

УДК 532.5; 536.24

БАСОК Б. И.,  
АВРАМЕНКО А.А., РЕЗАКОВА Т.А.

*Институт технической теплофизики НАН Украины*

## ТЕПЛООБМЕН И ГИДРОДИНАМИКА ЖИДКОСТИ В СИСТЕМЕ ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ КАНАЛ – ГРУНТ

Розглянуто теплофізичну модель динаміки теплоносія у пристроях геотермальних систем. Одержано результати, що підтверджують адекватність запропонованої моделі.

Рассмотрена теплофизическая модель динамики движения теплоносителя в системе скважина – грунт. Получены результаты, подтверждающие адекватность предложенной модели.

We consider a thermophysical model of the dynamics of heat-carrier motion in the hole – ground system. We obtained results confirming the adequacy of the proposed thermohydrodynamic model.

$a$  – коэффициент температуропроводности;  
 $c_p$  – теплоемкость;  
 $C, D, f_\varepsilon$  – см. табл.2;  
 $G$  – генерация кинетической энергии;  
 $k$  – кинетическая энергия турбулентности;  
 $L$  – высота;  
 $P$  – давление;  
 $Pr$  – число Прандтля;  
 $R, r$  – радиус;  
 $R_\varepsilon$  – см. табл.2;  
 $t$  – температура;  
 $u, v, w$  – скорости по направлениям координат;  
 $\varepsilon$  – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности;  
 $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;

$\mu$  – динамический коэффициент вязкости;  
 $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  
 $\rho$  – плотность;  
 $\tau$  – время,  
 $r, z$  – координаты.  
**Индексы нижние:**  
 $eff$  – эффективный;  
 $mol$  – молекулярный;  
 $k$  – кинетическая энергия турбулентности;  
 $t$  – турбулентный;  
 $\varepsilon$  – диссипация;  
гр – грунт;  
ж – жидкость,  
т – труба;  
тр – трение.

### **Введение**

В практике гидрогеологических расчетов, выполняемых при оценке эксплуатационных ресурсов геотермальных вод, а также при проектировании систем разработки геотермальных месторождений, возникает необходимость получения различных характеристик, в частности, расстояния между контурами отбора термальной воды и нагнетания отработанного теплоносителя; времени добычи теплоносителя с постоянной пластовой температурой из продуктивного коллектора, температуры пластовой термальной воды, давления в пласте, его дебита. Кроме того,

требуется дать прогноз изменения во времени температуры геотермального теплоносителя как в самом водоносном горизонте, так и на устье добычных скважин.

Для получения перечисленных данных в настоящее время используются различные теплофизические методы, созданные на основе упрощенного численного или приближенного аналитического решения задач динамики и скорости теплопереноса в гетерогенных средах. Указанные методы в основном приводят к сложным выражениям искоемых величин, что затрудняет их непосредственное применение в практике инженерных гидротермогеологических расчетов. В данной ра-

боте предлагается численное моделирование этой задачи с помощью программного комплекса Phoenics.

**Постановка задачи и моделирование исследуемых процессов**

Теплофизическая модель динамики движения теплоносителя (термальная вода) в устройствах истечения и процессы теплопроводности в пластах (грунт, водоносный горизонт) описывается системой уравнений, включающей (в данном случае для цилиндрической системы координат  $r, z$ ) следующие уравнения:

уравнение неразрывности потока жидкости:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{v}{r} = 0; \tag{1}$$

уравнение движения жидкости в трубе (скважине) – уравнение Навье – Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu_{eff} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( 2r\nu_{eff} \frac{\partial v}{\partial r} \right); \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \phi} + w \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\nu_{eff} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r\nu_{eff} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]; \end{aligned} \tag{3}$$

уравнение теплопереноса в потоке жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} + v \frac{\partial t}{\partial r} + w \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial t}{\partial z} \right); \end{aligned} \tag{4}$$

уравнение теплопроводности в стенке трубы скважины и в грунтовом массиве (соответственно  $a_T$  и  $a_{гр}$ ):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \tag{5}$$

Это общая система уравнений для термогидродинамических расчетов. Так как задача решается для различных возможных режимов движения жидкости: ламинарного, переходного и турбулентного, то для описания турбулентного переноса, кроме уравнений Навье – Стокса и теплопереноса, необходимо добавить уравнения для кинетической энергии турбулентности  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$ :

уравнение для кинетической энергии турбулентности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \tau} + w \frac{\partial k}{\partial z} + v \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right) + G_k - \varepsilon - D_k; \end{aligned} \tag{6}$$

уравнение для скорости диссипации энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon}{k} C_{1\varepsilon} G_k - \frac{\varepsilon}{k} f_\varepsilon - R_\varepsilon. \end{aligned} \tag{7}$$

При турбулентном режиме течения в уравнение теплопереноса (4) вводится турбулентное число Прандтля  $Pr_t$ , которое для разных моделей турбулентной вязкости определяется разными выражениями. Для  $k$ - $\varepsilon$  – модели турбулентное число Прандтля остается постоянной физической величиной, а для RNG – модели турбулентное число Прандтля представлено решением трансцендентного уравнения [1]

$$\left| \frac{Pr_t^{-1} - 1,3929}{Pr_t^{-1} - 1,3929} \right|^{0,6321} \left| \frac{Pr_t^{-1} + 2,3929}{Pr_t^{-1} + 2,3929} \right|^{0,3679} = \frac{\nu}{\nu_t}. \tag{8}$$

Для определения числа Прандтля для кинетической энергии турбулентности используется соотношение

$$\left| \frac{Pr_t^{-1} - 1,3929}{0,3929} \right|^{0,6321} \left| \frac{Pr_t^{-1} + 2,3929}{3,3929} \right| = \frac{\nu}{\nu_t}. \tag{9}$$

Для RNG – модели значения чисел Прандтля для кинетической энергии и для скорости ее диссипации совпадают, для других моделей динами-

ки турбулентности  $Pr_\epsilon$  определяется, как правило, эмпирически. Некоторые значения  $Pr_k$ ,  $Pr_\epsilon$  приведены в табл. 1

Вязкость жидкости в уравнениях (2), (3), (4), (6), (7) в общем случае описывается зависимостями:  $\nu_{eff} = \nu + \nu_t$ ,

$$\nu_t = C_v \frac{k^2}{\epsilon} f_v.$$

Слагаемое, учитывающее генерацию турбулентной кинетической энергии в уравнениях (6),

(7) определяется по формуле  $G_k = \nu_t \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2$ .

Разумеется, при расчете процессов турбулентного переноса импульса и теплоты используются различные модели турбулентности. В зависимости от вида течения могут варьироваться числен-

ные значения констант моделей, а также добавляться дополнительные члены. Рассмотрим некоторые модели турбулентного переноса, использованные в данной работе.

В табл. 1 приведены модельные константы, входящие в уравнения (6), (7) некоторых моделей турбулентного переноса [2]. В табл. 2 приведены формулы дополнительных членов, которые появляются в уравнениях (6), (7) в разных моделях [1, 3].

Как видно из табл. 2, в RNG- $k$ - $\epsilon$  – модели в транспортном уравнении появляется новое слагаемое скорости диссипации  $R_\epsilon$ , которое описывает скорость деформации и играет значительную роль при низких значениях числа Рейнольдса, когда турбулентность существенно анизотропная. Константы RNG  $k$ - $\epsilon$  – модели как при высоких числах Рейнольдса, так и при низ-

Табл. 1. Модельные константы

Модель	$C_v$	$C_{1\epsilon}$	$C_{2\epsilon}$	$C_3$	$Pr_k$	$Pr_\epsilon$	$Pr$	$Pr_t$
Стандартная $k$ - $\epsilon$	0,09	1,44	1,92	-	1	1,314	0,9	0,7
RNG $k$ - $\epsilon$	0,0845	1,42	1,68	-	0,7194	0,7194	0,9	Определяется по формулам (8), (9)
Low-Reynolds	0,09	1,15	1,9	0,25	0,75	1,15	0,9	

Табл. 2. Дополнительные члены уравнений различных моделей

Модель	$D_k$	$R_\epsilon$	$f_\epsilon$	$f_\epsilon$
Стандартная $k$ - $\epsilon$	0	0	$C_{2\epsilon} \epsilon$	1
RNG- $k$ - $\epsilon$	0	$R_\epsilon = \frac{C_v \eta_\epsilon^3}{1 + \beta_\epsilon \eta_\epsilon^3} \left( 1 - \frac{\eta_\epsilon}{\eta_{\epsilon 0}} \right) \frac{\epsilon^2}{k}$ $\eta_\epsilon = \frac{k}{\epsilon} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ , где $\eta_{\epsilon 0} = 4,38$ ;	$C_{2\epsilon} \epsilon$	1
Low-Reynolds	$D_k = \frac{2\nu k}{(r_T - r)^2}$	0	$C_{2\epsilon} \epsilon f + \frac{2\nu k e^{-c_4 w^*(r_T - r)/\nu}}{(r_T - r)^2}$ где $f = 1 - 0,22 e^{-(k^2/6\nu\epsilon)^2}$ $C_4 = 0,5$	$1 - \exp(-C_3 w^*(r_T - r)/\nu)$

Примечание:  $w^* = \sqrt{\tau_{тр}}/\rho$  – динамическая скорость трения.

ких, получены в соответствии с теорией ренормализационных групп. Известно, что RNG  $k$ - $\varepsilon$  – модель эффективна как в области низких, так и высоких чисел Рейнольдса (т.е. для ламинарных, переходных и турбулентных потоков) – это одно из преимуществ RNG  $k$ - $\varepsilon$  – модели по сравнению с эмпирическими моделями. Сходимость RNG  $k$ - $\varepsilon$  – модели устойчива и требуется немного дополнительного времени вычислений по сравнению со стандартной  $k$ - $\varepsilon$  – моделью.

Low-Reynolds модель [3] используется для расчета трения, теплопередачи и распределений кинетической энергии в пристенном слое, действительна как в переходном, так и в турбулентном режиме течения. Константы Low-Reynolds модели получены эмпирическим путем. Уравнение для кинетической энергии турбулентности включает в себя слагаемое  $D_k$ , которое характеризует конечную скорость диссипации энергии и появляется при низких значениях числа Рейнольдса, т. к. при высоких числах Рейнольдса  $D_k = \varepsilon$ . Вывод формулы для дополнительного слагаемого в уравнении диссипации подробно описывается в [3].

Эффективное решение этой задачи (быстрый расчет, точность, удовлетворительная сходимость результатов), состоящей из системы уравнений (1)–(7), вызывает определенные сложности. В данной работе система уравнений (1)–(7) решалась численно с помощью пакета Phoenics (лицензия 1585/PLA/1) [2]. Математическая постановка задачи в Phoenics включает в себя запись системы дифференциальных уравнений неразрывности, сохранения импульса и энергии, турбулентных характеристик, а также начальных и граничных условий. Если обозначить зависимую переменную через  $F$ , то обобщенное уравнение, решаемое в Phoenics, имеет вид [2]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho F) + \operatorname{div}(\rho \vec{w} F) = \operatorname{div}(G_F \operatorname{grad} F) + S_F,$$

где  $G_F$  – коэффициент диффузии для переменной  $F$ ;  $S_F$  – источниковый член для переменной  $F$ .

Постановка задачи также включает в себя задание геометрии объекта физического моделирования. Для этого используется встроенный в комплекс “Phoenics” графический редактор.

## Результаты расчетов

Для проверки адекватности теплофизической модели реальному физическому процессу в грунтовом теплообменнике воспользуемся экспериментальными данными, проведенными в работе [4]. В ней представлены результаты экспериментальных исследований нестационарного прогрева грунтового массива (состоящего из сухого речного песка) при прокачке через круглую трубу (аналог скважины) нагретого теплоносителя (технической воды). Геометрические параметры установки, теплофизические свойства грунта и теплоносителя, а также режимы экспериментов подробно описаны в [4] и полностью были сохранены при выполнении расчетов по модели (1)–(7). Эксперименты проводились при двух вариантах краевых условий:

при постоянной температуре прокачиваемого теплоносителя, равной 53,7 °С;

при линейном возрастании температуры прокачиваемого теплоносителя от 17,9 °С до 35,5 °С за время  $\tau = 600$  с.

Различной была скорость течения теплоносителя в скважине: при первом варианте граничных условий число  $Re = 5060$ , при втором варианте граничных условий число  $Re = 9200$ . В табл. 3 приведены краевые условия для обоих вариантов расчета.

Геометрия расчетной области приведена на рис. 1.

При численном моделировании применялись сетки с различным числом узлов. Было установлено, что достаточно удовлетворительная сходимость расчетных данных с экспериментальными достигается при покрытии расчетной области сеткой с числом узлов 400 по оси  $r$ , 300 – по оси  $z$ , со сгущением в области грунта к стенке трубы. Шаг по времени составлял 10 с.

Экспериментально в [4] получены данные по изменению температуры грунта во времени в 32 точках. При решении модели (1) – (7) определены изменения температуры в этих же точках. На рис. 2 представлены расчетные и экспериментальные графики изменения температуры грунта в одном сечении  $z = 0,75$  м и четырех точках по радиусу:  $a - r = 0,0155$  м,  $b - r = 0,0173$  м,

Табл. 3. Начальные и граничные условия

I вариант	II вариант
$\tau = 0; z = 0; 0 \leq r \leq 0,0115; t = t_{ж} = 17,9 \text{ }^\circ\text{C};$	$\tau = 0; z = 0; 0 \leq r \leq 0,0115; t = t_{ж} = 17,9 \text{ }^\circ\text{C};$
$r = 0,0115; t_r = 17,9 \text{ }^\circ\text{C};$	$r = 0,0115; t_r = 17,9 \text{ }^\circ\text{C};$
$0,0115 \leq r \leq \infty; t_{rp} = 17,9 \text{ }^\circ\text{C} = \text{const};$	$0,0115 \leq r \leq \infty; t_{rp} = 17,9 \text{ }^\circ\text{C} = \text{const};$
$\tau > 0; z = 0; 0 \leq r \leq 0,0115;$	$\tau > 0; z = 0; 0 \leq r \leq 0,0115; t_{ж} = 17,9 + 0,0415\tau;$
$t_{ж} = 53,7 \text{ }^\circ\text{C} = \text{const};$	$r \rightarrow \infty; t_{rp} = 17,9 \text{ }^\circ\text{C} = \text{const}.$
$r \rightarrow \infty; t_{rp} = 17,9 \text{ }^\circ\text{C} = \text{const}.$	

$\sigma - r = 0,022 \text{ м}, z - r = 0,028 \text{ м}$ . Эти данные получены для первого варианта краевых условий ( $t_{ж} = 53,7 \text{ }^\circ\text{C} = \text{const}$ ) и при режиме течения при  $Re = 5060$ . Сравнивались модель ламинарного течения, стандартная  $k-\varepsilon$  – модель, RNG  $k-\varepsilon$  – модель и  $k-\varepsilon$  – модель для низких значений числа Рейнольдса – Low-Reynolds. Наилучшее совпадение с экспериментальными данными показала модель ламинарного течения (совпадение в пределах 1 %).

На рис. 3 представлены графики расчетных и экспериментальных изменений температуры в грунтовом массиве при втором варианте краевых условий и режиме течения при  $Re = 9200$ . В этом случае наилучшее совпадение с экспериментальными данными показала стандартная  $k-\varepsilon$  – модель. Сходимость эксперимента и расчетов в среднем составила 1,4 %.

Для оценки точности расчетов по разработанной модели на рис. 4 а, б приведен массив данных расхождений экспериментальных и расчетных данных при различных режимах течения жидкости.

Из приведенных данных следует, что около 66% экспериментальных точек соответствуют теоретическим значениям для первого варианта (рис. 4, а) в коридоре расхождений  $\Delta t = \pm 0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ , для второго варианта (рис. 4 б) в коридоре  $\Delta t = \pm 0,4 \text{ }^\circ\text{C}$ .

### Выводы

Полученные результаты подтверждают адекватность предложенной термогидродинамичес-

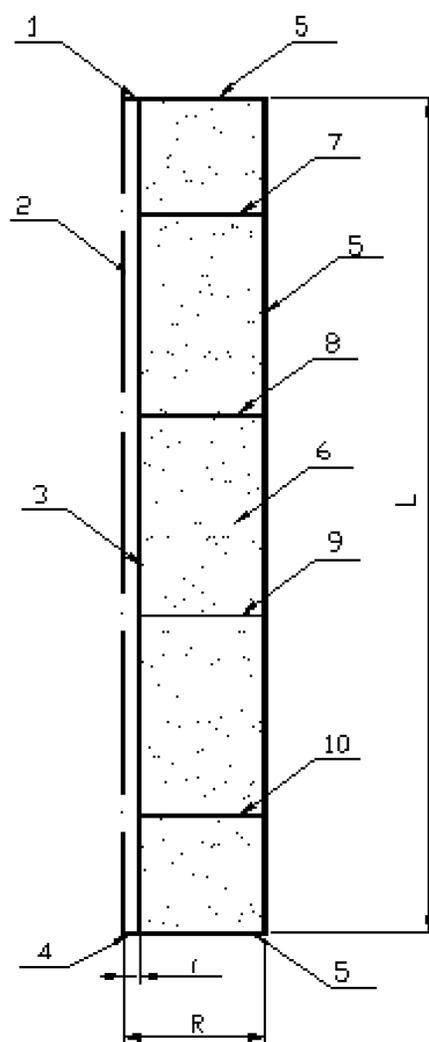
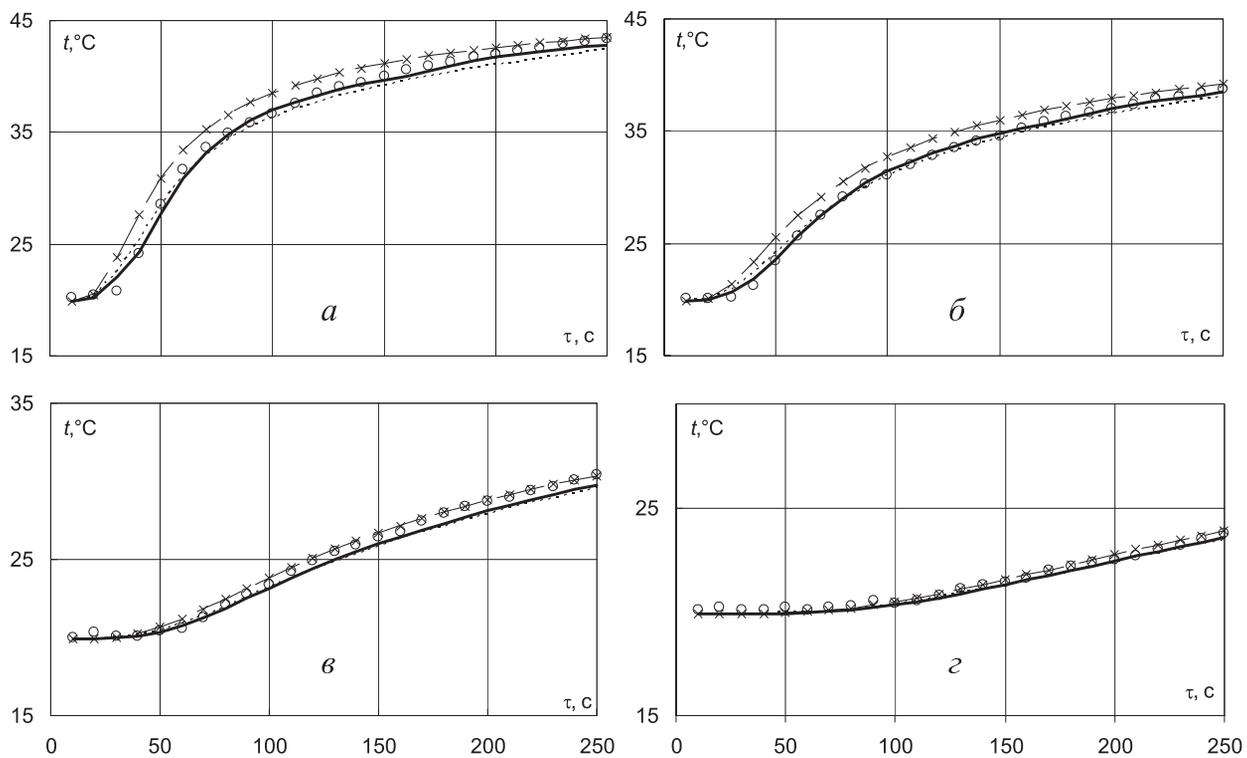
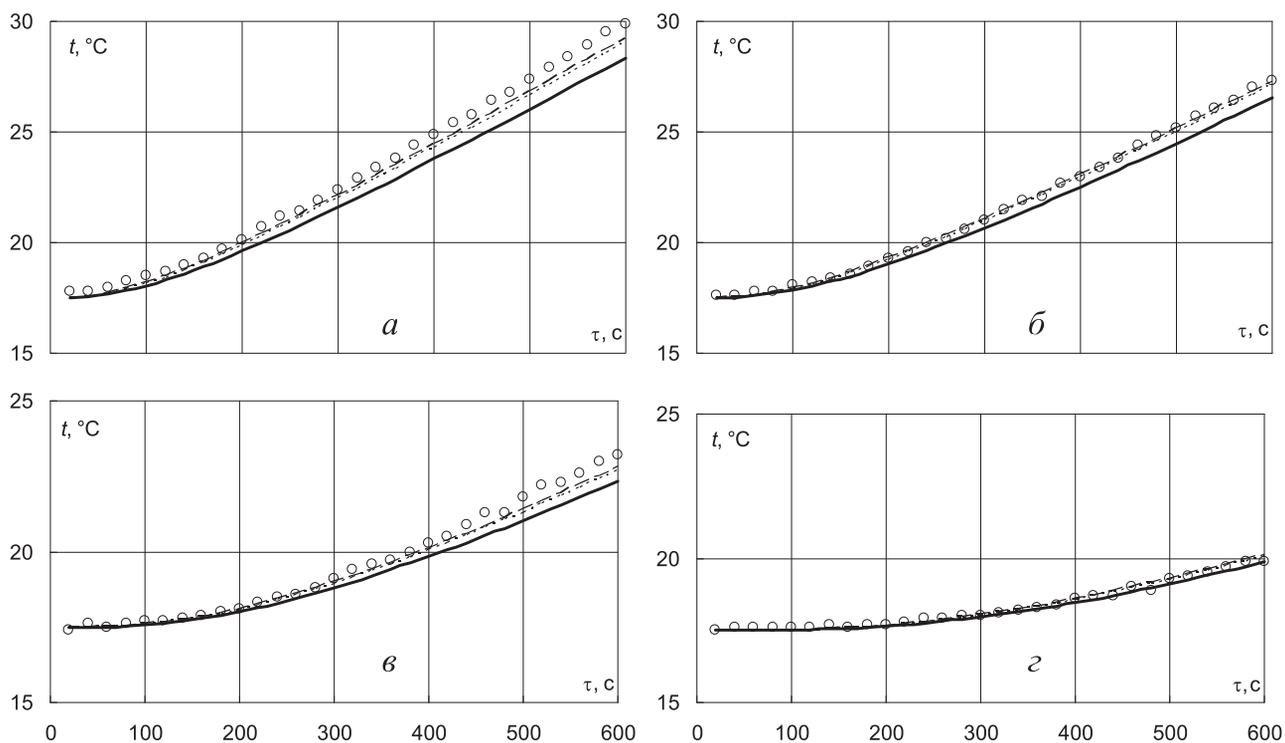


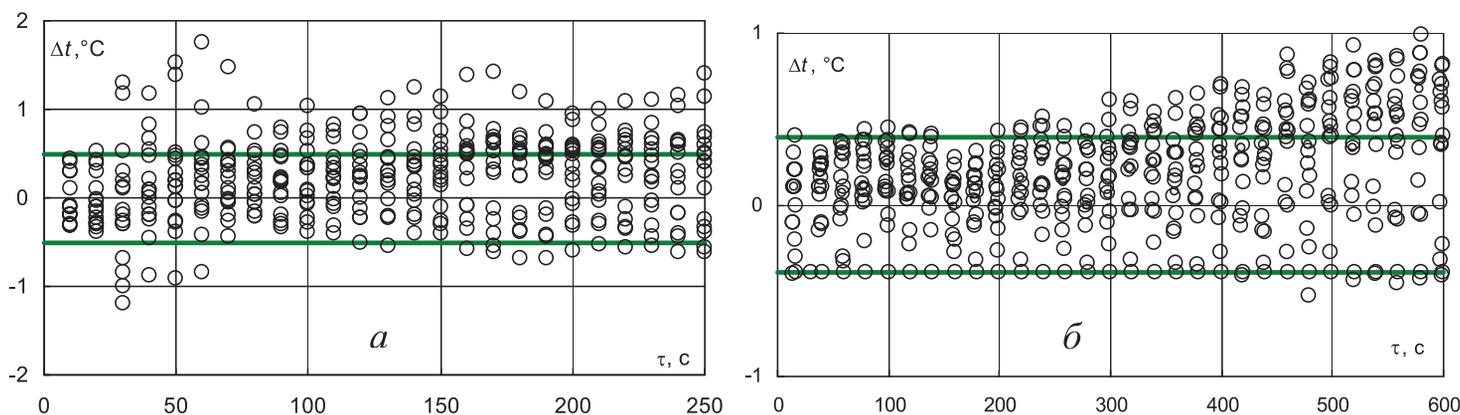
Рис. 1. Геометрия расчетной области: 1 – вход; 2 – ось симметрии; 3 – внутренняя стенка трубы; 4 – выход; 5 – наружная стенка; 6 – грунт; 7,8,9,10 – сечения, в которых измерялась температура.



**Рис. 2. Сопоставление экспериментальных и расчетных данных изменения температур:**  
 ○ — эксперимент, --- — ламинарная модель, - · - · - стандартная  $k-\epsilon$  — модель,  
 ······ —  $k-\epsilon$  Low-Reynolds, —×— — RNG  $k-\epsilon$  — модель.



**Рис. 3. Сопоставление опытных и расчетных данных изменения температур в грунте.**  
 Обозначения аналогичны рис. 2.



**Рис. 4. Сопоставление теории с данными эксперимента [4].  $\Delta t$  – различие экспериментальных и теоретических температур. а – режим ламинарного течения ( $Re = 5060$ ), б – режим турбулентного течения ( $Re = 9200$ ).**

кой модели. На основании этого, для расчетов гидродинамики и теплообмена в системе скважина (с движущимся теплоносителем) и грунтовой массив рекомендуется использовать следующие модели:

– при течении теплоносителя в трубном теплообменнике цилиндрической скважины с  $Re \leq 5000$  целесообразно применение ламинарной модели;

– при течении теплоносителя в аналогичном грунтовом теплообменнике с  $5000 \leq Re \leq 8000$  целесообразно применение Low-Reynolds модели;

– при течении теплоносителя в грунтовом теплообменнике с  $Re \geq 8000$  целесообразно применение  $k-\epsilon$  – модели турбулентности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Авраменко А.А., Басок Б.И., Кузнецов А.В. Групповые методы в теплофизике. – К.: Наукова думка, 2003. – 483 с.
2. *Phoenix* polis, Licence 1585/PLA/1.
3. Chien K.Y. Predictions and channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model // *AIAA Journal*. – 1982. – V.20. – P. – 33.
4. Накорчевский А.И., Недбайло А.Н. Басок Б.И. Экспериментальная проверка достоверности математических моделей грунтового аккумулирования теплоты // *Пром. теплотехника*. – 2006. – Т. 28, № 2. – С. 51 – 60.

Получено 02.09.2008 г.