УДК 519.65

П. С. Малачивский, д-р техн. наук,
Б. Р. Монцибович, канд. физ.-мат. наук
Центр математического моделирования Ин-та прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины
(Украина, 79005, Львов, ул. Дж. Дудаева, 15,
тел. (032) 2611891, E-mail: psmal@cmm.lviv.ua, mon_ua@yahoo.com)

Алгоритмы и программное обеспечение для равномерной аппроксимации экспериментальных данных

Приведены результаты сравнения метода равномерной аппроксимации с другими методами аппроксимации экспериментальных зависимостей. Представлены состояние программного обеспечения для равномерного приближения функций и предъявляемые к нему требования. Описаны функциональные возможности пакета РАДАН, предназначенного для решения задач, сводимых к равномерному приближению функций.

Наведено результати порівняння методу рівномірної апроксимації з іншими методами апроксимації експериментальних залежностей. Подано стан програмного забезпечення для рівномірного наближення функцій та вимоги щодо нього. Описано функціональні можливості пакету РАДАН, призначеного для розв'язування задач, які зводяться до рівномірного наближення функцій.

Ключевые слова: равномерная (чебышевская, минимаксная) аппроксимация, погрешность приближения функции, программное обеспечение.

Равномерное приближение — это приближение, при котором минимизируется наибольшее по модулю отклонение аппроксимирующего выражения от экспериментальных данных. Пусть по известным значениям y_i функции $f(x)$ в точках x_i $(i=\overline{1, N})$ необходимо определить аппроксимирующее выражение $F_m(A;x)=F_m(a_1, a_2, ..., a_m; x)$, которое приближенно воспроизводит значение $f(x)$ в этих точках, $y_i \approx F_m(A;x_i)$, где $F_m(A;x)$ — избранный вид зависимости; a_k $(k=\overline{1, m})$ — неизвестные коэффициенты, $m<N$.

Метод равномерного приближения функций состоит в таком определении неизвестных коэффициентов a_k $(k=\overline{1, m})$ выражения $F_m(A;x)$, при котором наибольшая погрешность приближения на множестве точек x_i $(i=\overline{1, N})$ принимает наименьшее значение из возможных, т.е.

$$\max_{1\le i\le N}\left|y_i - F(A^*;\ x_i)\right| = \min_{\{A\}}\max_{1\le i\le N}\left|y_i - F(A;x_i)\right|.$$

Такое приближение функций называют минимаксным или чебышевским [1, 2]. Минимаксное приближение обеспечивает минимально возможное отклонение приближаемой функции от аппроксиманты. Для сравнения заметим, что в случае среднеквадратического приближения (методе наименьших квадратов) минимизируется сумма квадратов погрешностей отклонения.

Программное обеспечение для определения параметров равномерного приближения. Равномерное приближение, к сожалению, еще не получило надлежащего распространения. Вместе с тем, модели, полученные по чебышевскому критерию, обеспечивают наименьшую погрешность восстановления результатов наблюдения [1]. Однако до сих пор при решении задач, в которых желаемым является достижение наименьшей погрешности восстановления опытных данных, практикуется применение метода интерполяции или среднеквадратического приближения [3, 4]. Например, из многих технических приложений следует, что аппроксимация проводится по среднеквадратическому критерию, а качество приближения оценивается величиной полученной максимальной абсолютной погрешности [5]. Такой подход является недопустимым относительно методологии и теории приближения, что объясняется не целесообразностью применения среднеквадратического критерия, а его доступностью и традицией.

Популярные математические пакеты, такие как Mathematika и MathLab, включают процедуры, реализующие нахождение аппроксимации функции по минимаксному критерию, но для определения параметров такой аппроксимации используются методы математического программирования. Успешное нахождение равномерного приближения функций с использованием этих пакетов в значительной степени зависит от удачного выбора начального приближения.

Математическая система Maple предусматривает определение минимаксного приближения лишь для аналитически заданных функций полиномом и рациональным выражением, хотя потребность в аппроксимации таблично заданных функций достаточно актуальна и методы нахождения такого приближения известны. Однако даже процедуры (minimax и remez), реализованные в пакете Maple, часто по различным причинам не дают результата в случаях, когда минимаксное приближение существует или дают неверные результаты [6, с. 121, 122]. Такая ситуация не только ограничивает инструментальные возможности упомянутых программных средств, но и предопределяет применение среднеквадратического критерия в задачах, решением которых являются минимаксные аппроксимации. Вследствие этого, в частности, происходит ухудшение технических характеристик во время проектирования систем измерения или управления, градуирования статических характеристик сенсоров и др.

Специальное программное обеспечение для минимаксного приближения функций разработано как в Украине, так и за рубежом [7, 8]. Рассмотрим предлагаемый пакет программ РАДАН (равномерная аппроксимация данных).

Назначение и функциональные возможности пакета программ РАДАН. Пакет РАДАН предназначен для решения оптимизационных задач, которые сводятся к равномерному приближению функций. Он обеспечивает нахождение равномерного приближения таблично-заданных функций с наименьшей абсолютной или относительной погрешностью. Пакет разработан в среде Visual Basic и функционирует на любой стандартной конфигурации персонального компьютера с операционной системой Windows-98/2000/XP/… .

Пакет РАДАН поддерживает решение следующих оптимизационных задач:

• определение равномерного приближения указанным выражением на заданном отрезке с наименьшей абсолютной или относительной погрешностью;

• определение равномерного приближения указанным выражением на заданном отрезке с наименьшей абсолютной или относительной погрешностью и восстановлением значения функции в заданной точке или в крайних точках отрезка;

• определение равномерного приближения указанным выражением на заданном отрезке с наименьшей абсолютной или относительной погрешностью и восстановлением значения функции и ее производной в заданной точке или в крайних точках отрезка;

• построение разрывного, непрерывного, или непрерывного и гладкого минимаксного сплайн-приближения, обеспечивающего заданную погрешность при минимальном числе звеньев.

Набор реализованных в пакете аппроксимирующих выражений содержит более двадцати видов функциональных зависимостей, в частности: алгебраические, рациональные и тригонометрические многочлены; логарифмические, экспоненциальные, степенные и другие нелинейные выражения (см. табл.). Тип аппроксимационной погрешности определяется наличием в таблице символов Δ и ρ. Наличие символа Δ означает, что данным выражением в пакете осуществляется равномерное приближение с наименьшей абсолютной погрешностью, а наличие символа ρ — с относительной погрешностью; в скобках указан частный случай, для которого реализовано приближение с относительной погрешностью.

В пакете реализовано построение минимаксного сплайн-приближения

$$S(x)=F_m(a^{(j)};x),\ t_j \le x \le t_{j+1},\ \ j=\overline{1,q},\ \ t_1=x_1,\ \ t_{q+1}=x_N, \qquad (1)$$

Номер п.п.	Аппроксимационное выражение	Тип погрешности
1	$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i;\ \sum_{i=-m}^{m} a_i x^i,\ x>0;\ a_0+\sum_{i=0}^{m}(a_i \cos(ix)+b_i \sin(ix))$	Δ, ρ
2	$\sum_{i=-l}^{m} a_i x^i + \sum_{j=l_1}^{m_1} b_i (\ln(x))^j,\ x>0$	Δ, ρ
3	$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i + Ae^{qx};\ \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + A\ln(x+q),\ x>-q;\ \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)^q,$ где q — заданная действительная константа	Δ, ρ
4	$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \Big/ \left(x^l + \sum_{i=0}^{l-1} b_i x^i\right)$	Δ, ρ
5	$Ax^{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i} e^{\sum_{j=1}^{n} b_j x^j},\ x>0;\ Ax^{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i},\ x>0;\ Ae^{\sum_{i=1}^{m} a_i x^i}$	ρ
6	$\ln\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)$	Δ
7	$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i + Ae^{px},\ p\neq 0;\ \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + Ae^{p},\quad ,\quad p\neq k\ (k=\overline{0,m})$	Δ, ρ $(m=0,1)$
8	$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i + A\ln(x+p),\ p>-x;\ \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + Axe^{px},\ p\neq 0$ при $n>0$	Δ, ρ $(m=0,1)$
9	$a_0 + Ax^{px},\ x>0;\ a_0+a_1x+Ax^{px},\ x>0$	Δ
10	$a_0 + Ax^r e^{px}$, где r — заданная действительная константа	Δ
11	$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i + A(x+q)^p,\ q\geq -x,\ p\neq k;\ (k=\overline{0,m})$	Δ
12	$A(x+q)^p,\ q\geq -x$	Δ,ρ
13	$a_0 + A\,erfc(x/d),\ x>0;\ a_0+a_1x+A\,erfc(x/d),\ x>0$	Δ
14	$a_0 + a_1 erfc(x/d_2) + a_2 erfc(x/d_2),\ d_1\neq d_2\ \ x>0$	Δ
15	$a_0 + a_1 e^{qx} + a_2 e^{px},\ q\neq p;\ a_0+a_1x^q+a_2x^p,\ x\geq 0\ \ q\neq p$	Δ

в котором каждое из выражений $F_m(a^{(j)};\, x)$, $j=\overline{1,q}$, является чебышевским приближением функции $f(x)$ на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ с погрешностью G_j. В этом сплайне отрезок $[t_j, t_{j+1}]$ — j-е звено сплайна, а q — число его звеньев.

Сплайн $S(x)$ будем называть сплайн-приближением функции $f(x)$ на множестве точек x_i $(i=\overline{1,N})$ с погрешностью G_0, если значения погрешности приближения на всех звеньях сплайна меньше G_0,

$$G_j < G_0, \quad j=\overline{1,\, q}\,, \tag{2}$$

и число звеньев при этом — наименьшее из возможных.

Построение разрывного сплайн-приближения с заданной погрешностью G_0 заключается в получении сплайн-приближения (1), (2), в котором на границах звеньев t_j $(j=\overline{2,q})$ допускается отличие значений сплайна от функции $f(x)$, не превышающее G_0.

В непрерывном сплайне каждое из звеньев определяем как чебышевское приближение с погрешностью, не превышающей G_0, которое в точках стыка звеньев t_j $(j=\overline{2,q})$ обеспечивает выполнение соотношения

$$F_m(a^{(j-1)};\, t_j) = F_m(a^{(j)};\, t_j) = f\,(t_j)\,. \tag{3}$$

При построении непрерывного и гладкого минимаксного сплайна [9] в точках стыка звеньев t_j $(j=\overline{2,q})$ кроме условий (3) обеспечивается также восстановление значений производной функции

$$F'_m(a^{(j-1)};\, t_j) = F'_m(a^{(j)};\, t_j) = f'(t_j)\,.$$

Следовательно, построение минимаксного сплайн-приближения на каждом из звеньев выполняется по минимаксному критерию с определенными интерполяционными условиями в точках стыка звеньев. При этом длины всех звеньев сплайна, кроме последнего, выбирают максимально возможными для заданной погрешности сплайн-приближения. Если во время построения сплайн-приближения с заданной погрешностью на одном из текущих звеньев минимально допустимой длины получается погрешность, большая заданной, то используется интерполяция функции соответствующим выражением.

Необходимой информацией для работы программы являются таблично-заданные значения аргумента, функции, степень многочлена-аппроксиманты (при его наличии) и значение желаемой погрешности сплайн-приближения (абсолютной или относительной). Ввод входных данных поддерживается соответствующим окном задания данных. Значения приближаемой функции и аргумента могут быть введены клавиатурой или считаны из текстового файла. Для построения непрерывного и гладкого

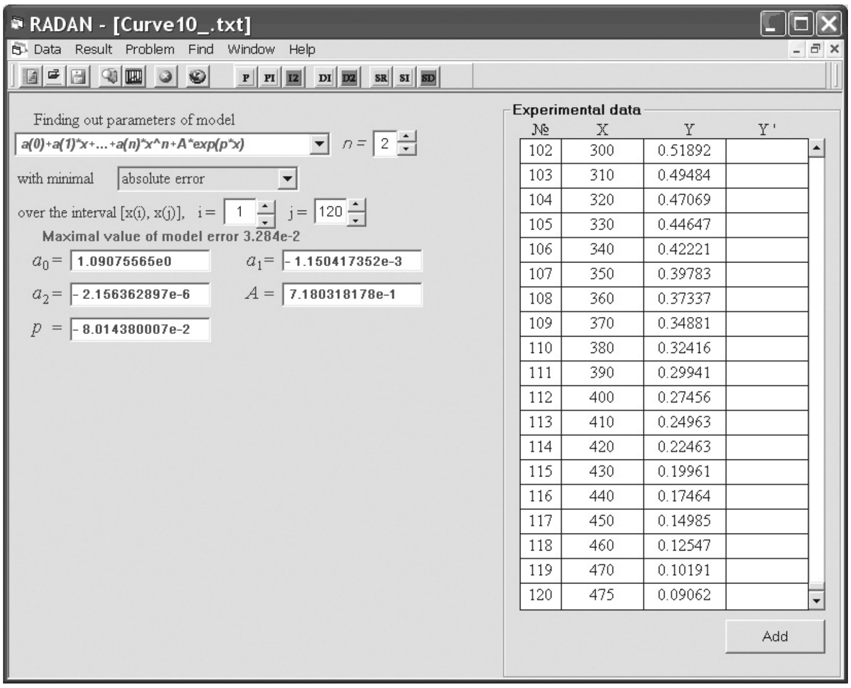

Рис. 1. Вид рабочего окна при определении приближения заданным выражением

минимаксного сплайн-приближения значения производной приближаемой функции также могут считываться из текстового файла, однако задание значений производной функции не обязательно. Если значения производной функции не заданы, то они автоматически вычисляются по разностным формулам.

Пакет программ РАДАН поддерживает многозадачный режим функционирования, т.е. предусматривает возможность одновременно в отдельных окнах решать различные задачи, что обеспечивает определенные удобства во время сравнения полученных результатов и выбора наиболее подходящего.

В случае равномерного приближения заданным выражением в результате работы программы определяются параметры приближения и погрешность аппроксимации. На рис. 1 изображен возможный вид рабочего окна во время определения равномерного приближения выражением

$$E_2(a;x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + Ae^{px} \tag{4}$$

с наименьшей абсолютной погрешностью температурной характеристики термодиодного сенсора, которая задана 120-ю значениями.

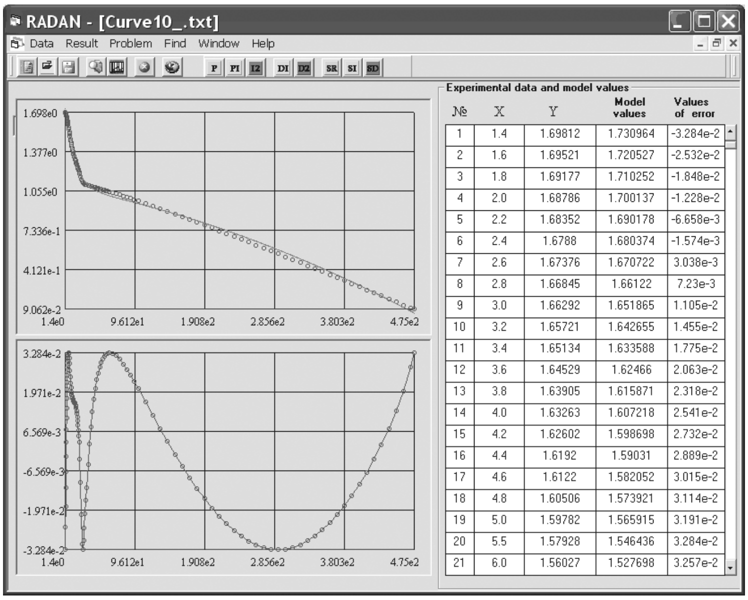

Рис. 2. Вид рабочего окна с подробными результатами и графиками

В результате решения этой задачи кроме значений параметров выражения и погрешности аппроксимации предусмотрена возможность отображения значений модели в точках наблюдения и соответствующих погрешностей восстановления результатов наблюдений в каждой из этих точек. Эти результаты представлены на рис. 2, на котором изображены также график найденной аппроксимации выражением (4) с отображением исходных экспериментальных данных и график погрешности.

В случае минимаксного сплайн-приближения в результате работы программы определяем разрывный, непрерывный или непрерывный и гладкий сплайн, который обеспечивает заданную погрешность приближения с наименьшим возможным числом звеньев. Для каждого из звеньев на экран выводятся порядковый номер и границы звена, значения коэффициентов приближающего выражения и значение погрешности приближения на данном звене с соответствующими интерполяционными условиями на границах звена.

На рис. 3 изображен вид рабочего окна при построении непрерывного и гладкого минимаксного сплайн-приближения полиномом шестой степени температурной характеристики термодиодного сенсора типа DT-670 [10] с наименьшей относительной погрешностью, не превышающей 0,01 %. Предусмотрена также возможность детального ознакомления с результатами построения сплайн-приближения. Пользователь может просмотреть таблицу, в которой для каждой точки заданной функции приведены ее точное

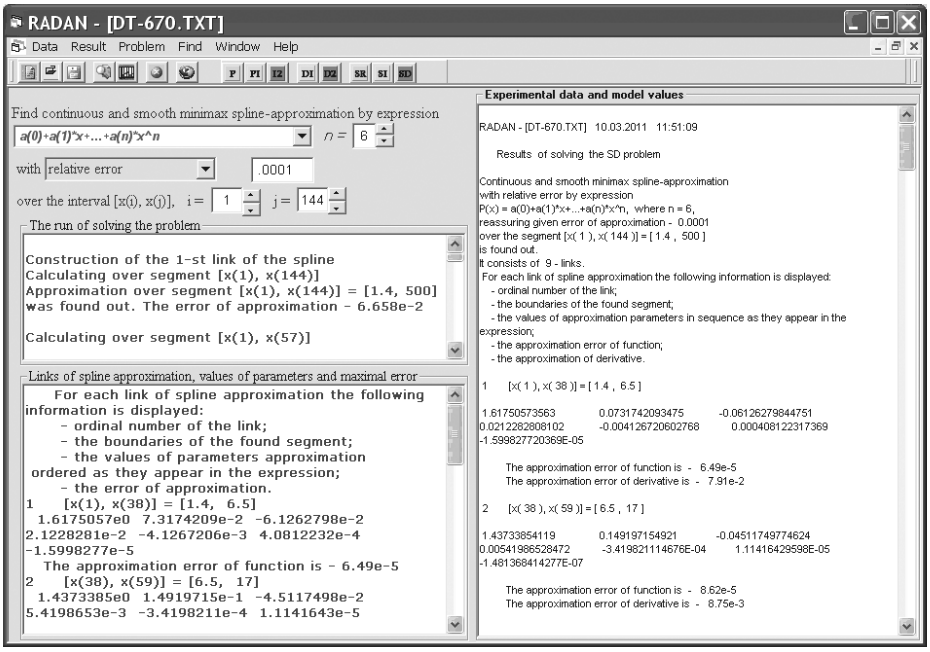

Рис. 3. Вид рабочего окна во время построения непрерывного и гладкого сплайна

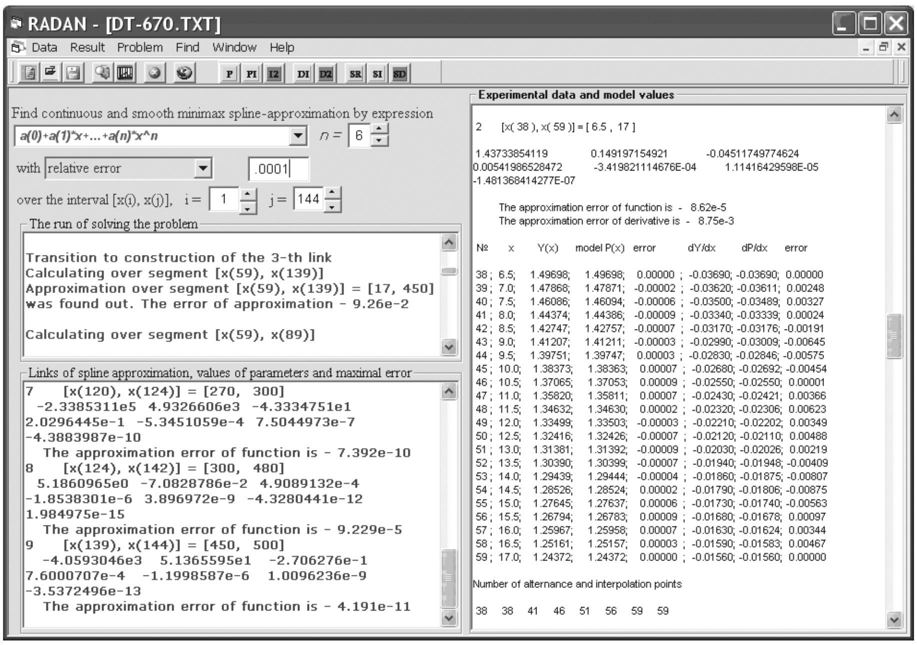

Рис. 4. Вид рабочего окна во время построения сплайна с подробными результатами

и приближенное значения, вычисленные по сплайну, а также погрешность приближения. В случае построения непрерывного и гладкого минимаксного сплайн-приближения предусмотрен вывод значения производной функции, значения производной сплайна и погрешности восстановления производной функции.

Для проверки характеристического свойства равномерной аппроксимации на отдельном звене сплайна выводятся номера точек альтернанса и интерполирования значений функции. В точках альтернанса отклонения модели от значений функции принимают одинаковые по модулю значения, но их знак в этих точках поочередно меняется. Проверив выполнение этого свойства, пользователь может убедиться в правильности вычисления равномерного приближения на каждом звене.

Результаты решения задачи отображаются в рабочем окне программы и, по желанию пользователя, могут быть сохранены в указанном файле. Предусмотрен вывод графика определенного приближения функции и погрешности этой аппроксимации, а также графика производной функции и ее приближения в случае непрерывного и гладкого сплайна.

Во время построения сплайн-приближения предусмотрена возможность отслеживания процесса его построения. В отдельном поле рабочего окна программы The run of solving the problem (Ход решения задачи) (см. рис. 3 и 4) выводится информация о поиске оптимальной длины звена и полученные при этом значения погрешности приближения.

Выводы

Пакет программ РАДАН ориентирован на решение оптимизационных задач, которые сводятся к равномерному приближению функций. Он предусматривает возможность определения равномерного приближения разными зависимостями (больше двадцати), поддерживает нахождение приближения заданным выражением на отдельном отрезке и построение минимаксного сплайн-приближения. Пакет РАДАН отвечает требованиям современного программного обеспечения, удобен и понятен в использовании, ориентирован на специалистов в различных областях науки и техники, имеет два варианта использования: на украинском и английском языках.

A short description of minimax approximation method in comparison with other methods applied for approximation of experimental data is given. The brief up-to-date state of research concerning the software realizing algorithms for computing minimax approximations, and requirements imposed upon such software are presented. The functional potentialities of package RADAN as intended for practical realization of software problems reduced to uniform approximation of functions are described.

1. *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. — Киев: Наук. думка, 1989. — 272 с.
2. *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения: Пер. с немец.— М.: Наука, 1978. — 272 с.
3. *Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В.* Среднеквадратичная _аппроксимация сплайнами// Матем. моделирование. — 1997. — **9**, № 9. — С. 107—116.
4. *Грановский В. А., Сирая Т. Н.* Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. — Ленинград: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. — 288 с.
5. *Теплофизические* свойства технически важных газов при высоких температурах и давлениях : Справочник / Зубарев В. Н., Козлов А. Д., Кузнецов В. М. и др. — М. : Энергоатомиздат, 1989. — 232 с.
6. *Попов Б. О.* Розв'язування задач у системі комп'ютерної алгебри Maple V. — Київ: ViP, 2001. — 312 с.
7. *Каленчук-Порханова А. А., Вакал Л. П.* Пакет программ аппроксимации функций // Комп'ют. засоби, мережі та системи. — 2008. — № 7. — С. 32— 38.
8. *Вопросы* теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач / Под ред. В. Ф. Демьянова, В. Н. Малоземова. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. — 192 с.
9. *Малачівський П., Пізюр Я., Андруник В.* Неперервне й гладке рівномірне сплайн-наближення температурної характеристики сенсора та його чутливості // Вимірювальна техніка та метрологія. — 2007. — № 67. — С. 24—30.
10. www.lakeshore.com/.../Curve10.

Поступила 25.02.11

МАЛАЧИВСКИЙ Петр Стефанович, д-р техн. наук, вед. науч. сотр. Центра математического моделирования Ин-та прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины. В 1976 г. окончил Львовский политехнический ин-т. Область научных исследований — численные методы и программное обеспечение.

МОНЦИБОВИЧ Борис Романович, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Центра математического моделирования Ин-та прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины. В 1965 г. окончил Львовский госуниверситет. Область научных исследований — численные методы и программное обеспечение.