

УДК 532.517.4

Долинский А.А., Авраменко А.А., Басок Б.И.

Институт технической теплофизики НАН Украины

ДИСКРЕТНО-ИМПУЛЬСНЫЙ ВВОД И ТРАНСФОРМАЦИЯ ЭНЕРГИИ – НОВЫЙ ПОДХОД К ВОЗДЕЙСТВИЮ НА МНОГОФАКТОРНЫЕ СИСТЕМЫ. ЧАСТЬ I.

КЛАССИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ГРУПП

Наведено основи різних теоретичних підходів, що застосовуються при дослідженні багатфакторних процесів і систем. Одним з таких підходів є принцип дискретно-імпульсного введення та трансформації енергії, розроблений в Інституті технічної теплофізики НАН України. Показано, що цей підхід є не тільки новою концепцією, яка лежить в основі багатьох енергоощадних технологій, але також являє собою діючий науковий принцип, що дозволяє вирішувати багато наукових проблем різноманітних напрямків із врахуванням багатфакторності впливу різного роду збурень. В якості першого прикладу ефективного дослідження багатфакторних систем розглянуто основи групових методів теорії Лі.

Приведены основы различных теоретических подходов, применяемых при исследовании многофакторных процессов и систем. Одним из них является принцип дискретно-импульсного ввода и трансформации энергии, разработанный в Институте технической теплофизики НАН Украины. Показано, что этот подход является не только новой концепцией, которая лежит в основе многих энергосберегающих технологий, но также представляет собой действенный научный принцип, который позволяет решать многие научные проблемы разнообразных направлений с учетом многофакторности воздействия различного рода возмущений. В качестве первого примера эффективного исследования многофакторных систем рассмотрены основы групповых методов теории Ли.

The work presents bases of different theoretical approaches used at research of multifactor processes and systems. One of them is the principle of discretely-impulsive input and transformation of energy, developed in the Institute of Engineering Thermophysics of NAS of Ukraine. It is shown that this approach is not only a new conception which lies in the bases of many energy-saving technologies, but also is an effective scientific principle which allows to make up many scientific problems of various directions, taking into account multifactor influences of a different sort of indignations. The base of group methods of Lee theory are considered as the first example the multifactor systems effective research.

C_i – константи; $i = 1...4$;

H – гамильтониан системи;

p – обобщенний імпульс, тиск;

q – обобщенна координата;

t – час;

u – швидкість;

v – інфінітезимальний генератор;

x, y, z – декартові координати.

Введение

Развитие новых энергосберегающих технологий, используемых в различных областях промышленности, таких как химическая, фармацевтическая, перерабатывающая, пищевая и др., влечет за собой создание новых экономически выгодных и эффективных промышленных аппаратов. В Институте технической теплофизики (ИТТФ) Национальной академии наук Украины разработано новое теоретическое и технологическое инновационное направление, называемое

принципом дискретно-импульсного ввода энергии (ДИВЭ), которое ориентировано на интенсификацию процессов тепломассопереноса в одно- и многофазных системах. По своей природе эти системы являются многофакторными, так как в них происходит реализация многих механизмов, обусловленных воздействием различных факторов.

Кратко идею принципа ДИВЭ можно сформулировать следующим образом [1]: для достижения эффективного энергосбережения необходимо вводимую в систему энергию не распределять

по всему технологическому рабочему объему, а сконцентрировать в локальных и дискретно-разобренных точках среды для дальнейшей импульсной трансформации с целью достижения необходимых физических эффектов. Главная цель при этом состоит в локальной интенсификации тепломассообменных и гидродинамических процессов в технологических средах, а также создании методов оптимизации и способов управления ими. В ряде работ достаточно детально изложены основные идеи принципа ДИВЭ [1-21]. Как правило, интенсификация тепломассообменных процессов происходит при образовании или схлопывании паровых пузырьков, так как именно в эти моменты в окрестности пузырька образуются мощные динамические импульсы температуры и давления, а также при колебании межфазной поверхности пузырька, турбулизации потока, дроблении жидких или парогазовых дисперсных включений гетерогенной жидкостной системы.

Для эффектов гидродинамического дробления жидких или парогазовых дисперсных включений гетерогенной жидкостной системы характерные времена разрушения межфазной границы соответствуют периоду собственных колебаний соответствующего включения. Очевидно, что процесс дробления имеет резонансный характер и проявляется, как правило, при совпадении собственной частоты колебаний дисперсного включения и частоты внешнего возмущающего воздействия различного происхождения. Период собственных колебаний газового пузырька размером в 1 микрон составляет 150 нс, а жидкой частички аналогичного размера — 50 нс, т.е. времена дробления соответствуют субмикросекундному или наносекундному масштабу. При этом глубина основного воздействия энергетических потоков и основные диссипативные эффекты реализуются на расстояниях в 2...5 нм. Это обстоятельство и предопределяет линейный наномасштабный аспект применения принципа ДИВЭ.

Реализация принципа ДИВЭ возможна при использовании различных физических явлений и процессов, но главным образом путем реализации действий или комбинации действий следующих теплофизических эффектов: сброса или повышения давления в газо(паро)жидкостной

среде, адиабатного вскипания, гидравлического удара, ударной волны давления или разрежения, сдвигового напряжения, локальной турбулентности, кавитации, фазовых переходов I или II рода.

Как следует из вышесказанного, динамика реальных процессов, протекающих в аппаратах и установках, в которых реализуется принцип ДИВЭ, определяется воздействием многих факторов. Следовательно, для точного моделирования таких процессов необходим адекватный учет характера влияния каждого фактора. При этом интенсивность воздействия того или иного эффекта может усиливаться или ослабляться другими факторами. В этом случае принципы мультипликативности и суперпозиции учета отдельных факторов неприемлемы, и, значит, системы, реализующие принцип ДИВЭ, следует рассматривать как многофакторные системы, моделирование которых необходимо проводить с использованием современных аналитических и численных методов. Таким образом, для точного моделирования сложных процессов и явлений, присущих ДИВЭ, упрощенные теоретические подходы являются малоэффективными. Требование высокой точности прогнозирования указанных процессов приводит к необходимости использования современных аналитических и численных подходов, позволяющих исследовать возникающие эффекты и явления с разных точек зрения и, следовательно, выявить ранее скрытые закономерности. Значительным достижением в этом исследовании является разработка и создание модели динамики единичного парового пузырька [6]. Предложенная в [6] теплофизическая модель, в отличие от ранее разработанных, является физически достоверной и без дополнительных ограничений одинаково хорошо представляет поведение парового или парогазового пузырька при любых начальных условиях. Эта модель позволяет получить информацию относительно кинетических, динамических и энергетических характеристик растущего или сжимающегося пузырька. На ее основе можно определить скорость тепломассопереноса и массопереноса через межфазную границу пузырька, толщину пограничного теплового слоя. Предложенная модель динамики парового и парогазового пузырька является универсальной и предназ-

начена для прогнозирования закономерностей эволюции пузырька в жидкости, так как учитывает все физические факторы, влияющие на поведение пузырька, без ограничения влияния того или иного эффекта на различных стадиях процесса. Эта модель позволяет при минимальном количестве допущений описывать поведение пузырька во всем температурном интервале существования жидкой фазы.

Процессы, происходящие при дискретно-импульсном вводе энергии носят существенно нестационарный характер за счет резкого изменения параметров состояния в короткие промежутки времени. Поэтому эти процессы можно рассматривать как неустойчивые процессы и использовать для их описания методы теории неустойчивости и теории катастроф. Очевидно, такой подход позволит по-новому взглянуть на характер протекания процессов ДИВЭ.

Задачи теплофизики (в том числе и задачи, описывающие процессы ДИВЭ) чаще всего формулируются в виде систем дифференциальных уравнений, для решения которых используются самые разнообразные методы. Эти методы представляют собой отдельные алгоритмы, ничем не связанные между собой. Исследователь применяет тот метод, с которым он наиболее знаком, или тот, который он (исследователь) считает наиболее адекватным в данной ситуации. Такой подход приводит к нахождению частных решений уравнений, и, естественно, при этом существует вероятность того, что упускаются другие возможные решения, а, следовательно, и физические закономерности. Теория Софуса Ли (теория групп Ли) позволила создать универсальный математический аппарат исследования дифференциальных уравнений, который часто позволяет преодолеть указанные трудности.

По своей идеологии к групповым методам примыкают методы ренормализационной группы (ренормгруппы). Эти методы были первоначально развиты в квантовой теории поля [22, 23]. Затем эти методы успешно использовались для анализа критических явлений при фазовых переходах второго рода. Позже они нашли применение и для описания развитой турбулентности, что является очень важным при моделировании процессов ДИВЭ, так как эти процессы отлича-

ются высокой степенью развитости турбулентных процессов переноса.

В настоящее время необходим строгий учет всевозможных эффектов, которые сопровождают реальные процессы. Такой учет невозможен без численных расчетов турбулентных потоков. Это, в свою очередь, требует создания адекватных моделей турбулентности, которые необходимо использовать при создании численных алгоритмов. Существует несколько направлений численного исследования турбулентности, которые используют различные концепции описания турбулентности. Эти подходы будут рассмотрены далее.

Еще одной характерной чертой современного этапа развития науки являются исследования, проводимые на стыке различных дисциплин. Методы, основанные на принципе ДИВЭ, использовались в ИТТФ НАНУ при изучении процессов ферментации как при экспериментальных, так и при теоретических исследованиях. При теоретических исследованиях использовалась концепция биоконвекции, которая, по сути, является сочетанием теплофизических, гидродинамических и биологических подходов.

Классические групповые методы анализа

Многие физические явления проявляют свойства симметрии, что отражается в их математическом описании. Зачастую это позволяет использовать групповые методы [24, 25] (методы групп симметрии) для исследования различных процессов. Группы Ли позволяют: 1 – сводить сложные нелинейные задачи к более простым линейным; 2 – по одному частному решению находить остальные всевозможные решения уравнений в частных производных; 3 – определять автомодельные переменные и соответствующие автомодельные формы дифференциальных уравнений; 4 – понижать порядок дифференциального уравнения; 5 – выводить законы сохранения на основе вариационных симметрий, используя теорему Нетер.

Второе свойство из приведенного списка играет существенную роль при исследовании уравнений, имеющих относительно простой вид. Та-

кие уравнения допускают большое количество симметрий и с их помощью можно построить бесконечно много решений, исходя из какого-либо простейшего решения данного уравнения. При этом каждое новое решение может удовлетворять различным начальным или граничным условиям. В этом случае исследователю достаточно выбрать нужный вид решения для конкретной задачи. Конечно, для этого необходимо обладать каким-то опытом использования групп и хорошо понимать физику изучаемого процесса.

Симметрии дифференциальных уравнений, описывающих тот или иной физический процесс, тесно связаны со свойством автомодельности (третье свойство из приведенного выше списка). Это свойство позволяет редуцировать систему дифференциальных уравнений в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение или уменьшать количество независимых переменных. Во многих случаях это существенно облегчает аналитический или численный анализ физического процесса. Кроме того, автомодельные формы переменных целесообразно применять в экспериментальных исследованиях, так как они указывают способ обработки и обобщения опытных данных.

Пятое свойство отражает тот факт, что на основе симметрий можно выводить законы сохранения систем, которые описываются уравнениями, являющимися уравнениями Эйлера-Лагранжа для определенного функционала. Теорема Нетер является, по сути, единственным систематическим алгоритмом, позволяющим определять законы сохранения.

Кроме групп Ли, разработана теория групп Ли-Бэклунда (касательных преобразований). Коэффициенты инфинитезимальных генераторов касательных преобразований зависят не только от независимых переменных и функций (как в теории групп Ли), но также от производных функций по независимым переменным. Однако этот тип групп редко применяется для уравнений, встречающихся в конкретных приложениях.

Алгоритм использования групп Ли для анализа дифференциальных уравнений представлен на рис. 1, а его подробное описание дано в монографии [26]. Принцип ДИВЭ предполагает реализацию разнообразных физических процессов, которые подчиняются различным математическим

моделям, допускающим симметрии. Дискретно-импульсный характер ввода энергии приводит к тому, что в процессах ДИВЭ происходит распространение различных видов возмущения, в том числе и солитонов, которые получили свое название из-за частицеподобных свойств. Солитонные возмущения описываются уравнением Кортевега – де Фриза [27], симметрии которого выражаются через следующий инфинитезимальный генератор [24]:

$$v = (C_1 + C_3 t + C_4 x) \frac{\partial}{\partial x} + (C_2 + 3C_4 t) \frac{\partial}{\partial t} + (C_3 - 2C_4 u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Подалгебры Ли этого генератора позволяют получить решения для нелинейных бегущих волн в виде либо "односолитонных" решений, выраженных через гиперболические функции, либо в виде "кноидальных" волн, выраженных через эллиптическую функцию Якоби.

Все процессы ДИВЭ характеризуются большим разнообразием теплофизических процессов. Групповой анализ многих из этих процессов проведен в работах [26, 28]. Кроме того, групповой анализ гидродинамических и теплообменных процессов параболических течений проведен в [29-38], эллиптических – в [39-45], когерентных турбулентных структур – в [46], разгонных течений – в [47], процессов схлопывания паровых каверн – в [26]. В работе [48] была решена задача об осциллирующем течении около волнистой поверхности при воздействии магнитного поля. При этом использовался специфический тип симметрии, которая называется "принцип смещения Прандтля" (Prandtl's transposition principle) [49].

Часто нанопроцессы описываются в приближении гамильтонова подхода [50, 51], когда математическая формулировка задачи сводится к системе уравнений относительно гамильтониана H

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

где $i = 1, \dots, n$, n – размерность системы. Групповые методы анализа гамильтоновых систем имеют свои особенности. С деталями таких методов можно познакомиться в монографии [24].

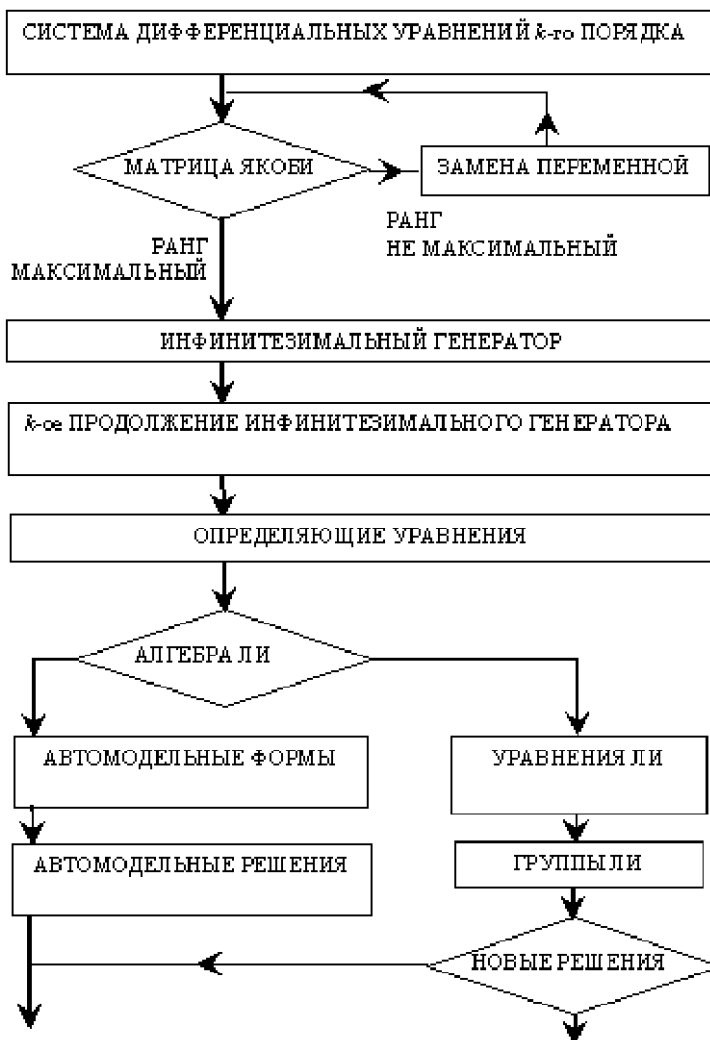


Рис. 1. Алгоритм использования групп Ли.

Важную информацию о характере исследуемого процесса дают законы сохранения. Такие законы можно легко строить на основе теоремы Нетер [52], которая связывает вариационные симметрии и законы сохранения. Законы сохранения сплошности среды (закон сохранения фазы), массы, импульса и энергии, записанные в общем виде, также эффективно используются при описании процессов ДИВЭ, например, в [53, 54] при исследовании процессов адиабатического вскипания перегретой жидкости, истекающей в область разрежения.

Другие подходы к изучению процессов ДИВЭ будут рассмотрены в последующих частях данной статьи.

Авторы выражают благодарность своим коллегам Иваницкому Г.К., Накорчевскому А.И., Шурч-

ковой Ю.А., Корчинскому А.А., Шевчуку И.В. и Кобзарю С.Г. за любезно оказанную помощь при проведении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долинский А.А., Басок Б.И., Накорчевский А.И. Адиабатически вскипающие потоки. — Киев: Наукова думка, 2001. — 207 с.
2. Долінський А.А. Сучасні технології — підприємствам України // Інвестиції. — 2001. — №2–3. — С. 106–111.
3. Долінський А.А. Принцип дискретно-імпульсного вводу енергії та його використання в технологічних процесах // Вісник АН УРСР. — №1. — С. 39–46.
4. Basok B., Dolinskiy A., Ivanitskiy G., Ryzhakova T. Dynamics of single droplets moving through liquid media // Book of Abstracts of the International Symposium on Liquid-Liquid Two-Phase Flow and Transport Phenomena. 1997. — Antalia (Turkey). Session 3. — 1997. — P. 26–28.
5. Dolinskiy A.A., Ivanitskiy G.K., Use of discrete-pulse energy input in various production processes // Proc. International Conf. on Transport Phenomena Science and Technology. — Beijing (China): Higher Education Press. — 1992. — P. 89–100.
6. Долинский А.А., Иваницкий Г.К. Теоретическое обоснование принципа дискретно-импульсного ввода энергии. I. Модель динамики одиночного парового пузырька // Промышленная теплотехника. — 1995. — 17. — №5. — С. 3–28.
7. Долинский А.А., Иваницкий Г.К. Теоретическое обоснование принципа дискретно-импульсного ввода энергии. II. Исследование поведения ансамбля паровых пузырьков // Промышленная теплотехника. — 1996. — 18. — №1. — С. 3–20.
8. Долинский А.А., Иваницкий Г.К. Принципы разработки новых энергосберегающих технологий и оборудования на основе методов дискретно-импульсного ввода энергии // Промышленная теплотехника. — 1997. — 19. — №4–5. — С.13–25.
9. Долинский А.А., Басок Б.И., Гулый И.С., Накорчевский А.И., Шурчкова Ю.А. Дискретно-импульсный ввод энергии в теплотехнологиях. — Киев: ИТТФ НАНУ, 1996. — 208 с.
10. Долинский А.А. Использование принципа дискретно-импульсного ввода энергии для со-

здания эффективных энергосберегающих технологий // ИФЖ. – 1996. – 69. – №6. – С. 35–43.

11. *Dolinskiy A.A., Ivanitskiy G.K.* The principle of discrete-pulse energy input – new approach to the development of efficient power-saving technologies // Ann.Review of Heat Transfer. Vol.XIII. – 2003. N.–Y, Wallingford (UK): Begell House Inc. P.47–83.

12. *Dolinskiy A.A., Ivanitskiy G.K.* Vapor-Gas Bubble Dynamics at Discrete-Pulse Energy Injection // Proc. International Seminar on Transient Phenomena in Multiphase Flow. – Dubrovnik (Jugoslavia). – 1987. – Part 4. – P.86–92.

13. *Dolinskiy A.A., Ivanitskiy G.K.* Collective effects of the behavior of a vapor bubble ensemble in superheated or supercooled liquids // Proc. International Conf. on Transport Phenomena Science and Technology. – Beijing (China): Higher Education Press. – 1996. – P. 225–233.

14. *Долинский А.А., Иваницкий Г.К., Корчинский А.А.* Пути интенсификации массообменных процессов при ферментации // Материалы I Всесоюзной конф. по комплексной механизации и автоматизации процессов в хим.-фарм. промышл. – Москва. – 1971. – С. 47–51.

15. *Долинский А.А., Басок Б.И., Накорчевский А.И.* Исследование процессов дробления включений при адиабатическом вскипании и затоплении струи потока эмульсии // Промышленная теплотехника. – 1998. – 20. – №5. – С. 3–4.

16. *Долинский А.А., Иваницкий Г.К., Корчинский А.А.* Особенности адсорбции молекул ПАВ на поверхности растущего пузырька // Теплофизика и теплотехника. – 1971. – №11. – С. 37–40.

17. *Dolinskiy A.A., Basok B., Shurchkova Ju.A.* Experimental study of the effect of sterilization of dispersed liquid systems // Heat Transfer Research. – 1995. – Vol.26. – №1–2. – P. 135–138.

18. *Dolinskiy A.A., Ivanitskiy G.K.* Heat and mass transfer on the interface at evaporation of fluid drops in air and superheated vapor // Proc. Sixth Intern. Drying Symposium (IDS'88). – Versailles (France). – 1988. – Vol.2, Section C. – P. 51–57.

19. *Долинский А.А., Басок Б.И.* Динамика роста паровых пузырьков вскипающей воды при резком сбросе давления // Докл. НАН Украины. – 1995. – №1. – С. 75–77.

20. *Долинский А.А., Басок Б.И., Шурчкова Ю.А.* Динамика схлопывания паровой каверны // Тру-

ды I Минского международного форума по тепло-массообмену (Тепломассообмен ММФ-88). – Т.4. – Минск: ИТМО АН БССР. – 1988. – С. 73–74.

21. *Долинский А.А., Накорчевский А.И.* Вскипающие адиабатные потоки через сужающие устройства // Промышленная теплотехника. – 1988. – 10. – №6. – С. 9–13.

22. *Stueckelberg E. C. G., Petermann A.* La normalisation des constantes dans la theorie des quanta – HELVETICA PHYSICA ACTA. – 1953. – 26. – № 5. – P. 499 – 520.

23. *Gell-Mann M., Low F.* Quantum electrodynamics at small distances // Phys. Rev. – 1954. – 95. – № 5. – P. 1300 – 1312.

24. *Олвер П.* Приложение групп Ли к исследованию дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1989. – 639 с.

25. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

26. *Авраменко А.А., Басок Б.И., Кузнецов А.В.* Групповые методы в теплофизике. – Киев: Наукова думка, 2003. – 484 с.

27. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 326 с.

28. *Авраменко А.А., Басок Б.И., Соловьев Е.Н.* Симметрии уравнений конвективного теплообмена и гидродинамики. – Киев: Наук. думка, 2001. – 96 с.

29. *Авраменко А.А., Кобзарь С.Г.* Приложение групп Ли к исследованию процессов нестационарного теплообмена около сферы в области малых чисел Рейнольдса // Промышленная теплотехника. – 1998. – 20, N 2. – С. 47–50.

30. *Авраменко А. А.* Группы Ли и автомодельные формы уравнений Прандтля // Прикладна гідромеханіка. – 1999. – 1 (73). – № 2. – С. 3–11.

31. *Авраменко А. А.* Групповой анализ теплогидродинамических процессов в турбулентных параболических течениях // Доповіді НАН України. – 1999. – 8. – С. 76–80.

32. *Авраменко А.А.* Автомодельный анализ турбулентных гидродинамических и температурных пограничных слоев // Теплофизика высоких температур. – 2000. – 38. – №3. – С. 452–457.

33. *Авраменко А. А.* Свойства симметрии турбулентных динамических и температурных пограничных слоев // Промышленная теплотехника. – 2000. – 22. – №5–6. – С. 29–36.

34. Шевчук И.В., Авраменко А.А. Ламинарный теплообмен вращающегося диска: уточнение и расширение базы данных точного численного решения // Промышленная теплотехника. – 2001. – 23. – №1–2. – С. 11–14.
35. Авраменко А.А. Уравнения пограничного слоя около поверхности произвольной формы // Доповіді НАН України. – 2001. – 4. – С. 95–99.
36. Avramenko A. A., Kobzar S.G., Shevchuk I.V., Kuznetsov A.V., Iwanisov L.T. Symmetry of turbulent boundary-layer flows: Investigation of different eddy viscosity models // Acta Mechanica. – 2001. – 151. – №1–2. – P. 1–14.
37. Авраменко А.А., Басок Б.И., Кузнецов А.В. Групповой анализ параметров внешней части турбулентного пограничного слоя // Промышленная теплотехника. – 2002. – 24 – №6. – С. 29–32.
38. Avramenko A.A., Kobzar S.G., Kuznetsov A.V., Bowen P.J. Application of the lie group theory to the analysis of turbulent flows in a turbulent layer utilizing different turbulent viscosity models // Int. J. Applied Mechanics and Engineering. – 2003. – 8. – №4. – P. 543–557.
39. Авраменко А.А., Басок Б.И., Соловьев Е.Н., Боуэн Ф.Дж., Сиерра-Эспиноза Ф. Симметрии турбулентных процессов теплообмена и гидродинамики // Промышленная теплотехника. – 2001. – 23. – №6. – С. 5–10.
40. Авраменко А.А., Басок Б.И. Симметрии сжимаемых течений // Доповіді НАН України. – 2002. – 4. – С. 91–97.
41. Авраменко А.А., Басок Б.И. Симметрии цилиндрических уравнений гидродинамики и конвективного теплообмена // Инж.-физ.журн. – 2002. – 75. – №3. – С. 38–43.
42. Авраменко А.А. Свойства симметрии и автомодельности уравнений конвективного теплообмена и гидродинамики // Теплофизика высоких температур. – 2002. – 40, № 3. – С. 424 – 435.
43. Авраменко А.А., Басок Б.И. Симметрии и автомодельность гидродинамических и тепловых процессов в сферических координатах // Прикладна гідромеханіка – 2002. – 4 (76). – №3. – С. 71–74.
44. Шевчук И.В., Авраменко А.А. Групповой анализ уравнений Навье-Стокса и энергии в конических зазорах и при нестационарном теплообмене вращающегося диска // Прикладна гідромеханіка – 2004. – 6 (78). – №1. – С. 73–76.
45. Авраменко А.А., Басок Б.И. Дискретные симметрии в теории гидродинамики и теплообмена // Прикладна гідромеханіка – 2004. – 6 (78). – № 4. – С. 3 – 8.
46. Авраменко А.А., Шевчук И.В., Кобзарь С.Г. Воздействие когерентных продольных структур на турбулентные вязкость и температуропроводность // Пром. теплотехника. – 1999. – 21. – № 4–5. – С. 22–31.
47. Авраменко А.А. Анализ нестационарных несжимаемых потоков в каналах различной формы на основе симметрий // Инж.-физ.журн. – 2001. – 74. – №5. – С. 63–74.
48. Cuevas S., Sierra F.Z., Avramenko A.A. Magnetic damping of steady streaming vortices in an oscillatory viscous flow over a wavy wall // Magnetohydrodynamics. – 2002. – 38. – №4. – С. 345–358.
49. Oberlack M. Asymptotic expansion, symmetry groups, and invariant solutions of laminar and turbulent wall-bounded flows // ZAMM. – 2000. – 80. – №11–12. – P. 791–800.
50. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. – М.: Мир, 1989. – 484 с.
51. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика – М.: Мир, 1984. – 582 с.
52. Noeter E. Invariante variationsprobleme // Nachr. Konig. Wissen. Gottingen, Math-Phys. – 1918. – K 1. – S. 235 – 257. (Имеется перевод: Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы – М.: Физматгиз, 1959. – С. 611–630.
53. Накорчевский А.И., Басок Б.И., Гаскевич И.В. Течение вскипающих жидкостей в длинных каналах и наступление критических режимов//Теплофизика высоких температур. – 1991. – 29. – 6. – С. 1121–1126.
54. Накорчевский А.И., Басок Б.И. Гидродинамика и теплоперенос в гетерогенных системах и пульсирующих потоках (под ред. А.А. Долинского). – Киев: Наукова думка, 2001. – 348 с.

Получено 22.02.2006 г.