промежутке однофазного индуктора остается найти амплитудное значение тока в обмотке. При заданном значении напряжения питания и известных сопротивлениях последовательной схемы замещения находим  $\dot{I}_m = \dot{U}_m / (z_1 + z_m)$ .

## Выводы

Предложенный метод расчета позволяет найти распределение индукции магнитного поля и электромагнитную мощность индуктора при заданных значениях конструктивных размеров, числе витков в обмотках и величине напряжения питания. Полученные выражения не содержат операций интегрирования по локальным характеристикам поля и определяются только коэффициентами разложения.

The method of calculation of the electromagnetic field in monophas double-ended inductor with the unrestricted number of pole's pairs and agreed direction of the magnetic field in nonmagnetic interval has been developed. The method of calculation takes into account the finite width of ferromagnetic cores, discrete mode of load distribution of windings and linear distribution of current load in the zone of frontal parts of windings.

1. Солодова Е. В. Стимулирующий эффект низкочастотных электромагнитных полей в биологических системах: Автореф. дис. ... канд. биол. наук. — Алматы, 2009. — 22 с.
2. Fireteanu V., Tudorache T. Electromagnetic Forces in Transverse Flux Induction Heating // IEEE Transactions on Magnetics. — 2000. — Vol. 36, № 4. — P. 1792—1795.
3. Muhlbauer A., Nauvertat G., Nikanorov A. et al Numerical Tools for Optimum Design of Transverse Flux Induction Heating of Non-Ferrous Metal Strips // Proc. the 3rd Intern. Symposium on Electromagnetic Processing of Materials. — Nagoya (Japan). — 2000. — P. 205—210.

4. Battistetti F., Colaone F., Dughiero F. et al A 3D analytical tool for design and optimization of transverse flux induction heating systems // Ibid. —Nagoya (Japan). — 2000. — P.199 — 204.
5. Виштак Т. В., Кондратенко И. П., Ращепкин А. П. Электромагнитное поле и силы в однофазных индукторах поперечного магнитного поля для нагрева лент // Техн. електродинаміка. — 2005. — № 5. — С. 9—4.
6. Виштак П. А., Крутилин В. А., Ращепкин А. П. Определение магнитных полей и энергетических характеристик линейного однофазного индуктора для нагрева тонких металлических лент // Электромеханическое преобразование энергии: Сб. науч. тр. — Киев : Наук. думка, 1986. — С.71—74.
7. Вольдек А. И. Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкокристаллическим рабочим телом. — Л. : Энергия, 1970.—272 с.
8. Охременко Н. М. Основа теории и проектирования линейных индукционных насосов для жидких металлов. — М. : Атомиздат, 1968. — 396 с.
9. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М. : Высшая школа, 1970. — 712 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— 6-е изд. — М. : Наука, 1971. — 703 с.
11. Кондратенко И. П., Ращепкин А. П. Индукционный нагрев движущейся полосы токовыми контурами // Техн. електродинаміка. — 1999. — № 3. — С. 3—9.

Поступила 31.01.11;  
после доработки 17.03.11

*ЖИЛЬЦОВ Андрей Владимирович, д-р техн. наук, зав. кафедры электрических машин и эксплуатации электрооборудования Национального университета биоресурсов и природопользования Украины. В 1997 г. окончил Симферопольский государственный университет им. М. В. Фрунзе (Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского). Область научных исследований — аналитические и численные методы расчета электромагнитных, тепловых и других физических полей и процессов.*

*КОНДРАТЕНКО Игорь Петрович, д-р техн. наук, ст. научн. сотр., зав. отделом Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1978 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теоретические основы электротехники.*

*КРИЩУК Роман Сергеевич, студент Национального университета биоресурсов и природопользования Украины. Область научных исследований — теоретические основы электротехники.*