УДК 681.5.015: 519.63

Ю. А. Клевцов, канд. техн. наук
(Украина, 03150, Киев, ул. Тельмана, 4, кв.12,
тел. (044) 5290566, E-mail: Rmb@voliacabel.com, kk123@ukr.net)

Моделирование объекта с распределенными параметрами, заданного на непрямоугольной области

(Статью представила канд. техн. наук Э. П. Семагина)

Спектральная теория нестационарных систем управления распространена на объекты, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных. Рассмотрены правила, устанавливающие соответствие между операциями в пространственно-временной и спектральной форме. Приведен пример моделирования объекта с распределенными параметрами.

Спектральну теорію нестаціонарних систем керування розповсюджено на об'єкти, що описуються диференціальними рівняннями у часткових похідних. Розглянуто правила, які встановлюють відповідність між операціями у просторово-часовій та спектральній формі. Наведено приклад моделювання об'єкта з розподіленими параметрами.

Ключевые слова: многомерные спектральные характеристики, объекты с распределенными параметрами, прямое произведение матриц, передаточная функция.

В работах [1—6] спектральная теория нестационарных систем управления [7] распространена на объекты, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных.

Теория позволяет решать задачи моделирования и параметрической идентификации объектов с распределенными параметрами (ОРП), заданных на прямоугольных областях. Однако многие объекты, имеющие пространственное протяжение, задаются не только в прямоугольных границах. В работе [6] описаны результаты распространения спектральной теории нестационарных систем управления на ОРП, заданные на непрямоугольной области. При этом использованы системы базисных функций, ортонормированных по площади. Такой подход усложняет вычисление спектральных характеристик операторов дифференцирования функции нескольких аргументов.

Рассмотрим возможность использования ранее разработанного математического и программного обеспечения спектральной теории нестационарных систем управления для описания ОРП, заданных на более сложных областях. Суть метода заключается в том, что при помощи преобразования пространственных переменных непрямоугольная область преобразуется в прямоугольную. Исходное уравнение объекта записывается с новыми переменными, после чего возможно применение спектральной теории.

Пусть некоторый объект описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial q}{\partial t} = b^2\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\right) + f, \tag{1}$$

где $q = q\,(x, y, t)$; $f = f\,(x, y, t)$; $t > 0$; $b > 0$; все функции удовлетворяют необходимым условиям гладкости; функция $q\,(x, y, t)$ дважды дифференцируема; x, y — пространственные переменные, заданные на треугольной области

$$G = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq \alpha\},\ \alpha > 0. \tag{2}$$

Решение должно удовлетворять начальному

$$q\ (x, y, 0) = 0 \tag{3}$$

и граничному

$$q\,(x, y, t)\big|_\Gamma = 0 \tag{4}$$

условиям. Введением новых переменных u, v, определяемых формулами

$$u = x + y,\ \ v = \frac{\alpha y}{x + y}, \tag{5}$$

треугольная область G переводится в прямоугольную:

$$D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \alpha,\ 0 \leq v \leq \alpha\}. \tag{6}$$

Из (5) находим

$$x = \frac{u\,(\alpha - v)}{\alpha},\quad y = \frac{uv}{\alpha}. \tag{7}$$

С учетом преобразования (7) уравнение (1) запишем с новыми переменными. Для этого частные производные $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}$ выразим через новые переменные u и v. По правилу дифференцирования сложной функции двух аргументов получим

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial q}{\partial v},\quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\alpha - v}{u}\frac{\partial q}{\partial v}.$$

Применив к производным $\frac{\partial q}{\partial x}$ и $\frac{\partial q}{\partial y}$ правило дифференцирования сложной функции, получим выражения для вторых производных

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + \frac{v^2}{u^2}\frac{\partial^2 q}{\partial v^2} - 2\frac{v}{u}\frac{\partial^2 q}{\partial u \partial v} + 2\frac{v}{u^2}\frac{\partial q}{\partial v}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + \frac{(\alpha - v)^2}{u^2}\frac{\partial^2 q}{\partial v^2} + 2\frac{\alpha - v}{u}\frac{\partial^2 q}{\partial u \partial v} - 2\frac{\alpha - v}{u^2}\frac{\partial q}{\partial v}. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в уравнение (1) и приводя подобные члены, получаем исходное уравнение в новых переменных:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 2b^2\left[\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + \frac{v^2 - \alpha v + 0{,}5\alpha^2}{u^2}\frac{\partial^2 q}{\partial v^2} + \frac{\alpha - 2v}{u}\frac{\partial^2 q}{\partial u \partial v} + \frac{2v - \alpha}{u^2}\frac{\partial q}{\partial v}\right] + f. \tag{10}$$

Следует заметить, что уравнение (10) с переменными u и v более сложное, чем уравнение (1), коэффициенты уравнения (10) стали зависеть от пространственных переменных.

Для того чтобы трансформировать уравнение (10) в спектральную область, необходимо воспользоваться правилами, устанавливающими соответствие между операциями в пространственно-временной и спектральной областях, а также рассмотреть многомерные спектральные характеристики (МСХ) функций нескольких аргументов.

Пусть имеется система многомерных ортонормированных, в общем случае комплексных, функций $\{\phi_{ijk}(u, v, t)\}$ в пространстве L_2, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\alpha}\int_0^{\alpha}\int_0^{T} \phi^*_{ijk}(u, v, t)\,\phi_{lmn}(u, v, t)\, du dv dt =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq l \text{ или } j \neq m \text{ или } k \neq n, \\ 1, \text{ если } i = l \text{ и } j = m \text{ и } k = n. \end{cases}$$

Аргументы u и v заданы на области (6), а временной аргумент t изменяется в пределах $0 \leq t \leq T$, где T — некоторое конечное значение времени.

Система многомерных (трехмерных) базисных функций $\{\phi\}$ может быть представлена в виде произведения систем одномерных базисных функций $\{\phi_{ijk}(u, v, t)\} = \varphi_i(u)\psi_j(v)\theta_k(t)$, где $\{\varphi_i(u)\}, \{\psi_j(v)\}, \{\theta_k(t)\}$ — системы одномерных ортонормированных на отрезках $[0, \alpha]$, $[0, \alpha]$, $[0, T]$ функций. Эти функции могут быть однотипными.

Многомерные спектральные характеристики. В спектральной области функции нескольких аргументов представляются как МСХ. Например, если $q(x, y, t)$ — функция трех аргументов — пространственных, u и v $(0 \le u \le \alpha, 0 \le v \le \alpha)$, и временного, $t\,(0 \le t \le T)$, — интегрируема с квадратом

$$\int_0^\alpha \int_0^\alpha \int_0^T [q(u, v, t)]^2\, dudvdt < \infty,$$

то МСХ определяется по формуле

$$Q_{ijk} = \int_0^\alpha \int_0^\alpha \int_0^T q(u, v, t)\, \varphi_i(u)\, \psi_j(v)\, \theta_k(t)\, dudvdt. \tag{11}$$

Обратное преобразование осуществляется по формуле

$$q(u, v, t) = \sum_i \sum_j \sum_k Q_{ijk}\; \varphi_i(u)\, \psi_j(v)\, \theta_k(t). \tag{12}$$

Оператор определения МСХ (11) обозначим $S^3[q(u, v, t)]$, а обратный оператор (12) — $S^{-3}[Q_{ijk}]$.

Дифференцирование функции $q(u, v, t)$ по временному аргументу с нулевыми начальными условиями в спектральной области выполняем по формуле

$$S^3\left[\frac{\partial q(u, v, t)}{\partial t}\right] = (E \otimes E \otimes P)\, Q, \tag{13}$$

где E — единичная матрица; $\otimes$ — символ кронекерова или прямого произведения матриц; P — матрица спектральной характеристики оператора дифференцирования [7].

Вторую производную функции $q(u, v, t)$ по аргументу u с учетом нулевых краевых условий первого рода в спектральной области находим по формуле

$$S^3\left[\frac{\partial^2 q(u, v, t)}{\partial u^2}\right] = (\mathbf{P} R \otimes E \otimes E)\, Q, \tag{14}$$

где $\mathbf{P}$ — матрица спектральной характеристики оператора дифференцирования, не учитывающего граничных условий [7]; R — матрица спектральной характеристики оператора дифференцирования, учитывающего условия на левой и правой границах [5].

Смешанную производную функции $q(u, v, t)$ с учетом нулевых краевых условий первого рода в спектральной области находим по формуле

$$S^3\left[\frac{\partial^2 q(u, v, t)}{\partial u \partial v}\right] = (R \otimes R \otimes E)\, Q. \tag{15}$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2011. V. 33. № 1

Первую и вторую производные функции $q(u, v, t)$ по аргументу v с учетом нулевых краевых условий первого рода в спектральной области находим по формулам

$$S^3\left[\frac{\partial q(u,v,t)}{\partial v}\right]=(E\otimes R\otimes E)\,Q, \tag{16}$$

$$S^3\left[\frac{\partial^2 q(u,v,t)}{\partial v^2}\right]=(E\otimes \mathbf{P}R\otimes E)\,G. \tag{17}$$

Умножение функций нескольких аргументов. Коэффициенты уравнения (10) являются функциями пространственных аргументов. Поэтому рассмотрим правило, позволяющее вычислять произведение функций нескольких аргументов в спектральной области на наиболее общем примере. Если требуется найти спектральную характеристику произведения функции $f(u,v)\,q(u,v,t)$, а функция имеет вид $f(u,v)=a(u)\,b(v)$, то необходимо воспользоваться правилом

$$S^3[a(u)\,b(v)\,q(u,v,t)]=(A\otimes B\otimes E)\,Q, \tag{18}$$

где A и B — матрицы спектральных характеристик множителей соответственно $a(u)$ и $b(v)$. Эти спектральные характеристики вычисляем по формулам [7]

$$A_{ij}=\int_0^{\alpha}\varphi_i^*(u)\,\varphi(u)\,a(u)\,du, \tag{19}$$

$$B_{ij}=\int_0^{\alpha}\psi_i^*(v)\,\psi(v)\,b(v)\,dv. \tag{20}$$

Алгоритм моделирования. Используя (13) — (18), уравнение (10) запишем в спектральной области:

$$(E\otimes E\otimes P)\,Q=2b^2[(\mathbf{P}R\otimes E\otimes E)\,Q+(A_1\otimes B_1\otimes E)(E\otimes \mathbf{P}R\otimes E)\,Q+$$
$$+(A_2\otimes B_2\otimes E)(R\otimes R\otimes E)\,Q+(A_1\otimes B_3\otimes E)(E\otimes R\otimes E)\,Q]+F, \tag{21}$$

где $F=S^3[f(u,v,t)]$; A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 — спектральные характеристики множителей соответственно $1/u^2$, $1/u$, $v^2-\alpha v+0{,}5\alpha^2$, $\alpha-2v$, $2v-\alpha$.

Учитывая свойство прямого произведения матриц [8] и перенося члены уравнения (21) при матрице Q в левую часть уравнения, получаем

$$(E\otimes E\otimes P)\,Q-2b^2[(\mathbf{P}R\otimes E\otimes E)\,Q+(A_1\otimes B_1\mathbf{P}R\otimes E)\,Q+$$
$$+(A_2R\otimes B_2R\otimes E)\,Q+(A_1\otimes B_3R\otimes E)\,Q]=F. \tag{22}$$

Матричное уравнение (22) может быть решено относительно искомой матрицы Q:

$$Q = W^{-1} F, \tag{23}$$

где

$$W = E \otimes E \otimes P - 2b^2 (\mathbf{P} R \otimes E \otimes E + A_1 \otimes B_1 \mathbf{P} R \otimes E +$$
$$+ A_2 R \otimes B_2 R \otimes E + A_1 \otimes B_3 R \otimes E)\,.$$

Использовав формулу обращения (12), а также формулы (5), найдем искомую функцию $q(u, v, t)$.

Подстановка усеченных матриц в формулы, связывающие бесконечные матрицы, приводит к погрешности вычислений. Для контроля точности вычислений увеличивают порядок используемых матриц. Если при этом значение результата изменяется в пределах заданной погрешности, то следует считать, что размер используемых матриц достаточен.

Для оценки работоспособности метода рассмотрим численный пример и сравним результаты моделирования с точным решением.

Численный пример. Пусть для уравнения (1) с нулевыми начальными (3) и граничными (4) условиями, заданными на области (2),

$$b = 1,\ \alpha = 1,\ f(x, y, t) = -100[x^2 y + x y^2 - xy - 2t(x + y)],\ T = 1.$$

От переменных x, y перейдем к переменным u, v и, использовав формулу (7), получим

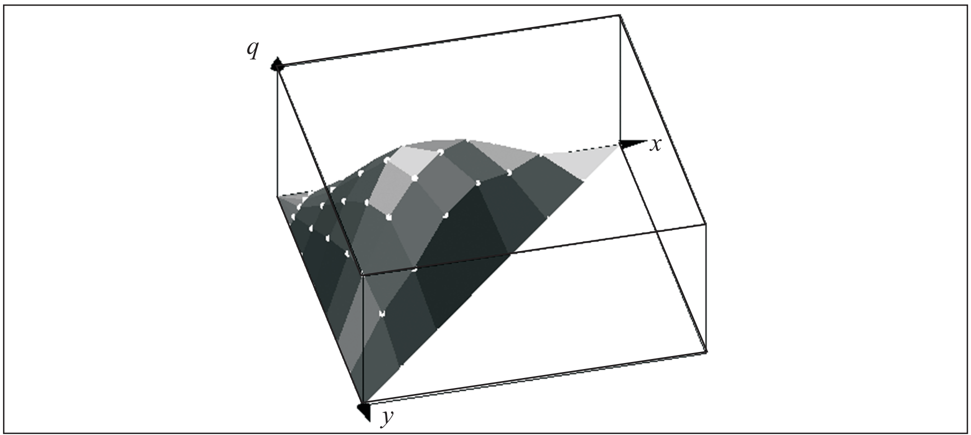
$$f(u, v, t) = -100(u^3 v - u^3 v^2 - u^2 v + u^2 v^2 - 2ut)\,.$$

В качестве базисных функций используем произведение одномерных ортонормированных на интервале [0, 1] полиномов Лежандра. Порядок матриц равен девяти. Численные значения матриц спектральных характеристик P, $\mathbf{P}$, R приведены в [5, 7]. Многомерную спектральную характеристику $F = S^3[f(u, v, t)]$ вычисляем по формуле (11), спектральные характеристики множителей A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 — по формулам (19), (20).

Решая систему линейных алгебраических уравнений (23), получаем МСХ функции Q. По формуле обращения (12) вычисляем функцию $q(u, v, t)$. Например, для $t = 0{,}5$ эта функция имеет вид

$$q(u, v, 0{,}5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}439 & 0{,}586 & 0{,}439 & 0 \\ 0 & 1{,}172 & 1{,}562 & 1{,}172 & 0 \\ 0 & 1{,}318 & 1{,}758 & 1{,}318 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2011. V. 33. № 1



u	v	x	y	q	Эталон
0	0	0	0	0	0
0	0,25	0	0	0	0
0	0,5	0	0	0	0
0	0,75	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0,25	0	0,25	0	0	0
0,25	0,25	0,188	0,063	0,4394	0,4395
0,25	0,5	0,125	0,125	0,5859	0,586
0,25	0,75	0,063	0,188	0,4394	0,4395
0,25	1	0	0,25	0	0
0,5	0	0,5	0	0	0
0,5	0,25	0,375	0,125	1,1718	1,11719
0,5	0,5	0,25	0,25	1,5624	1,5625
0,5	0,75	0,125	0,375	1,1718	1,11719
0,5	1	0	0,5	0	0
0,75	0	0,75	0	0	0
0,75	0,25	0,563	0,188	1,3183	1,3184
0,75	0,5	0,375	0,375	1,7578	1,7579
0,75	0,75	0,188	0,563	1,3183	1,3184
0,75	1	0	0,75	0	0
1	0	1	0	0	0
1	0,25	0,75	0,25	0	0
1	0,5	0,5	0,5	0	0
1	0,75	0,25	0,75	0	0
1	1	0	1	0	0

где аргумент u изменяется по строкам с дискретностью 0,25, а аргумент v — по столбцам с дискретностью 0,25. Для $t=1$ функция (24) имеет следующий вид:

$$q(u,v,1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}879 & 1{,}172 & 0{,}879 & 0 \\ 0 & 2{,}344 & 3{,}125 & 2{,}344 & 0 \\ 0 & 2{,}637 & 3{,}516 & 2{,}637 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя формулу (5), получаем значения искомой функции относительно аргументов x, y, t. График функции $q(u,v,0{,}5)$ представлен на рисунке, а полученные значения относительно аргументов x, y, t при $t=$ $=0{,}5$ приведены в таблице, в которой также указаны значения эталонного решения $q_0=-xy(x+y-1)t$.

Выводы. Таким образом, преобразование аргументов — удобный метод, позволяющий применить спектральную теорию для моделирования ОРП, заданных на непрямоугольной области. Сравнение результатов моделирования с точным решением свидетельствует о том, что погрешность метода очень мала.

Применение аппарата кронекерового или прямого произведения матриц является удобным способом записи алгебраических связей в спектральной модели ОРП. Матрицы Q_{ijk} и F_{ijk} представляются в виде матриц столбцов. Такое преобразование осуществляется посредством обхода сначала по индексу i, затем по j и по k. Матрица W, состоящая из прямого произведения квадратных матриц, есть квадратная матрица [8].

Решению дифференциальных уравнений в частных производных в спектральной области соответствует решение алгебраических матричных уравнений. Это упрощает решение задач идентификации, моделирования, синтеза управляющих устройств.

Метод удобен в программировании, так как используются операции с квадратными матрицами (сложение, перемножение, обращение).

Spectral theory of nonstationary control system is spread to the objects described by partial differential equations. The rules establishing the correspondence between operations in the space-time and spectral form have been considered. An example of modeling the object with distributed parameters is presented.

1. *Краскевич В. Е., Клевцов Ю. А.* Спектральный метод структурно-параметрической идентификации объектов с распределенными параметрами. //Вестн. Киевского политехнического ин-та. Сер. Техническая кибернетика. Вып. 5. — Киев : Вища школа, 1981. — С. 10—12.

2. *Краскевич В. Е., Клевцов Ю. А.* Спектральный метод в задаче структурных преобразований ОРП // Изв. ВУЗов. Приборостроение. — 1985. — № 6. — С. 9—13.
3. *Клевцов Ю. А.* Спектральное описание объектов с распределенными параметрами // Электрон. моделирование. — 1988. — **10**, № 3. — С. 27—31.
4. *Клевцов Ю. А.* Алгоритм решения СЛАУ в спектральных моделях объектов с распределенными параметрами // Там же. — 1998. — **20**, № 2. — С. 22—27.
5. *Клевцов Ю. А.* Алгоритм моделирования краевой задачи третьего рода // Там же. — 2001. — **23**, № 3. — С. 40—46.
6. *Клевцов Ю. А.* Алгоритм моделирования параболического объекта, заданного на непрямоугольной области // Управляющие системы и машины. — 1999. — № 4. — С. 13— 17.
7. *Солодовников В. В., Семенов В. В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. — М. : Наука, 1974. — 335 с.
8. *Ланкастер П*. Теория матриц. — М. : Наука, 1978. — 280 с.

Поступила 09.08.10

КЛЕВЦОВ Юрий Алексеевич, канд. техн. наук. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — объекты с распределенными параметрами, спектральная теория нестационарных систем управления, задачи моделирования и идентификации.

ПЕРЕДПЛАТА-2011

Оформити передплату на наш журнал можна через передплатне агентство «УКРІНФОРМНАУКА»:

вул. Володимирська, 54, кімн. 141, Київ-30, 01601;
E-mail: innovation@ nas.gov.ua;
тел./факс 380 (044) 239-64-57, моб. +380 (050) 154-77-83.

В России следует обращаться в ООО «Информнаука»:
ул. Усиевича, 20, г. Москва, 125190, Россия;
E-mail: perova@viniti.ru;
тел.: 007 (495) 787-38-73, факс: 007 (499) 152-54-81.