

## СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ТЕЛ ПРИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Даний клас задач використовується для опису температурних полів, при дослідженні високоінтенсивних і імпульсних впливах на тіло або систему тіл при нестационарних режимах. Операційний метод розв'язання інтегро-дифференційного рівняння теплопровідності є найбільш прийнятним для опису температурних полів при екстремальних впливах на матеріали, оскільки виключає парадокс про нескінченне розповсюдження тепла. Проведено асимптотичні дослідження даних рішень і запропоновано метод обернення від зображень до оригіналу, припускаючи представлення розв'язків задач у вигляді суперпозиції параболічної, гіперболічної і інтегральної частин. Виявлено недоліки застосування методу Фур'є при розв'язанні дифференціальних рівнянь гіперболічного та інтегро-дифференційного типу. Запропоновано інтегральні співвідношення для вирішення теплових задач в просторі зображень за Лапласом; встановлено закономірність розв'язків даних рівнянь у полі зображень.

Данный класс задач используется для описания температурных полей, при исследовании высокоинтенсивных и импульсных влияниях на тело или систему тел при нестационарных режимах. Операционный метод решения интегро-дифференциального уравнения теплопроводности является наиболее приемлемым для описания температурных полей при экстремальных воздействиях на материалы, поскольку исключает парадокс о бесконечном распространении тепла. Проведены асимптотические исследования данных решений и предложен метод обращения от изображений к оригиналу, предполагая представлять решение задач в виде суперпозиции параболической, гиперболической и интегральной частей. Выявлены недостатки применения метода Фурье при решении дифференциальных уравнений гиперболического и интегро-дифференциального типа. Предложены интегральные соотношения для решения тепловых задач в пространстве изображений по Лапласу; установлена закономерность решения данных уравнений в поле изображений.

This class of tasks is used for description of the temperature fields, at research high-intensive and impulsive influences on a body or system of bodies at the unstationary modes. An operating method of decision of integro-differential equalization of heat conductivity is most acceptable to description of the temperature fields at the extreme influences on materials, as eliminates a paradox about endless distribution of heat. Asimptotics researches of these decisions are conducted and the method of appeal is offered from images to the original, supposing to present the decision of tasks as adding up of parabolic, hyperbolic and integral parts. The lacks of application of method of Fourier are exposed at the decision of differential equalizations of hyperbolic and integro-differential type. Integral correlations are offered for the decision of thermal tasks in space of images on Laplac; conformity to the law of decision of these equalizations is set in the signed field.

$a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, d_0, d_1$  – определяющие коэффициенты граничных условий;

$Bi, Fo$  – число Био, число Фурье;

$g(Fo)$  – компонента воздействия;

$R_{1,2}, R, X$  – термическое контактное сопротивление, линейный размер, безразмерная координата;

$T(X, Fo)$  – функция распределения температурного поля;

$z^{*, пар}, z^{*, гип}, z^{*, нам}$  – компонента воздействия параболического, гиперболического, интегро-дифференциального уравнения соответственно;

$j, \gamma, \mu, \omega, \psi$  – полином, корень трансцендентного уравнения, полиномиальный комплекс голоморфной функции источниковых компонент, полиномиальный комплекс трансцендентной функции в поле изображений;

$\Omega$  – комплекс голоморфности в поле изображения;

$\tau$  – время;

$\alpha_v(\tau), \beta_v(\tau)$  – функции релаксации теплового потока и внутренней энергии.

**Индексы верхние:**

\* – частная величина;

' – производная от величины;

$e, r$  – релаксационные константы внутренней энергии и теплового потока.

**Индексы нижние:**

$i, j, k, l, n$  – индексы суммирования;  
 $v$  – номер слоя материала.

## 1. Введение

В последние десятилетия в связи с созданием мощных излучателей повысилась актуальность проблемы взаимодействия интенсивных тепловых потоков с твёрдыми телами. В различных процессах обработки материалов концентрированными потоками энергии используется тепловое действие плазменного потока, лазерного или электронного луча. Создаются условия скачкообразного изменения температуры поверхности твёрдого тела или граничащей с ней среды (так называемый тепловой удар) [1-3].

Появилась существенная потребность в использовании тонкостенных конструкций, которые включают многослойность построения. Она может состоять из одного или нескольких слоёв, которые могут быть выполнены из разных материалов и иметь разные как механические, так и теплофизические характеристики. Наличие нескольких слоев позволяет существенно повысить механические свойства (характеристики) при экстремальных действиях. Использование многослойных конструкций в целях обеспечения прочности, тепло- и звукоизоляции существенно позволяет снизить материалоемкость и увеличить прочность изделия. В данной работе предложены интегральные соотношения для решения тепловых задач в пространстве изображений по Лапласу; установлена закономерность решения данных уравнений в поле изображений. Проведены асимптотические исследования данных решений и предложен метод обращения от изображений к оригиналу, предполагая представлять решение задач в виде суперпозиции параболической, гиперболической и интегральной частей. Выявлены недостатки применения метода

Фурье при решении дифференциальных уравнений гиперболического и интегро-гиперболического типа, описывающие процессы в средах с тепловой памятью; классический метод не предполагает учета предыстории материала – теплового потока  $q(X_v, \tau)$  и внутренней энергии  $U(X_v, \tau)$ , время релаксации внутренней энергии ( $\tau_e$ ) и время релаксации теплового потока ( $\tau_r$ ).

## 2. Математическая постановка задачи

Математическая модель задач нестационарной теплопроводности для составной системы с идеальным и неидеальным тепловым контактом с учетом тепловой памяти на стыках имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} & \tau_0^v \frac{\partial T_v(X_v, Fo)}{\partial Fo} + \tau_0^v \int_0^\infty \beta'_v(s) \frac{\partial T(X_v, Fo-s)}{\partial Fo} ds + \\ & + Fo_v^r \frac{\partial^2 T_v(X_v, Fo)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 T_v(X_v, Fo)}{\partial X_v^2} + \\ & + \int_0^\infty \alpha'_v(s) \frac{\partial^2 T_v(X_v, Fo-s)}{\partial X_v^2} ds + w_v^*(X_v, Fo), v = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (1)$$

Неоднородные условия представлены в виде:

$$w_v^*(X_v, Fo) = w_v(X_v, Fo) \cdot \left( \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau} + 1 \right); \quad (2)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} T_v(X_v, Fo)|_{Fo=0} &= f_{1v}(X_v); \\ \frac{\partial T_v(X_v, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{Fo=0} &= f_{2v}(X_v); \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} \left. a_0 \int_0^\infty \alpha_1(s) \frac{\partial T_1(X_1, Fo)}{\partial X_1} ds \right|_{X_1=0} = c_0 Bi_0 \left( \left[ f_0(Fo) - d_0 T_1(X_1, Fo) \right] \Big|_{X_1=0} + b_0 Fo_1^r \frac{\partial}{\partial Fo} \left[ f_0(Fo) - M_0 T_1(X_1, Fo) \right] \Big|_{X_1=0} \right); \\ \left. a_1 \int_0^\infty \alpha_v(s) \frac{\partial T_v(X_v, Fo)}{\partial X_v} ds \right|_{X_v=1} = c_1 Bi_1 \left( \left[ f_1(Fo) - d_1 T_v(X_v, Fo) \right] \Big|_{X_v=1} + b_1 Fo_v^r \frac{\partial}{\partial Fo} \left[ f_0(Fo) - M_0 T_v(X_v, Fo) \right] \Big|_{X_v=1} \right). \end{cases} \quad (4)$$

Условия на стыке:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} \alpha'_1(s) \frac{\partial T_1(X_1, Fo-s)}{\partial X_1} ds \Big|_{X_1=1} &= a_2 R_{1,2} [T_2(0, Fo) - T_1(1, Fo)]; \\ \int_0^{\infty} \alpha'_1(s) \frac{\partial T_1(X_v, Fo-s)}{\partial X_v} ds \Big|_{X_v=1} - \mu_{v+1,v} \int_0^{\infty} \alpha'_{v+1}(s) \frac{\partial T_{v+1}(X_{v+1}, Fo-s)}{\partial X_{v+1}} ds \Big|_{X_{v+1}=0} &= f_2(Fo). \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений, решение задачи (1) – (5) представим в виде суммы частных решений (принцип суперпозиции), которые формируются под влиянием следующих компонент воздействия: внешних граничных условий, условий на стыке пластин, источников тепла по сечению каждой пластины, начального распределения температуры и взаимного теплового влияния пластин.

Тогда, учитывая обобщенную форму решения линейных задач теории теплопроводности, решение представим в виде [4-6]:

$$\begin{aligned} T_v(X_v, Fo) &= \sum_{l=1}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n [\mu_{n,r}^v(X_v), \varphi_n] g_l^n(Fo) + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_l(P_k)}{\Psi(\varphi_n, P_k)} Q[\mu_{n,l,v}(X_v), P_k] \exp(-\gamma_k^2 Fo) \left. \right\} + \\ &+ z_v^*(X_v, Fo) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_n [\mu_{n,l,v}(X_v), \varphi_n] &= \frac{\mu_{n,l,v}(X_v)}{\varphi_0} - \\ &- \sum_{j=1}^n \Omega_{n-j} [\mu_{n-j,l,v}(X_v), \varphi_{n-j}] \frac{\varphi_j}{\varphi_0}, \end{aligned} \quad (7)$$

рекуррентное соотношение,

$$Q[\mu_{n,l,v}(X_v), P_k] = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n,l,v}(X_v) P_k^n, \quad (8)$$

$$\Psi(\varphi_n, P_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n P_k^n - \text{обобщенные целые функции,}$$

где  $P_k = \gamma_k^2 \frac{a_0}{R_0^2}$ ,  $\gamma_k$  – корни трансцендентного

$$(6) \text{ уравнения } \Psi(\varphi_n, \gamma) = 0. \quad (9)$$

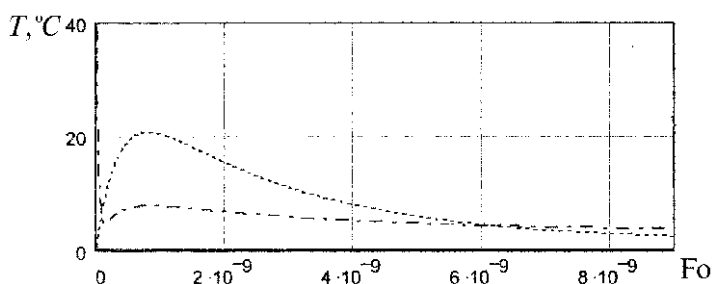
$$\begin{aligned} z_v^{*,nam}(X_v, Fo) &= z_v^{*,nap}(X_v, Fo) + z_v^{*,zun}(X_v, Fo) + \beta_v^* \cdot Fo_v^e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{n}{(n-2)!} \int_0^{Fo} (Fo-\theta)^{n-2} \frac{\partial^{2n}}{\partial X_v^{2n}} w_v(X_v, \theta) d\theta; \\ z_v^{*,nap}(X_v, Fo) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{Fo^n}{n!} \phi_v^{(2n)}(X_v) - \beta_v^* \sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{1}{n!} \int_0^{Fo} (Fo-\theta)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial X_v^{2n}} w_v(X_v, \theta) d\theta; \\ z_v^{*,zun}(X_v, Fo) &= Fo_v^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{(n+1) \cdot Fo^{n-2}}{(n-2)!} \phi_v^{(2n)}(X_v) + \beta_v^* \cdot Fo_v^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{n}{(n-2)!} \int_0^{Fo} (Fo-\theta)^{n-2} \frac{\partial^{2n}}{\partial X_v^{2n}} w_v(X_v, \theta) d\theta; \end{aligned} \quad (10)$$

(10)– частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1).

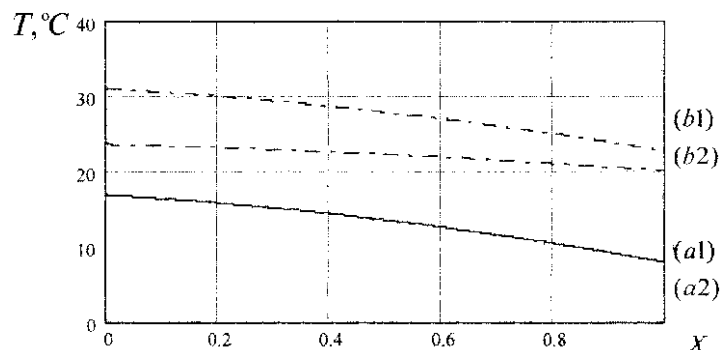
### 3. Численные параметрические исследования

В качестве примера рассмотрено уравнение (1) с граничными условиями первого второго рода и

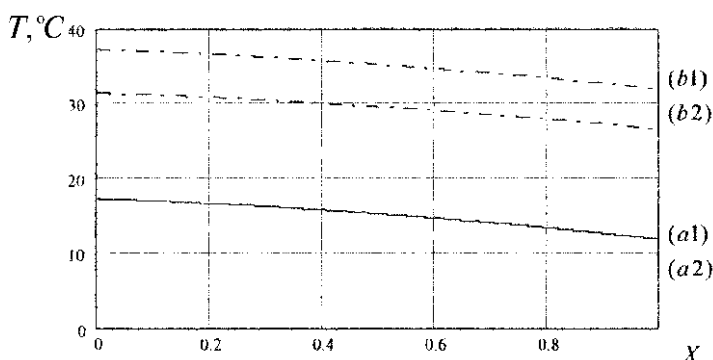
нулевыми начальными условиями. На рис.1 проведена сравнительная оценка результатов с параболическим и гиперболическим типами уравнений нестационарной теплопроводности. Заметим, что при увеличении слоёв пластины, эффект памяти будет постепенно исчезать с повышением



**Рис. 1.** Температурное поле поверхностного слоя  $Al_2O_3$ , толщиной  $L = 10^{-3}m$  при постоянном законе распределения температуры  $T = 1500\text{ }^\circ C$  первой пластины с толщиной  $\delta = 0,1 \cdot 10^{-3}m$ .



**Рис. 3.** Распределение температуры по толщине в момент времени  $Fo = 10^{-9}$  при постоянном законе распределения температуры  $T = 500\text{ }^\circ C$  (a),  $T = 1500\text{ }^\circ C$  (b).



**Рис. 2.** Распределение температуры по толщине в момент времени  $Fo = 10^{-11}$  при постоянном законе распределения температуры  $T = 500\text{ }^\circ C$  (a),  $T = 1500\text{ }^\circ C$  (b).

номера слоя, это прежде всего связано с уменьшением релаксационных процессов в каждом последующем слое. Результаты параметрических исследований представлены в виде графических зависимостей распределения температурного поля составного тела [5,6]: рис. 1, рис. 2, рис. 3.

Таким образом, из рис. 1 для оксида алюминия  $Al_2O_3$ , при принятых краевых условиях решение уравнения теплопроводности интегро-дифференциального типа имеет особенности на начальных стадиях нагрева, который выражается в выявлении двух отклонений температуры, выраженных явным скачком, физическая интерпретация которого заключается в учете тепловой памяти прошлых состояний нагрева (или охлаждения). Рисунки 2-3 представляют собой распределение температуры по длине при временах релаксации теплового потока ( $\tau_r = 10^{-9}c$ ) и внутренней энергии ( $\tau_e = 10^{-11}c$ ) соответственно.

#### 4. Выводы

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы: решения гиперболического и интегро-дифференциального уравнения переноса теплоты практически совпадают при больших моментах времени с решением классического параболического уравнения теплопроводности. Значительные отличия обнаруживаются только в начальные моменты времени на протяжении  $3-10 \tau_r$ ,  $3-10 \tau_e$ . Релаксационные функции  $\alpha(\tau)$ ,  $\beta(\tau)$  для большинства материалов при высоких и умеренных температурах очень быстро затухают со временем. Это приводит к тому, что решение интегро-дифференциальных уравнений переноса теплоты незначительно отличается от решений уравнений параболического типа. Релаксационные функции имеют заметную протяженность только при очень низких и высоких температурах. Выполненные расчеты являются основой для последующей качественной оценки разных факторов теплотехнологического процесса и позволяют учесть их при разработке более сложных моделей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. — М.: Высшая школа, 2001. — 550 с.
2. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашиников В.В.* Аналитические решения задач тепло-

---

массопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высшая школа, 2005. – 430 с.

3. *Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 296 с.

4. *Веселовский В.Б., Босенко Т.М.* Операционный метод решения задач теплопроводности при экстремальных тепловых воздействиях // *Одинадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука:*

*Матеріали конференції – К.: ТОВ “Задруга”, 2006. – С.53.*

5. *Веселовский В.Б.* Структурный метод решения задач теплопроводности для составных сред при экстремальных воздействиях // *Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д.: Зб. наук. пр. ДНУ, 2006. – С. 85–97.*

6. *Веселовский В.Б., Сова Ю.А., Босенко Т.М.* Задачи теплопроводности для составных сред с тепловой памятью // *Металлургическая теплотехника. – Д.: Пороги, 2005. – С. 20–31.*