



УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313:669

В. Ф. Евдокимов *, чл.-кор. НАН Украины, **А. А. Кучаев** **, д-р техн. наук,

Е. И. Петрушенко *, канд. техн. наук, **В. А. Кучаев** *, аспирант

*Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4249160, E-mail: ypetrushenko@mail.ru)

**Физико-технологический ин-т металлов и сплавов НАН Украины,
(Украина, 03680, Киев-142, ГСП, бульв. Вернадского, 34/1,
тел. (044) 4240452, E-mail: alexander-kuchaev@svitonline.com)

Трехмерная модель распределения вихревых токов в жидкой стали непрерывнолитой заготовки при электромагнитном перемешивании

Разработана трехмерная интегральная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в жидкой фазе затвердевающего слитка в машине непрерывного литья заготовок (МНЛЗ), оснащенной электромагнитным перемешивателем. В основу модели положены приближенные выражения закона Ома для массивных элементов электрической схемы МНЛЗ. Для нахождения распределения в них скалярного электрического потенциала получена система интегральных уравнений относительно плотности электрического заряда на поверхности массивных проводников.

Розроблено тривимірну інтегральну модель розподілу вихрових струмів та електродинамічних зусиль в рідкій фазі твердіючого злитка в машині безперервного лиття заготовок (МБЛЗ), оснащеної електромагнітним перемішувачем. В основу моделі покладено наближені вирази закону Ома для масивних елементів електричної схеми МБЛЗ. Для пошуку розподілу в них скалярного електричного потенціалу отримано систему інтегральних рівнянь відносно густини електричного заряду на поверхні масивних провідників.

К л ю ч е в ы е с л о в а: трехмерное распределение, вихревые токи, жидкая и твердая фазы, гильза кристаллизатора, непрерывнолитая заготовка, электромагнитное перемешивание.

В настоящее время остро стоит вопрос о необходимости создания нового и улучшения конструкций существующего электротехнического оборудования для электромагнитного перемешивания жидкой стали на машинах непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). Одним из основных элементов этого оборудования является электромагнитный перемешиватель (ЭМП), принцип действия которого аналогичен работе асинхронного двигателя, где функции ротора исполняет жидкая фаза стальной заготовки. Поскольку электромагнитное перемешивание связано с большими дополнительными капитальными и эксплуатационными затратами, важно оценить на

начальной стадии проектирования эффективность системы электромагнитного перемешивания. По мнению разработчиков этих систем критерием эффективности перемешивания является максимальная линейная скорость в потоке жидкого металла, которая должна находиться в диапазоне 0,3...1 м/с. При максимальной линейной скорости, меньшей 0,3 м/с, эффективность перемешивания уменьшается, что не позволяет улучшить макро- и микроструктуру слитка. При максимальной скорости, большей 1 м/с, эффективность перемешивания уменьшается, так как появляются пористость вдоль фронта кристаллизации, отрицательная ликвация и увеличивается расход электроэнергии [1].

Оценить эффективность систем перемешивания на начальном этапе проектирования позволяет математическое моделирование. Решая систему уравнений неразрывности и Навье—Стокса, находим распределение поля скоростей в жидкой фазе заготовки, предварительно вычислив распределение электродинамических усилий (ЭДУ) в жидкой фазе слитка и границу жидкой фазы.

Расчет поля ЭДУ представляет собой сложную электродинамическую задачу, так как конструктивные особенности ЭМП и массивных проводников, находящихся внутри его, таковы, что электромагнитные поля в них являются существенно трехмерными [2, 3]. Поэтому в моделях течения жидкой фазы непрерывнолитого слитка, описанных в литературе, использовано двумерное распределение ЭДУ, что приводит к значительным погрешностям [4—7].

В связи с этим в основу пакета программ для моделирования ЭМП должны быть положены трехмерные системы уравнений Максвелла. Сложность указанных задач, с одной стороны, и необходимость разработки практически реализуемых на доступных ЭВМ программ, с другой стороны, побуждает искать такие эквивалентные преобразования этих систем, при которых во вновь полученных системах достаточно просто и с приемлемой точностью учитывалась бы специфика распределения полей в ЭМП.

Одним из таких преобразований является сведение краевых задач к эквивалентным системам интегральных уравнений (СИУ) методами теории потенциала. Неизвестными в полученных СИУ являются плотности источников поля, т.е. плотности тока намагниченности (ТН) на поверхности магнитопроводов и плотности вихревых токов (ВТ) в массивных проводниках. Поскольку объемы обмоток, поверхности магнитопроводов, объемы массивных проводников занимают, как правило, незначительную часть пространства, переход к СИУ существенно упрощает задачу. Кроме того, задача расщепляется на две части: расчет источников поля в результате решения полученных СИУ и расчет поля в любой точке пространства интегрированием по источникам поля.

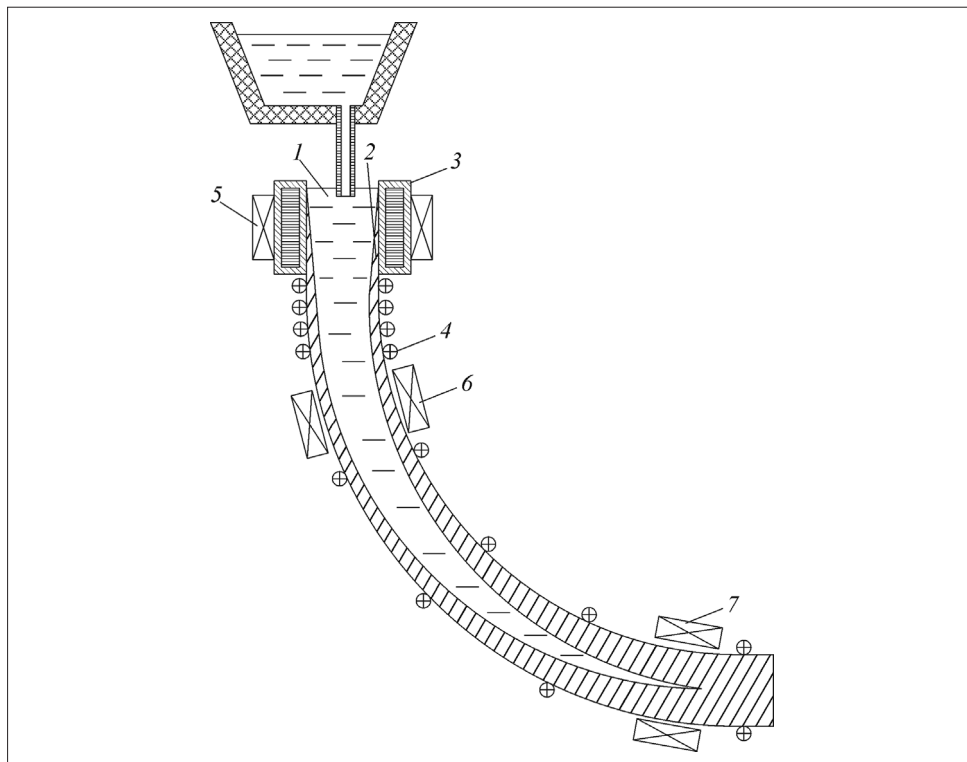


Рис. 1. Системы ЭМП для МНЛЗ: 1 — жидкая сталь; 2 — корочка формирующегося слитка; 3 — кристаллизатор; 4 — поддерживающие ролики; 5 — ЭМП в кристаллизаторе; 6 — ЭМП в зоне вторичного охлаждения; 7 — ЭМП в зоне окончания затвердевания

Тем не менее, задача решения СИУ остается достаточно сложной. В связи с этим оправданным является упрощение СИУ с помощью учета специфики магнитного поля в системе МНЛЗ—ЭМП, которая состоит в том, что магнитное поле, созданное системой ЭМП—гильза кристаллизатора (ГК) существенно больше магнитного поля ВТ в заготовке. Об этом свидетельствует большая амплитуда магнитодвижущей силы и низкая частота токов (1—6 Гц), питающих обмотки ЭМП.

При этом исходная СИУ существенно упрощается, и ее решение сводится к последовательному решению двух подсистем. Для расчета плотности ТН на поверхности магнитопровода ЭМП и плотности ВТ в ГК решаем векторную систему интегральных уравнений (ВСИУ). Из полученного решения находим векторный магнитный потенциал (ВМП) и вектор магнитной индукции (ВМИ) в объеме заготовки. Затем решаем скалярную СИУ для определения плотности электрических зарядов на

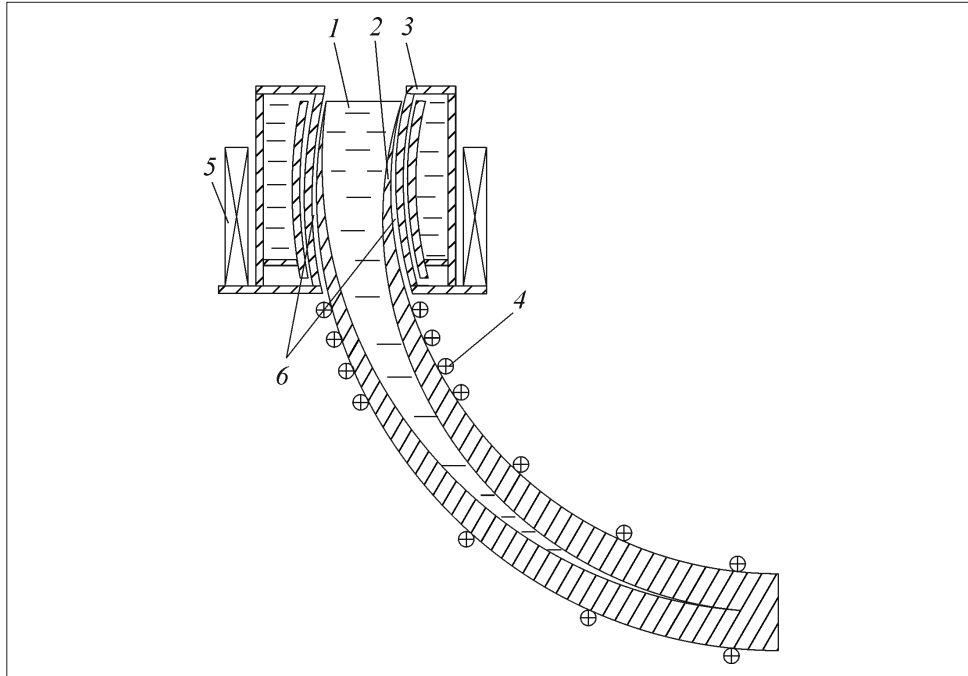


Рис. 2. Электрическая схема МНЛЗ с ЭМП: 1 и 2 — жидкая и твердая фазы слитка; 3 — ГК; 4 — ролики; 5 — ЭМП; 6 — зазор

поверхности заготовки, что позволяет определить скалярный электрический потенциал (СЭП) и распределение векторов плотности ВТ и ЭДУ в расплаве стали.

Системы электромагнитного перемешивания для сортовых МНЛЗ.

На рис. 1 показаны системы электромагнитного перемешивания, размещенные в кристаллизаторе, зоне вторичного охлаждения и в зоне окончания затвердевания МНЛЗ.

На рис. 2. представлена электрическая схема МНЛЗ с ЭМП. Жидкая 1 и твердая 2 фазы заготовки разделены поверхностью. Между твердой фазой слитка и ГК 3 имеется зазор 6, заполненный жидким шлаком. Гильза кристаллизатора расположена внутри ЭМП 5. Один из возможных вариантов конструкции ЭМП описан в работах [8, 9]. Заготовка вытягивается и поддерживается с помощью роликов 4. Проводимости жидкой γ_l и твердой γ_b фаз заготовки, ГК — γ_m , роликов — γ_r заданы и считаются постоянными в соответствующих объемах. Проводимость шлака $\gamma_s = 0$; проводимость окружающего пространства $\gamma_+ = 0$. Относительная магнитная проницаемость магнитопровода ЭМП равна μ^- . Относительную магнитную проницаемость жидкой и твердой фаз заготовки, ГК, роликов, шлака при-

нимаем равной единице. Возвратно-поступательное движение кристаллизатора не учитывается.

Трехмерная интегральная модель магнитного поля системы ЭМП—ГК. Рассмотрим ЭМП, у которого в объеме магнитопровода V^- магнитная проницаемость μ^- постоянна. Введем обозначения: V_0, V_m, V^+ — объемы соответственно обмоток, ГК, окружающего пространства; S^- и S_m — поверхности магнитопровода и ГК; $\dot{\delta}_0(Q)$ — комплекс вектора плотности тока в точке $Q \in V_0$; $\dot{\delta}(Q)$ — комплекс вектора плотности ВТ в точке $Q \in V_m$; $\dot{\sigma}(Q)$ — комплекс вектора плотности ТН в точке $Q \in S^-$.

Пренебрегая влиянием магнитного поля ВТ в заготовке и роликах на распределение $\dot{\sigma}(Q), Q \in S^-$ и $\dot{\delta}(Q), Q \in V_m$ [10], получаем ВСИУ, которой удовлетворяет $\dot{\sigma}(Q), Q \in S^-$ и $\dot{\delta}(Q), Q \in V_m$:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(Q) + \frac{\chi}{2\pi} \oint_{S^-} \frac{[\mathbf{n}_Q [\mathbf{r}_{QM} \dot{\sigma}(M)]]}{r_{QM}^3} ds_M + \frac{\chi}{2\pi} \int_{V_m} \frac{[\mathbf{n}_Q [\mathbf{r}_{QM} \dot{\delta}(M)]]}{r_{QM}^3} dv_M = \\ = -\frac{\chi}{2\pi} \int_{V_0} \frac{[\mathbf{n}_Q [\mathbf{r}_{QM} \dot{\delta}_0(M)]]}{r_{QM}^3} dv_M, \quad Q \in S^-; \\ \frac{\dot{\delta}(Q)}{\gamma_m} + \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{V_m} \dot{\delta}(M) \frac{1}{r_{QM}} dv_M + \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} \dot{\sigma}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{S_m} \dot{\tau}(M) \frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} ds_M = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \dot{\delta}_0(M) \frac{1}{r_{QM}} dv_M, \quad Q \in V_m; \quad (1) \\ \dot{\tau}(Q) + \frac{1}{2\pi} \int_{S_m} \dot{\tau}(M) \frac{\cos(\widehat{\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM}})}{r_{QM}^2} ds_M + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \int_{V_m} \dot{\delta}_{nQ}(M) \frac{1}{r_{QM}} dv_M + \\ + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \int_{S^-} \dot{\sigma}_{nQ}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M = -\frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \int_{V_0} \dot{\delta}_{0nQ}(M) \frac{1}{r_{QM}} dv_M, \quad Q \in S_m. \end{aligned}$$

Здесь $\dot{\tau}(Q), Q \in S_m$, — ПЭЗ в точке $Q \in S_m$; $\mathbf{n}_Q, Q \in S^-$, — нормаль к поверхности S^- в точке Q , положительное направление которой принято из объема V^- в объем V^+ ; $\mathbf{n}_Q, Q \in S_m$, — нормаль к поверхности S_m в точке Q , положительное направление которой принято из объема V_m в объем V^+ ; r_{QM} — расстояние между точками Q и M ; \mathbf{r}_{QM} — радиус-вектор, направленный из точки Q в точку M и равный по модулю r_{QM} ; $\dot{\delta}_{nQ}(M), M \in V_m$,

$\dot{\sigma}_{nQ}(M)$, $M \in S^-$, $\dot{\delta}_{0nQ}(M)$, $M \in V_0$, — проекции векторов $\dot{\delta}(M)$, $\dot{\sigma}(M)$, $\dot{\delta}_0(M)$ на нормаль \mathbf{n}_Q , $Q \in S_m$; $\chi = \frac{\mu^- - 1}{\mu^- + 1}$; $j = \sqrt{-1}$; $w = 2\pi f$, где f — частота

токов, питающих обмотки ЭМП.

Решив ВИУ (1), вычислим комплексы ВМИ $\dot{\mathbf{B}}(Q)$ и ВМП $\dot{\mathbf{A}}(Q)$ в любой точке Q по формулам

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}(Q) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{[\mathbf{r}_{QM} \dot{\delta}_0(M)]}{r_{QM}^3} dv_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S^-} \frac{[\mathbf{r}_{QM} \dot{\sigma}(M)]}{r_{QM}^3} ds_M + \\ &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_m} \frac{[\mathbf{r}_{QM} \dot{\delta}(M)]}{r_{QM}^3} dv_M; \\ \dot{\mathbf{A}}(Q) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\dot{\delta}_0(M)}{r_{QM}} dv_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_m} \frac{\dot{\delta}(M)}{r_{QM}} dv_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} \frac{\dot{\sigma}(M)}{r_{QM}} ds_M. \end{aligned}$$

Приближенные выражения закона Ома в элементах электрической схемы МНЛЗ. Введем обозначения: V_l и S_l — объем и поверхность жидкой фазы заготовки; V_b и S_b — объем и поверхность твердой фазы заготовки; V_r и S_r — объем и поверхность роликов; V^+ — окружающее пространство; $V = V_l + V_b + V_r$ — совокупный объем; S_{lb} — поверхность контакта жидкой и твердой фаз заготовки; S_{l+} — поверхность контакта жидкой фазы заготовки с окружающей средой; S_{b+} — поверхность контакта твердой фазы заготовки с окружающей средой; S_{br} — поверхность контакта твердой фазы заготовки с роликами; S_{r+} — поверхность контакта роликов с окружающей средой; $S = S_{lb} + S_{l+} + S_{b+} + S_{br} + S_{r+}$ — совокупная поверхность; \mathbf{n}_{lb} — нормаль к поверхности S_{lb} , направленная из объема V_l ; \mathbf{n}_{l+} — нормаль к поверхности S_{l+} , направленная из объема V_l ; \mathbf{n}_{b+} — нормаль к поверхности S_{b+} , направленная в объем V_b ; \mathbf{n}_{br} — нормаль к поверхности S_{br} , направленная из объема V_r ; \mathbf{n}_{r+} — нормаль к поверхности S_{r+} , направленная из объема V_r .

Закон Ома в элементах электрической схемы МНЛЗ имеет следующий вид: в объеме жидкой фазы заготовки V_l

$$\dot{\delta}_l = \gamma_l (\dot{\mathbf{E}}_l + \mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_{l\Sigma}) = \gamma_l (-j\omega \dot{\mathbf{A}}_{l\Sigma} - \nabla \dot{\phi}_l + \mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_{l\Sigma}), \quad (2)$$

в объеме твердой фазы заготовки V_b

$$\dot{\delta}_b = \gamma_b (\dot{\mathbf{E}}_b + \mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_{b\Sigma}) = \gamma_b (-j\omega \dot{\mathbf{A}}_{b\Sigma} - \nabla \dot{\phi}_b + \mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_{b\Sigma}), \quad (3)$$

в объеме роликов V_r

$$\dot{\delta}_r = \gamma_r (\dot{\mathbf{E}}_r + \mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_{r\Sigma}) = \gamma_r (-j\omega \dot{\mathbf{A}}_{r\Sigma} - \nabla \dot{\phi}_r + \mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_{b\Sigma}), \quad (4)$$

в окружающем пространстве V^+

$$\dot{\delta}_+ = 0. \quad (5)$$

В выражениях (2)—(5) $\dot{\delta}_l, \dot{\delta}_b, \dot{\delta}_r, \dot{\delta}_+$ — комплексы векторов плотности ВТ в жидкой и твердой фазах заготовки, роликах и окружающей среде; $\dot{\mathbf{E}}_l, \dot{\mathbf{E}}_b$ и $\dot{\mathbf{E}}_r$ — комплексы векторов напряженности электрического поля в жидкой и твердой фазах заготовки и роликах; \mathbf{U}_l — вектор скорости в жидкой фазе заготовки; \mathbf{U}_b — вектор скорости вытягивания заготовки; \mathbf{U}_r — вектор линейной скорости в объеме роликов; $\dot{\mathbf{A}}_{l\Sigma}, \dot{\mathbf{A}}_{b\Sigma}$ и $\dot{\mathbf{A}}_{r\Sigma}$ — комплексы ВМП в жидкой и твердой фазах заготовки и роликах; $\dot{\phi}_l, \dot{\phi}_b$ и $\dot{\phi}_r$ — комплексы СЭП в жидкой и твердой фазах заготовки и роликах; $\dot{\mathbf{B}}_{l\Sigma}, \dot{\mathbf{B}}_{b\Sigma}$ и $\dot{\mathbf{B}}_{r\Sigma}$ — комплексы ВМИ в жидкой и твердой фазах заготовки и роликах.

Комплексы ВМП $\dot{\mathbf{A}}_{\Sigma}$ и ВМИ $\dot{\mathbf{B}}_{\Sigma}$, обусловленные системой ЭМП—ГК и ВТ в заготовке и роликах, представим в виде

$$\dot{\mathbf{A}}_{l\Sigma} = \dot{\mathbf{A}}_l + \dot{\mathbf{A}}_{lc}; \quad \dot{\mathbf{B}}_{l\Sigma} = \dot{\mathbf{B}}_l + \dot{\mathbf{B}}_{lc},$$

где $\dot{\mathbf{A}}_l$ и $\dot{\mathbf{B}}_l$ — комплексы ВМП и ВМИ в жидкой фазе заготовки, обусловленные системой ЭМП—ГК; $\dot{\mathbf{A}}_{lc}$ и $\dot{\mathbf{B}}_{lc}$ — комплексы ВМП и ВМИ в жидкой фазе заготовки, обусловленные ВТ в заготовке и роликах;

$$\dot{\mathbf{A}}_{b\Sigma} = \dot{\mathbf{A}}_b + \dot{\mathbf{A}}_{bc}; \quad \dot{\mathbf{B}}_{b\Sigma} = \dot{\mathbf{B}}_b + \dot{\mathbf{B}}_{bc},$$

где $\dot{\mathbf{A}}_b$ и $\dot{\mathbf{B}}_b$ — комплексы ВМП и ВМИ в твердой фазе заготовки, обусловленные системой ЭМП—ГК; $\dot{\mathbf{A}}_{bc}$ и $\dot{\mathbf{B}}_{bc}$ — комплексы ВМП и ВМИ в твердой фазе заготовки, обусловленные ВТ в заготовке и роликах;

$$\dot{\mathbf{A}}_{r\Sigma} = \dot{\mathbf{A}}_r + \dot{\mathbf{A}}_{rc}; \quad \dot{\mathbf{B}}_{r\Sigma} = \dot{\mathbf{B}}_r + \dot{\mathbf{B}}_{rc},$$

где $\dot{\mathbf{A}}_r$ и $\dot{\mathbf{B}}_r$ — комплексы ВМП и ВМИ в объеме роликов, обусловленные системой ЭМП—ГК; $\dot{\mathbf{A}}_{rc}$ и $\dot{\mathbf{B}}_{rc}$ — комплексы ВМП и ВМИ в объеме роликов, обусловленные ВТ в заготовке и роликах.

Приближенные выражения закона Ома получим из (2)—(4), положив в них

$$\dot{\mathbf{A}}_{l\Sigma} \approx \dot{\mathbf{A}}_l, \quad \dot{\mathbf{B}}_{l\Sigma} \approx \dot{\mathbf{B}}_l, \quad \dot{\mathbf{A}}_{b\Sigma} \approx \dot{\mathbf{A}}_b, \quad \dot{\mathbf{B}}_{b\Sigma} \approx \dot{\mathbf{B}}_b, \quad \dot{\mathbf{A}}_{r\Sigma} \approx \dot{\mathbf{A}}_r, \quad \dot{\mathbf{B}}_{r\Sigma} \approx \dot{\mathbf{B}}_r.$$

В результате закон Ома в элементах электрической схемы принимает следующий вид:

в жидкой фазе заготовки V_l

$$\dot{\delta}_l = \gamma_l (\dot{\mathbf{E}}_l + \mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l) = \gamma_l (-j\omega \dot{\mathbf{A}}_l - \nabla \dot{\phi}_l + \mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l); \quad (6)$$

в твердой фазе заготовки V_b

$$\dot{\delta}_b = \gamma_b (\dot{\mathbf{E}}_b + \mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_b) = \gamma_b (-j\omega \dot{\mathbf{A}}_b - \nabla \dot{\phi}_b + \mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_b); \quad (7)$$

в объеме роликов V_r

$$\dot{\delta}_r = \gamma_r (\dot{\mathbf{E}}_r + \mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r) = \gamma_r (-j\omega \dot{\mathbf{A}}_r - \nabla \dot{\phi}_r + \mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r). \quad (8)$$

Из выражений (6)—(8) видно, что при принятом допущении для расчета ВТ в заготовке и роликах достаточно определить СЭП в этих элементах.

Сформулируем краевую задачу для СЭП.

Краевая задача для СЭП в заготовке и роликах вытекает из уравнений непрерывности и их граничных условий.

Уравнения: в объеме жидкой фазы заготовки V_l

$$\nabla \dot{\delta}_l = 0, \quad (9)$$

в твердой фазе заготовки V_b

$$\nabla \dot{\delta}_b = 0, \quad (10)$$

в объеме роликов V_r

$$\nabla \dot{\delta}_r = 0. \quad (11)$$

Граничные условия: поверхность контакта жидкой и твердой фаз заготовки S_{lb} —

$$\mathbf{n}_{lb} \dot{\delta}_l = \mathbf{n}_{lb} \dot{\delta}_b, \quad (12)$$

поверхность контакта жидкой фазы заготовки с окружающей средой S_{l+} —

$$\mathbf{n}_{l+} \dot{\delta}_l = 0, \quad (13)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с окружающей средой S_{b+} —

$$\mathbf{n}_{b+} \dot{\delta}_b = 0, \quad (14)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с роликами S_{rb} —

$$\mathbf{n}_{rb} \dot{\delta}_r = \mathbf{n}_{rb} \dot{\delta}_b, \quad (15)$$

поверхность контакта роликов с окружающей средой S_{r+} —

$$\mathbf{n}_{r+} \dot{\delta}_r = 0. \quad (16)$$

Подставляя выражения приближенного закона Ома (6)—(8) в уравнения (9)—(11), получаем следующее уравнение для СЭП $\dot{\phi}$: в объеме жидкой фазы заготовки V_l

$$\nabla \dot{\mathbf{s}}_l = \gamma_l (-j\omega \nabla \dot{\mathbf{A}}_l - \nabla^2 \dot{\phi}_l + \nabla(\mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l)) = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \nabla \dot{\mathbf{A}}_l &= 0; \quad \nabla^2 \dot{\phi}_l = \Delta \dot{\phi}_l; \\ \nabla(\mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l) &= \dot{\mathbf{B}}_l \operatorname{rot} \mathbf{U}_l - \mathbf{U}_l \operatorname{rot} \dot{\mathbf{B}}_l = \dot{\mathbf{B}}_l \boldsymbol{\Omega}_l, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\boldsymbol{\Omega}_l$ — вихрь, $\boldsymbol{\Omega}_l = \operatorname{rot} \mathbf{U}_l$. С учетом (18) уравнение (17) преобразуется к виду

$$\Delta \dot{\phi}_l = \dot{\mathbf{B}}_l \boldsymbol{\Omega}_l. \quad (19)$$

Аналогично запишем: в твердой фазе заготовки V_b

$$\Delta \dot{\phi}_b = \dot{\mathbf{B}}_b \boldsymbol{\Omega}_b, \quad (20)$$

в объеме роликов V_r

$$\Delta \dot{\phi}_r = \dot{\mathbf{B}}_r \boldsymbol{\Omega}_r. \quad (21)$$

Подставив выражения приближенного закона Ома (6)—(8) в граничные условия (12)—(16), получим следующие граничные условия для скалярного потенциала $\dot{\phi}$: поверхность контакта жидкой и твердой фаз заготовки S_{lb} —

$$\gamma_b \frac{\partial \dot{\phi}_b}{\partial n_{lb}} - \gamma_l \frac{\partial \dot{\phi}_l}{\partial n_{lb}} = -j\omega (\gamma_b - \gamma_l) \dot{A}_{ln_{lb}} + (\gamma_b - \gamma_l) \mathbf{n}_{lb} (\mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l); \quad (22)$$

поверхность контакта жидкой фазы с окружающей средой S_{l+} —

$$\begin{aligned} -j\omega \dot{A}_{ln_{l+}} - \frac{\partial \dot{\phi}_l}{\partial n_{l+}} + \mathbf{n}_{l+} (\mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l) &= 0, \\ \frac{\partial \dot{\phi}_l}{\partial n_{l+}} &= -j\omega \dot{A}_{ln_{l+}} + \mathbf{n}_{l+} (\mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l); \end{aligned} \quad (23)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с окружающей средой S_{b+} —

$$\frac{\partial \dot{\phi}_b}{\partial n_{b+}} = -j\omega \dot{A}_{bn_{b+}} + \mathbf{n}_{b+} (\mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_b); \quad (24)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с роликами S_{br} —

$$-\gamma_r \frac{\partial \dot{\phi}_r}{\partial n_{rb}} + \gamma_b \frac{\partial \dot{\phi}_b}{\partial n_{rb}} = j\omega (\gamma_r - \gamma_b) \dot{A}_{rn_{rb}} - (\gamma_r - \gamma_b) \mathbf{n}_{rb} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r); \quad (25)$$

поверхность контакта роликов с окружающей средой S_{r+} —

$$\frac{\partial \dot{\phi}_r}{\partial n_{r+}} = -j\omega \dot{A}_{m_{r+}} + \mathbf{n}_{r+} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r). \quad (26)$$

Система интегральных уравнений, эквивалентная сформулированной краевой задаче (19)—(26). Решение системы уравнений (19)—(21) будем искать в виде суммы

$$\dot{\phi}(Q) = \dot{\Psi}(Q) + \dot{\Phi}(Q), \quad (27)$$

где $\dot{\Psi}(Q)$ — частное решение уравнений (19)—(21),

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(Q) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{V_l} \frac{\dot{\mathbf{B}}_l(M) \boldsymbol{\Omega}_l(M)}{r_{QM}} dV_M - \frac{1}{4\pi} \int_{V_b} \frac{\dot{\mathbf{B}}_b(M) \boldsymbol{\Omega}_b(M)}{r_{QM}} dV_M - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{V_r} \frac{\dot{\mathbf{B}}_r(M) \boldsymbol{\Omega}_r(M)}{r_{QM}} dV_M; \end{aligned} \quad (28)$$

$\dot{\Phi}(Q)$ — решение следующей однородной системы: в объеме V_l

$$\Delta \dot{\Phi}_l = 0, \quad (29)$$

в объеме V_b

$$\Delta \dot{\Phi}_b = 0, \quad (30)$$

в объеме V_r

$$\Delta \dot{\Phi}_r = 0. \quad (31)$$

Граничные условия для системы уравнений (28)—(31) вытекают из граничных условий (22)—(26), если в них подставить (27): поверхность контакта жидкой и твердой фаз заготовки S_{lb} —

$$\begin{aligned} \gamma_b \frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{lb}} - \gamma_l \frac{\partial \dot{\Phi}_l}{\partial n_{lb}} = & -j\omega(\gamma_b - \gamma_l) \dot{A}_{ln_b} + \\ & + (\gamma_b - \gamma_l) \mathbf{n}_{lb} (\mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l) - (\gamma_b - \gamma_l) \frac{\partial \dot{\Psi}_l}{\partial n_{lb}}; \end{aligned} \quad (32)$$

поверхность контакта жидкой фазы с окружающим пространством S_{l+} —

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_l}{\partial n_{l+}} = -j\omega \dot{A}_{ln_{l+}} + \mathbf{n}_{l+} (\mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l) - \frac{\partial \dot{\Psi}_l}{\partial n_{l+}}; \quad (33)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с окружающей средой S_{b+} —

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{b+}} = -j\omega \dot{A}_{bn_{b+}} + \mathbf{n}_{b+} (\mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_b) - \frac{\partial \dot{\Psi}_b}{\partial n_{b+}}; \quad (34)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с роликами S_{rb} —

$$\begin{aligned} \gamma_b \frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{rb}} - \gamma_r \frac{\partial \dot{\Phi}_r}{\partial n_{rb}} = j\omega (\gamma_r - \gamma_b) \dot{A}_{rn_b} - \\ - (\gamma_l - \gamma_b) \mathbf{n}_{rb} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r) + (\gamma_r - \gamma_b) \frac{\partial \dot{\Psi}_r}{\partial n_{rb}}; \end{aligned} \quad (35)$$

поверхность контакта роликов с окружающей средой S_{r+} —

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_r}{\partial n_{r+}} = -j\omega \dot{A}_{rn_{r+}} + \mathbf{n}_{r+} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r) - \frac{\partial \dot{\Psi}_r}{\partial n_{r+}}. \quad (36)$$

Будем искать решение уравнений (29)—(31) с граничными условиями (32)—(36) в виде суммы потенциалов простого слоя (ППС):

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_{lb}} \dot{\tau}_{lb}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{l+}} \dot{\tau}_{l+}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{b+}} \dot{\tau}_{b+}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{rb}} \dot{\tau}_{rb}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{r+}} \dot{\tau}_{r+}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M = \frac{1}{4\pi} \int_S \dot{\tau}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M, \quad Q \in V, \end{aligned}$$

или

$$4\pi \dot{\Phi}(Q) = T_{VS_{lb}} \dot{\tau}_{lb} + T_{VS_{l+}} \dot{\tau}_{l+} + T_{VS_{b+}} \dot{\tau}_{b+} + T_{VS_{rb}} \dot{\tau}_{rb} + T_{VS_{r+}} \dot{\tau}_{r+} = T_{VS} \dot{\tau}, \quad Q \in V. \quad (37)$$

Выражение (37) удовлетворяет системе уравнений (29)—(31). Для того чтобы оно удовлетворяло граничным условиям (32)—(36), необходимо, чтобы плотности ППС были решением СИУ, которая получается из этих граничных условий, если воспользоваться свойствами потенциала простого слоя [11]. При переходе через поверхность S_{lb} в точке Q скачок определяется следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{\Phi}_l}{\partial n_{lb}}(Q) &= \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{lb}}}(Q) + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{lb}(Q), \\ \frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{lb}}(Q) &= \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{lb}}}(Q) - \frac{1}{2} \dot{\tau}_{lb}(Q), \end{aligned} \right\} Q \in S_{lb}, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{lb}}}(Q) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_{lb}} \dot{\tau}_{lb}(M) \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{l+}} \dot{\tau}_{l+}(M) \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_{b+}} \dot{\tau}_{b+}(M) \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{rb}} \dot{\tau}_{rb}(M) \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_{r+}} \dot{\tau}_{r+}(M) \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M = \frac{1}{4\pi} \int_S \dot{\tau}(M) \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M, \quad Q \in S_{lb}, \end{aligned}$$

или

$$4\pi \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{lb}}(Q) = P_{S_{lb}S_{lb}} \dot{\tau}_{lb} + P_{S_{lb}S_{l+}} \dot{\tau}_{l+} + P_{S_{lb}S_{b+}} \dot{\tau}_{b+} + P_{S_{lb}S_{rb}} \dot{\tau}_{rb} + P_{S_{lb}S_{r+}} \dot{\tau}_{r+} = P_{S_{lb}S} \dot{\tau},$$

$$Q \in S_{lb}. \quad (39)$$

Подставляя (38), (39) в граничное условие (32), получаем следующее ИУ для $\dot{\tau}_{lb}$:

$$\frac{2\pi}{\chi_{bl}} \dot{\tau}_{lb}(Q) - P_{S_{lb}S} \dot{\tau} = 4\pi j\omega \dot{A}_{ln_{lb}} - 4\pi \mathbf{n}_{lb} (\mathbf{U}_l \times \mathbf{B}_l) + 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n_{lb}}, \quad Q \in S_{lb}, \quad (40)$$

где $\chi_{bl} = \frac{(\gamma_b - \gamma_l)}{(\gamma_b + \gamma_l)}$.

Выведем интегральное уравнение для плотности $\dot{\tau}_{l+}$ на поверхности контакта жидкой фазы с окружающим пространством S_{l+} . Для этого граничные условия (33) запишем с учетом скачка нормальной производной ППС при переходе через поверхность S_{l+} . Скачок определяется следующим соотношением:

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_l}{\partial n_{l+}}(Q) = \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{l+}}}(Q) + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{l+}(Q), \quad Q \in S_{l+}, \quad (41)$$

где

$$4\pi \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{l+}}}(Q) = P_{S_{l+}S} \dot{\tau}, \quad Q \in S_{l+}. \quad (42)$$

Подставив (41), (42) в граничные условия (33), получим

$$2\pi \dot{\tau}_{l+}(Q) + P_{S_{l+}S} \dot{\tau} = -4\pi j \omega \dot{A}_{ln_{l+}} + 4\pi \mathbf{n}_{l+} (\mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l) - 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}_l}{\partial n_{l+}}, \quad Q \in S_{l+}. \quad (43)$$

Получим интегральное уравнение для плотности $\dot{\tau}_{b+}$ на поверхности контакта твердой фазы заготовки с окружающей средой S_{b+} . Для этого граничное условие (34) запишем с учетом скачка нормальной производной ППС при переходе через поверхность S_{b+} . Скачок определяется следующим соотношением:

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{b+}}(Q) = \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{b+}}}(Q) - \frac{1}{2} \dot{\tau}_{b+}(Q), \quad Q \in S_{b+}, \quad (44)$$

где

$$4\pi \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{b+}}}(Q) = P_{S_{b+}S} \dot{\tau}, \quad Q \in S_{b+}. \quad (45)$$

Подставив (44), (45) в граничные условия (34), получим интегральное уравнение для плотности $\dot{\tau}_{b+}$:

$$-2\pi \dot{\tau}_{b+}(Q) + P_{S_{b+}S} \dot{\tau} = -4\pi j \omega \dot{A}_{Sn_{b+}} + 4\pi \mathbf{n}_{b+} (\mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_b) - 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}_b}{\partial n_{b+}}, \quad Q \in S_{b+}. \quad (46)$$

Получим интегральное уравнение для плотности $\dot{\tau}_{rb}$ на поверхности контакта твердой фазы заготовки с роликами S_{rb} . Для этого граничное условие (35) запишем с учетом скачка нормальной производной ППС при переходе через поверхность S_{rb} . Скачок определяется следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{\Phi}_r}{\partial n_{rb}}(Q) &= \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{rb}}}(Q) + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{rb}(Q), \\ \frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{rb}}(Q) &= \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{rb}}}(Q) - \frac{1}{2} \dot{\tau}_{rb}(Q), \end{aligned} \right\} Q \in S_{rb}, \quad (47)$$

где

$$4\pi \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{rb}}}(Q) = P_{S_{rb}S} \dot{\tau}, \quad Q \in S_{rb}. \quad (48)$$

Подставляя (47), (48) в граничное условие (35), получаем следующее интегральное уравнение для $\dot{\tau}_{rb}$:

$$\frac{2\pi}{\chi_{rb}} \dot{\tau}_{rb}(Q) - P_{S_{rb}S} \dot{\tau} = 4\pi j\omega \dot{A}_{ln_{rb}} - 4\pi n_{rb} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r) + 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n_{rb}}, \quad Q \in S_{rb}, \quad (49)$$

где $\chi_{rb} = \frac{(\gamma_b - \gamma_r)}{(\gamma_b + \gamma_r)}$.

Получим интегральное уравнение для плотности $\dot{\tau}_{r+}$ на поверхности контакта роликов с окружающим пространством S_{r+} . Для этого граничные условия (36) запишем с учетом скачка нормальной производной ППС при переходе через поверхность S_{r+} . Скачок определяется следующим соотношением:

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_r}{\partial n_{r+}}(Q) = \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{r+}}}(Q) + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{r+}(Q), \quad Q \in S_{r+}, \quad (50)$$

где

$$4\pi \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{r+}}}(Q) = P_{S_{r+}S} \dot{\tau}. \quad (51)$$

Подставив (50), (51) в граничные условия (36), получим следующее интегральное уравнение для $\dot{\tau}_{r+}$:

$$2\pi \dot{\tau}_{r+}(Q) + P_{S_{r+}S} \dot{\tau} = -4\pi j\omega \dot{A}_{m_{r+}} + 4\pi n_{r+} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r) - 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}_r}{\partial n_{r+}}, \quad Q \in S_{r+}. \quad (52)$$

Таким образом, получены СИУ (40), (43), (46), (49), (52), эквивалентные краевой задаче для уравнений (29)—(31) с граничными условиями (32)—(36). Аппроксимируя СИУ системой алгебраических уравнений и решая последнюю, находим распределение плотности зарядов $\dot{\tau}$ на совокупной поверхности S . По известному значению $\dot{\tau}$ из выражения (37) находим $\dot{\Phi}(Q)$, $Q \in V$, а по формулам (27), (28) — СЭП $\dot{\phi}(Q)$, $Q \in V$. Подставив значение $\dot{\phi}(Q)$ в (6)—(8), получим векторы плотностей ВТ в массивных элементах МНЛЗ, в том числе и в жидкой фазе слитка.

Вывод. Полученная скалярная СИУ позволит, изменяя взаиморасположение ЭМП и гильзы кристаллизатора, ЭМП и роликов, конструкцию ЭМП, величину и частоту токов в обмотках, найти такое распределение ЭДУ в жидкой фазе слитка, при котором максимальная линейная скорость в потоке жидкого металла будет находиться в диапазоне 0,3...1 м/с, т.е. в области достижения оптимального режима перемешивания.

A three-dimensional integral model has been developed for the distribution of eddy currents and electrodynamic efforts in a liquid phase of hardening ingot in the continuous ingots casting machine (CICM) equipped with electromagnetic mixed. Approximate expressions of the Ohm law for massive elements of CICM electric circuit are assumed as the model basis. A system of integral equations relative to the electric charge density on the surface of massive conductors was obtained to find the distribution of the scalar electric potential in them.

1. Грачев В. Г., Сивак Б. В., Зарубин С. В. и др. Математическое моделирование МГД-процессов при электромагнитном перемешивании жидкого металла в процессе непрерывной разливки круглых заготовок // Черные металлы. — 2009. — № 6. — С. 8—14.
2. Natarajan T. T., El-Kaddah N. Finite Element Analysis of Electromagnetically Driven Flow in Sub-mold Stirring of Steel Billets and Slabs // ISIJ Int. — 1998. — 38, № 7. — P. 707—714.
3. Davidson P. A. Magnetohydrodynamics in materials processing // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1999. — № 31. — P. 273—300.
4. Грачев В., Кузьмина Л., Солодовник Ф. и др. Системы электромагнитного перемешивания жидкой стали на сортовых, блюмовых и слябовых МНЛЗ // Оборудование. — 2005. — № 11. — С. 48—52.
5. Найдек В. Л., Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф. и др. Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор-индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок // Электрон. моделирование. — 2004. — № 1. — С. 30—52.
6. Евдокимов В. Ф., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И., Касьян Г. И. Двумерная интегральная модель распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе МНЛЗ с явнополюсным электромагнитным перемешивателем // Там же. — 2010. — 32, № 1. — С. 53—75.
7. Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф., Кондратенко И. П. и др. Блочный алгоритм реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с индукционным перемешивателем // Там же. — 2005. — 27, № 4. — С. 57—74.
8. Евдокимов В. Ф., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И., Кучаев В. А. Трехмерная интегральная модель магнитного поля электромагнитного перемешивателя // Сб. научн. трудов междунар. конф. «Моделирование—2010», 12—14 мая 2010 г. — Киев : Ин-т проблем моделирования в энергетике НАН Украины. — 2010. — 1. — С. 32—40.
9. Евдокимов В. Ф., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И., Кучаев В. А. Трехмерная интегральная модель магнитного поля электромагнитного перемешивателя // Электрон. моделирование. — 2010. — 32, № 4. — С. 93—112.
10. Петрушенко Е. И. Постановка задачи по расчету вихревых токов в телах произвольной формы // Изв. вузов. Электромеханика. — 1966. — № 11. — С. 1181—1184.
11. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. — М. : Физматгиз, 1959. — 232 с.

Поступила 13.07.10

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория моделирования процессов и систем в энергетике, теория функционально-ориентированных компьютерных систем, анализ и синтез параллельных вычислительных методов и систем.

КУЧАЕВ Александр Андреевич, д-р техн. наук, вед. науч. сотр. отдела непрерывной разливки и литейно-деформационных процессов Физико-технологического ин-та металлов и сплавов НАН Украины. В 1978 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом моделирования задач электромагнитной гидродинамики Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т, а в 1963 г. — Ростовский государственный университет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

КУЧАЕВ Виталий Александрович, аспирант, отдел моделирования задач электромагнитной гидродинамики Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 2002 г. окончил Национальный технический университет Украины «КПИ». Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.