

УДК 536.24

СОРОКИНА Т.В.

Ин-т технической теплофизики НАН Украины

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ПРОЦЕССАХ ДИВЭ

Одержано рівняння Орра-Зоммерфельда для потоку зі змінними властивостями та сталим поперечним магнітним полем. Досліджено стійкість Орра-Зоммерфельда під дією різних факторів збурення, як то густина, паровміст, поперечне магнітне поле. Виведено рівняння Орра-Зоммерфельда для неньютонівської рідини. Досліджено стійкість неньютонівської рідини.

Получено уравнение Орра-Зоммерфельда для потока с переменными свойствами и влиянием поперечного постоянного магнитного поля. Исследована устойчивость Орра-Зоммерфельда при воздействии различных возмущающих факторов, таких как плотность, паросодержание, поперечное постоянное магнитное поле. Выведено уравнение Орра-Зоммерфельда для неньютоновской жидкости. Исследована устойчивость неньютоновской жидкости.

Orra-Zommerfeld equation for flow with variable properties and transversal constant magnetic field influence is obtained. Orra-Zommerfeld stability for flow with variable properties such as content of steam, density and transversal constant magnetic field influence has been studied. Orra-Zommerfeld equation for non-Newtonian liquid is investigated. Stability of non-Newtonian liquid is investigated.

$B_0$  – модуль вектора магнитной индукции, этот вектор перпендикулярный вектору скорости невозмущенного течения;

$I$  – общий символ, обозначающий три инварианта тензора  $e_{ia} = \frac{\partial u_i}{\partial x_a} + \frac{\partial u_a}{\partial x_i}$ ;

$h$  – полуширина канала;

$k = -\frac{\partial}{\partial x}(p - \lambda_2 I_2 - \lambda_3 I_3)$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  – коэффициенты модели трения неньютоновской жидкости;

$m$  – параметр,  $m \in [-1; 1]$ ;

$n$  – показатель степени в законе трения неньютоновской жидкости;

$t$  – время;

$U(y)$  – скорость основного течения, которая имеет лишь продольную компоненту;

$U_1$  – среднерасходная скорость;

$u$ ,  $v$  – продольная и поперечная составляющие скорости течения;

$u'(t, x, y)$ ,  $v'(t, x, y)$  – возмущающие продольная и поперечная составляющие скорости;

$x$ ,  $y$  – продольная и поперечная координаты;

$\alpha$  – волновое число;

$\beta = \beta_r + i\beta_i$ ,  $\beta_r$  – круговая частота колебания,  $\beta_i$  – коэффициент нарастания колебаний;

$c = \beta/\alpha = c_r + ic_i$ ,  $c_r$  – скорость распространения волн возмущений,  $c_i$  – инкремент нарастания возмущений;

$\varphi(y)$  – амплитуда возмущенной скорости;

$\gamma$  – истинное объемное пасодержание;

$\rho_0$  – минимальное значение плотности по сечению канала;

$\mu_0$  – минимальное значение динамического коэффициента вязкости по сечению канала;

$\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;

$\sigma$  – электропроводность.

**Безразмерные комплексы:**

$C = \frac{\mu_2 (kh)^2}{\mu_0^3}$  – параметр, характеризующий степень неньютоновского поведения жидкости;

$J_2 = -\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right)^n$  – безразмерное  $I$ ;

$M = \frac{B_0^2 h \sigma}{\mu_0}$  – безразмерный параметр магнитного воздействия;

$R = \frac{Vh}{\nu}$  – число Рейнольдса для неньютоновской жидкости;

$Re = 2U_1 h \mu_0 / \rho_0$  – число Рейнольдса;

$$\tilde{u} = u \frac{\mu_0}{kh^2}, \quad \tilde{v} = v \frac{\mu_0}{kh^2}, \quad \tau = \frac{tkh}{\mu_0},$$

$$P = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\mu_0}{kh^2} \right)^2 (P - \lambda_2 I_2 - \lambda_3 I_2) - \text{безразмерные ве-}$$

личины скорости, времени и давления;

$$V = \frac{kh^2}{\mu_0} - \text{безразмерная скорость;}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha h, \quad \tilde{\rho} = \rho/\rho_0, \quad \tilde{\mu} = \mu/\mu_0, \quad \tilde{U} = U(y)/U_1, \quad \tilde{c} = c/U_1,$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi(y)/(U_1 \rho_0 h) - \text{безразмерные величины.}$$

В последнее десятилетие широкое распространение в различных областях промышленности получил принцип дискретно-импульсного ввода энергии (ДИВЭ) [1]. Важной особенностью процессов ДИВЭ является турбулизация потока [2]. Поэтому очень важно уметь рассчитать критерий, характеризующий переход ламинарного течения в турбулентное. Такого рода задачи являются актуальными при исследовании малогабаритных систем охлаждения, например, компьютерных чипов, элементов радиоэлектронной аппаратуры, где каналы очень узкие, а течение двух- или однофазное, можно считать плоскопараллельным. Именно в такого рода ситуациях четко проявляется преимущества принципа ДИВЭ. К такому же классу задач относятся задачи устойчивости течения не-newтоновских жидкостей в роторно-пульсационных аппаратах.

Устойчивость течения зависит от различных факторов, например, таких как переменность вязкости и плотности среды, наличие или отсутствие паровой фазы, воздействие магнитных и электрических полей.

В данной работе при исследовании условий возникновения турбулентности используется го-могенная модель двухфазного потока. Вследствие чего скорости и температуры фаз можно принять одинаковыми. Предполагается, что по сравнению с поперечным продольный теплообмен пренебрежимо мал, поэтому им пренебрегаем. При этом плотность  $\rho$  и вязкость  $\mu$  вводятся как функции паросодержания, температуры и поперечной координаты.

Для определения критерия перехода использовался метод линейных возмущений [2]. Это значит, что на основное течение накладываются малые возмущения и поле скоростей выглядит следующим образом:

$$u(t, x, y) = U(y) + u'(t, x, y), \quad v(t, x, y) = v'(t, x, y). \quad (1)$$

Предполагается, что температура двухфазной среды, плотность и вязкость зависят лишь от поперечной координаты  $y$ . Следовательно, можно ввести функцию тока  $\psi$ , для пульсационных составляющих скорости в виде:

$$\rho u' = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi = \varphi(y) \exp[i(\alpha x - \beta t)], \quad (2)$$

После подстановки выражений (1) в уравнение Навье-Стокса

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \operatorname{div} \vec{V}) + \sigma B_0^2 u,$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] +$$

$$+ 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \operatorname{div} \vec{V}), \quad (3)$$

$$+ 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \operatorname{div} \vec{V}),$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0.$$

получаем с учетом (2) и последующей линеаризацией и обезразмериванием аналог уравнения Ора-Зоммерфельда

$$\frac{i \tilde{\alpha} \operatorname{Re} \tilde{\rho}^4}{2} \left( (\tilde{U} - \tilde{c}) (\tilde{\varphi}'' - \tilde{\alpha}^2 \tilde{\varphi}) - \tilde{U}'' \tilde{\varphi} \right) - \tilde{\mu} \tilde{\rho}^3 \tilde{\varphi}'''' +$$

$$+ (3 \tilde{\mu} \tilde{\rho}^2 \tilde{\rho}' - 2 \tilde{\rho}^3 \tilde{\mu}') \tilde{\varphi}'''' +$$

$$+ (2 \tilde{\alpha}^2 \tilde{\mu} \tilde{\rho}^3 + 4 \tilde{\rho}^2 \tilde{\mu}' \tilde{\rho}' - 6 \tilde{\mu} \tilde{\rho} (\tilde{\rho}')^2 - \tilde{\rho}^3 \tilde{\mu}'' + 3 \tilde{\mu} \tilde{\rho}^2 \tilde{\rho}'' + M \tilde{\rho}^3) \tilde{\varphi}'' +$$

$$+ (2 \tilde{\alpha}^2 \tilde{\rho}^3 \tilde{\mu}' - 3 \tilde{\alpha}^2 \tilde{\mu} \tilde{\rho}^2 \tilde{\rho}' - 4 \tilde{\rho} \tilde{\mu}' (\tilde{\rho}')^2 + 6 \tilde{\mu} (\tilde{\rho}')^3 + \tilde{\rho}^2 \tilde{\rho}' \tilde{\mu}'' +$$

$$+ 2 \tilde{\rho}^2 \tilde{\mu}' \tilde{\rho}'' - 6 \tilde{\mu} \tilde{\rho} \tilde{\rho}' \tilde{\rho}'' + \tilde{\mu} \tilde{\rho}^2 \tilde{\rho}''' - M \tilde{\rho}^2 \tilde{\rho}') \tilde{\varphi}' +$$

$$+ (2 \tilde{\alpha}^2 \tilde{\mu} (\tilde{\rho}')^2 \tilde{\rho} - \tilde{\alpha}^4 \tilde{\mu} \tilde{\rho}^3 - \tilde{\alpha}^2 \tilde{\rho}^3 \tilde{\mu}'' - \tilde{\alpha}^2 \tilde{\mu} \tilde{\rho}^2 \tilde{\rho}''') \tilde{\varphi} = 0. \quad (4)$$

Здесь штрих означает производную по координате  $y$ . По знаку величины  $c_i$  судят об эволюции возмущений. При  $c_i < 0$  – возникающие возмущения в потоке затухают, при  $c_i > 0$  – нарастают. Значение  $c_i = 0$  соответствует смене режимов течения (рис. 1).

Уравнение (3) и, следовательно, (4) справедливо лишь при действии поперечного постоянного магнитного поля, когда магнитные числа Рейнольдса малы и индуцированным магнитным полем можно пренебречь по сравнению с наложен-

ным. Если на поток не действует магнитное поле и теплофизические свойства потока постоянные – уравнение (4) трансформируется в классическое уравнение Орра-Зоммерфельда.

При определении критерия перехода режима течения необходимо найти собственные значения уравнения (4) при  $c_i = 0$ . Для этого используется программа написанная на основе метода Галеркина [3] с помощью пакета Mathematica. Собственные значения уравнения (4) определялись в виде кривой  $\alpha = \alpha(\text{Re})$ , которая разделяет области устойчивых и неустойчивых возмущений. Програм-

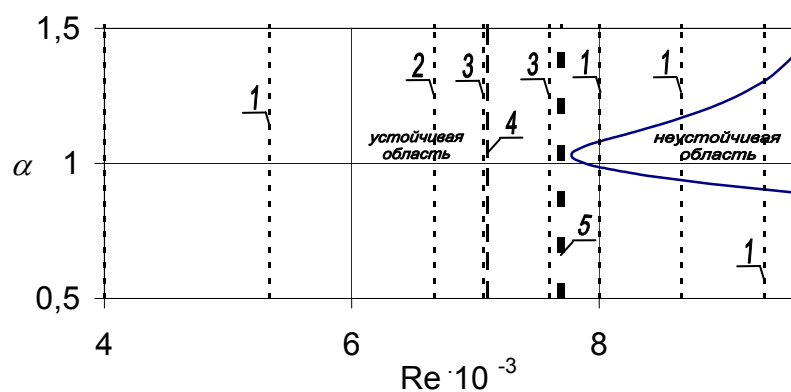


Рис. 1. Граница устойчивости потока при  $\bar{\rho} = 1, \bar{\mu} = 1, M = 0$ .  
1 – данные работы [6], [7], 2 – [8], 3 – [7], 4 – [9], 5 – [5].

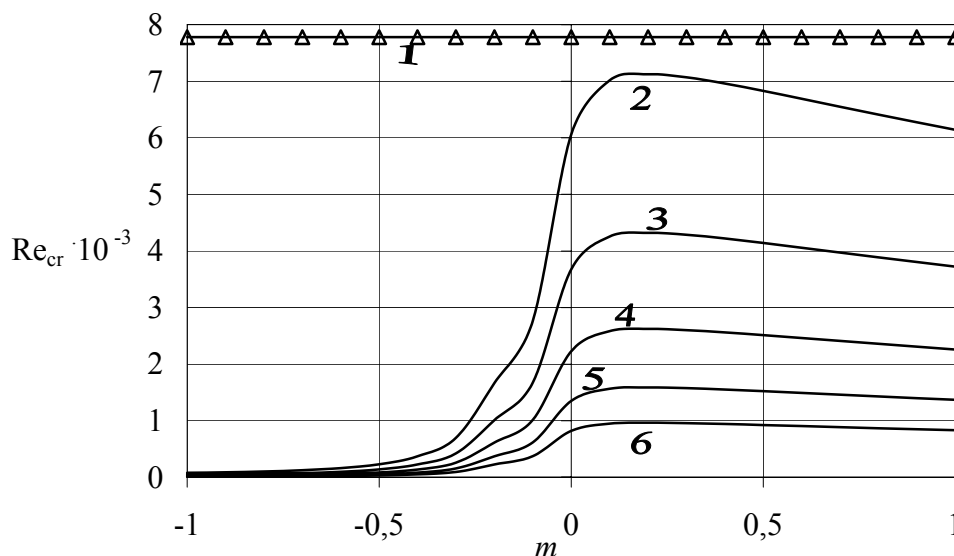


Рис. 2. Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра  $m$  при наличии паровой фазы.  
1 –  $\gamma = 0$ ; 2 – 0,1; 3 – 0,3; 4 – 0,5; 5 – 0,7; 6 – 0,9.

ма расчета была опробованна в работе [4]. Результаты расчета при  $\tilde{\rho} = 1$ ,  $\tilde{\mu} = 1$ ,  $M = 0$  представлены на рис. 1. Видно, что расчетная кривая с точностью до 1,3 % согласуется с данными работы Оржега [5].

Минимальное (критическое) значение числа Рейнольдса  $Re_{cr}$ , разделяющее указанные области, представляет собой критерий устойчивости течения, ниже которого все возмущения затухают.

Была исследована устойчивость течения с переменной плотностью по поперечному сечению канала с наличием паровой фазы при различных значениях  $\gamma$  – истинного объемного содержания (рис. 2). Плотность среды определялась по формуле

$$\rho = \rho_0 (1 + m\gamma^2). \quad (5)$$

При малом давлении пара, его с хорошим приближением можно рассматривать как идеальный газ, тогда давление и плотность связаны между собой линейной зависимостью, что следует из уравнения Клапейрона для идеального газа [10]. Характер полученных зависимостей практически повторяет зависимость критического числа Рейнольдса от формпараметра профиля скоростей в области с неравным нулю градиентом давления [2].

Проведенное исследование показывает, что вскипание приводит к турбулизации потока и снижению критического числа Рейнольдса. Цен-

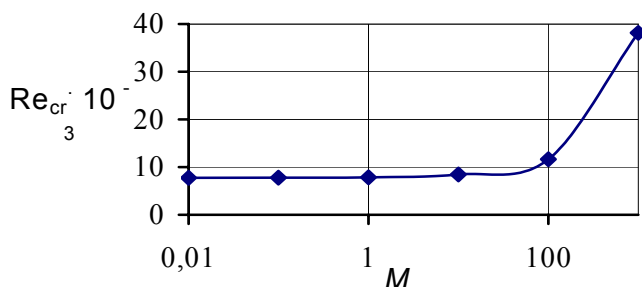
тры парообразования служат источником возникновения дополнительных пульсаций и тем самым турбулизируют поток. Исследование влияния паросодержания на критическое число Рейнольдса проведено в [4].

Далее была исследована устойчивость течения Пуазейля при влиянии поперечного постоянного магнитного поля (рис. 3 и рис. 4). Такого рода исследования важны, например, при жидком охлаждении компьютерных чипов, где присутствие магнитного поля, влияет на гидродинамику течения. Уравнение Орра-Зоммерфельда (4) исследовалось с учетом влияния параметра магнитного воздействия ( $M \neq 0$ ).

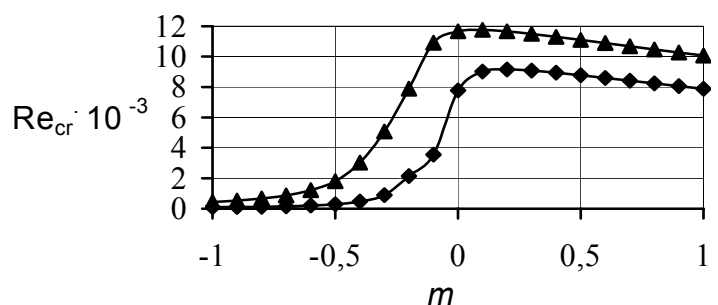
При увеличении параметра магнитного воздействия критическое число Рейнольдса возрастает, т.е. магнитное поле способствует стабилизации течения и затягиванию начала перехода к турбулентному режиму до более высоких чисел Рейнольдса, что хорошо согласуется с выводами, приведенными в [11].

Если влияние магнитного поля приводит к стабилизации течения, то наличие паровой фазы оказывает дестабилизирующее влияние на устойчивость потока, т.е. турбулизирует поток, что подтверждают данные, приведенные на рис. 5.

В случае неньютоновской жидкости уравнения движения с учетом обезразмеривания в [12] примет вид:



**Рис. 3.** Влияние параметра магнитного воздействия  $M$  на критическое число Рейнольдса.



**Рис. 4.** Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра  $m$  при влиянии поперечного магнитного поля. 1 –  $M = 0$ ; 2 – 100.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) - \\ &- \frac{C}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( 2J_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ J_2 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right] \right\}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) - \\ &- \frac{C}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ J_2 \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2J_2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) \right\}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразовав (6) с учетом (1) и соотношений  $u' = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ,  $v' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ ,  $\Psi = \varphi(y) \exp[i(\alpha x - \beta t)]$ , (7), лианеризовав и обезразмерив по аналогии с

описанным ранее случаем, получаем аналог уравнения Орра-Зоммерфельда при  $\tilde{\rho} = 1$ ,  $\tilde{\mu} = 1$ ,  $M = 0$  для неньютоновской жидкости:

$$\begin{aligned} C \left( n(n^2 - 1) \tilde{\varphi}'' (\tilde{U}'')^2 (\tilde{U}')^{n-2} + \tilde{\alpha}^4 \tilde{\varphi} (\tilde{U}')^n + \right. \\ \left. + \alpha^2 (n-1) n \tilde{\varphi} (\tilde{U}'')^2 (\tilde{U}')^{n-2} + \alpha^2 n \tilde{U}''' \tilde{\varphi} (\tilde{U}')^{n-1} \right) + \\ + C \left( n(n+1) \tilde{U}''' \tilde{\varphi}'' (\tilde{U}')^{n-1} + \right. \\ \left. 2n(n+1) \tilde{U}'' \tilde{\varphi}''' (\tilde{U}')^{n-1} - 2n\alpha^2 \tilde{\varphi}' \tilde{U}'' (\tilde{U}')^{n-1} \right) + \\ + C \left( \alpha^2 (n-2) \tilde{\varphi}'' (\tilde{U}')^n + (1+n) (\tilde{U}')^n \tilde{\varphi}'''' \right) + \\ + \alpha^4 \tilde{\varphi} - 2\alpha^2 \tilde{\varphi}'' + \varphi'''' + \\ + Ri\tilde{\alpha} \left( (\tilde{\varphi}'' - \tilde{\alpha}^2 \tilde{\varphi}) (\tilde{U} - \tilde{c}) - \tilde{\varphi} \tilde{U}'' \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

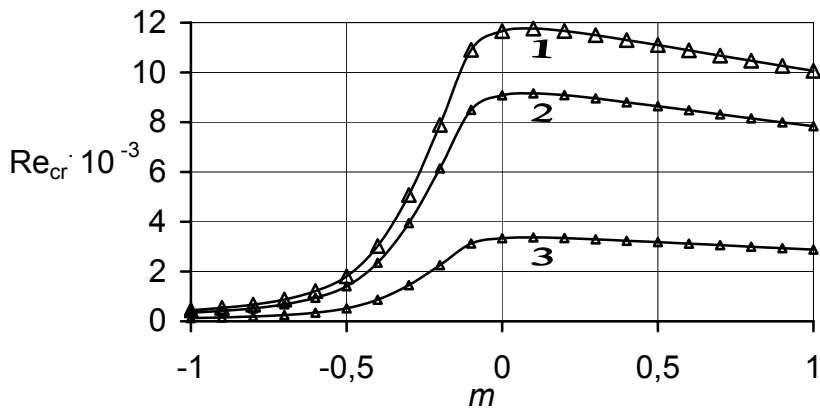


Рис. 5. Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра  $m \in [-1; 1]$  при влиянии поперечного магнитного поля с учетом наличия паросодержания. 1 –  $M=100$ ,  $\gamma=0$ ; 2 –  $100$ ,  $0,1$ ; 3 –  $100$ ,  $0,5$ .

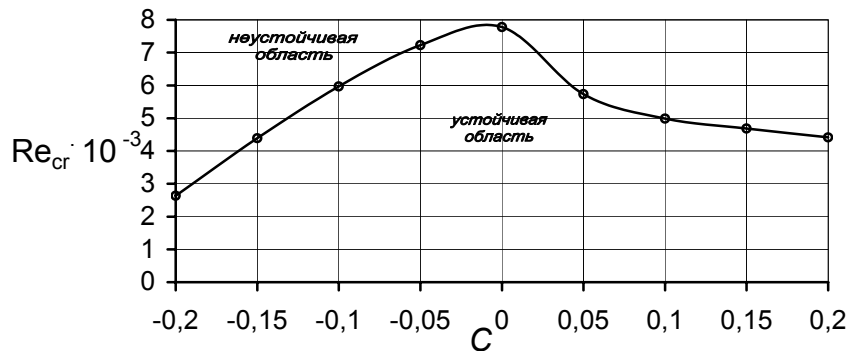


Рис. 6. Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра  $C$  для неньютоновской жидкости при  $n = 2$ .

На рис. 6 приведена кривая отделяющая область с затухающими возмущениями (устойчивая область) от области с нарастающими возмущениями (неустойчивая область) в потоке для неньютоновской жидкости при  $n = 2$ .

### Выводы

1. В результате исследования получено уравнение Орра-Зоммерфельда, учитывающего различные возмущающие факторы, такие как неравномерность теплофизических свойств по поперечному сечению канала, наличие либо отсутствие паровой фазы в потоке и поперечное магнитное поле.

2. Наличие паровой фазы турбулизирует поток, а влияние магнитного поля стабилизирует и затягивает переход до более высоких чисел Рейнольдса.

3. Получено уравнение Орра-Зоммерфельда для неньютоновской жидкости и проведено исследование устойчивости неньютоновской жидкости при  $n = 2$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Долинский А.А., Басок Б.И., Гулый С.И., Накорчевский А.И., Шурчкова Ю.А. Дискретно-импульсный ввод энергии в теплотехнологиях.– Киев: ИТТФ НАНУ, 1996.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– Москва: Издательство иностранной литературы, 1956.– 528 с.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина.– Москва: Мир, 1988.– 352 с.
4. Сорокина Т.В. Исследование неустойчивости двухфазного потока с переменными свойствами// Пром. теплотехника. Приложение к журналу.– Т. 25.– № 4.– 2003 г.
5. В.В. Струминский// ДАН.– 1963.– Т. 153.– № 3.
6. В.В. Козлов, М. П. Рамазанов. Экспериментальное исследование устойчивости течения Пуазейля. Известия Сибирского отделения АН СССР.– 1981.– № 8.– Вып. 2.
7. Nishioka M., Iida S., Ichikawa Y. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow.– J. Fluid Mech.– 1975.– v.72.
8. Karnitz M. A., Potter M. C., Smith M. C. An experimental investigation of transition of a plane Poiseuille flow.– Fluids Engng.– 1974.– v. 96.
9. В.В. Струминский, Б.Ю. Скобелев. Нелинейная нейтральная кривая для течения Пуазейля. Доклады Академии наук СССР.– 1980.– Т. 252.– №3.
10. Кириллин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е. Техническая термодинамика.– Москва: Энергия, 1974.– 447 с.
11. Бай Шу-И, Магнитная газодинамика и динамика плазмы.– Москва: Мир, 1964.– 304 с.
12. В. Е. Аеров, Б. А. Коловандин, Устойчивость течения неньютоновской жидкости в плоском канале// Тепло- и массообмен неньютоновских жидкостей.– Москва.– Энергия.– 1968.– С. 137-145.

Получено 27.09.2004 г.