

УДК 669.162.23

Гоцуленко В.В.¹, Басок Б.І.²¹Інститут підприємництва «Стратегія»²Інститут технічної теплофізики НАН України

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В МОДЕЛІ ПЕРФОРОВАНОЇ КАМЕРИ ГОРІННЯ ПОВІТРОНАГРІВАЧІВ ДОМЕННИХ ПЕЧЕЙ

Досліджено можливі типи рухів в перфорованій моделі камери горіння повітрянагрівачів доменної печі при різних способах її перфорування. Проведений біфуркаційний аналіз за числом Прандтля та одержано достатні умови стійкості розв'язків систем рівнянь Релея – Бенара і Біркмана, що описують рухи в даній моделі камер горіння.

Исследованы возможные типы движений в перфорированной модели камеры горения воздухонагревателя доменной печи при различных способах ее перфорирования. Проведен бифуркационный анализ по числу Прандтля и получены достаточные условия устойчивости решений систем уравнений Рэлея – Бенара и Биркмана, описывающих движения в рассматриваемой модели камер горения.

The possible types of motions in the perforated model of chamber of burning of air-heater blast furnace at different ways of its perforated are explored. The bifurcational analysis is conducted on the Prandtl number and the sufficient terms of stability of solutions of the systems equations of Relay-Benard and Brinkman describing motions in the examined model of chambers of burning.

$\bar{g} = -g\bar{e}_2$ – прискорення сили тяжіння,

k – коефіцієнт температуропровідності,

p_ε – тиск у середовищі,

$\tilde{p}_\varepsilon(x_1, x_2, t)$ – відхилення поля тисків від гідростатичного тиску $p_0 - \rho g x_2$,

T_ε – температура в потоці,

V_ε – швидкість,

γ – коефіцієнт теплового розширення,

$\theta_\varepsilon(x_1, x_2, t)$ – відхилення температури від лінійного профілю,

ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості.

Індекс верхній: * – позначення граничних значень параметрів в камері горіння.

Індекс нижній: ε – параметри в перфорованій камері горіння.

1. Вступ

Регенеративний повітрянагрівач доменних печей (каупер) [7–9] є агрегатом висотою до 50 м, який складається з декількох потенційно нестійких елементів його конструкції. Відомо, що при збільшенні теплового навантаження в камері горіння каупера збуджуються автоколивання великих амплітуд вібраційного горіння. Це не дозволяє підвищувати температуру дуття та отримувати прибуток, який може становити 3,5 млн. грн., на кожні 100 градусів зростання температури в доменній печі.

Невирішеність цієї проблеми та неоднозначність трактування результатів дослідження вібраційного горіння в кауперах [8] пов'язані з недостатньо глибоким вивченням механізмів, що обумовлюють нестійкість, пов'язану з теплопідводом.

Автоколивання вібраційного горіння малих амплітуд покращують показники роботи спалюючих пристроїв, але при збільшенні теплового навантаження амплітуди коливань зростають і вони можуть бути небезпечними. Режим вібраційного горіння в регенеративних повітрянагрівачах доменних печей не дозволяє підвищувати температуру дуття і тим самим зменшувати вартість виробництва чавуну.

Головною причиною цього є також невизначеність механізмів нестійкості, зумовлених теплопідводом. Бажаним розв'язком цієї проблеми може бути не повна нейтралізація вібраційного горіння, а лише зменшення амплітуди коливань.

Метою даної роботи є теоретичне опрацювання можливостей вдосконалення вертикальних камер горіння шляхом створення моделей перфорованих камер горіння [7]. Шляхом математичного моделювання, заснованого на аналізі повної системи рівнянь термогідрогазодинаміки, як показано далі в даній роботі, виявлено, що спосіб перфорування (розділення камери горіння стрижнями) істотно впливає на формування характеру динаміки. Так, при певних способах розбиття може виникати режим стохастичних автоколивань в протилежність стабілізуючій дії відповідному режиму затухаючих коливань.

2. Рівняння руху в моделі перфорованої камери горіння

Запишемо загальну систему рівнянь гідрогазодинаміки відповідно до перфорованої (рис. 1) камери горіння Ω_ε :

$$\begin{cases} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + (V_\varepsilon \cdot \nabla) V_\varepsilon = -\frac{1}{\rho_\varepsilon} \text{grad}(p_\varepsilon) + \nu \Delta V_\varepsilon + \bar{g}, \\ \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \text{div}(\rho_\varepsilon V_\varepsilon) = 0, \\ \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} + \text{div}(T_\varepsilon V_\varepsilon) = k \Delta T_\varepsilon, \\ f(p_\varepsilon, \rho_\varepsilon, T_\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В силу циліндричної симетрії можна перейти від тривимірної постановки вихідної задачі до двовимірної, розглядаючи перетин перфорованої камери горіння уздовж осі її зовнішнього циліндра. Далі ми традиційно стосовно до розглянутого класу задач [4] використовуємо наближення Буссинеска, яке полягає в тому, що рідина вважається слабостисненою і залежність густини від температури враховується в рівняннях тільки в одному місці (у правій частині рівняння для швидкості) та здійснюється наступна заміна змінних [4]:

$$p_\varepsilon(x_1, x_2, t) = p_0 - \rho_0 g [1 - \gamma(T - T_2)] x_2 + \tilde{p}_\varepsilon(x_1, x_2, t),$$

$$T_\varepsilon(x_1, x_2, t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ell} x_2 + \theta_\varepsilon(x_1, x_2, t).$$

В нових змінних вихідна система (1) приймає вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + (V_\varepsilon \cdot \nabla) V_\varepsilon = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad}(\tilde{p}_\varepsilon) + \Delta V_\varepsilon + g \gamma \bar{e}_2, \\ \text{div} V_\varepsilon(x, t) = 0, \\ \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial t} + V_\varepsilon \cdot \text{grad}(\theta_\varepsilon) - \frac{T_1 - T_2}{\ell} V_\varepsilon \bar{e}_2 = k \Delta \theta_\varepsilon, \\ \rho_\varepsilon = \rho_0 [1 - \gamma(T_\varepsilon - T_2)]. \end{cases} \quad (2)$$

Далі, приведемо систему рівнянь (2) до безрозмірної форми, виконуючи наступні заміни змінних:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x/\ell, \quad V_\varepsilon \rightarrow \frac{1}{\nu/\ell} V_\varepsilon, \quad t \rightarrow \frac{1}{\ell^2/\nu} t, \\ p_\varepsilon &\rightarrow \frac{1}{\rho_0 \nu^2/\ell^2} \tilde{p}_\varepsilon, \quad \theta_\varepsilon \rightarrow \frac{1}{T_1 - T_2} \theta_\varepsilon, \\ \text{grad} &\rightarrow \frac{1}{\ell} \text{grad}, \quad \text{div} \cdot \text{grad} \equiv \Delta \rightarrow \frac{1}{\ell^2} \Delta. \end{aligned}$$

В безрозмірних змінних система буде наступною [6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + (V_\varepsilon \cdot \nabla) V_\varepsilon = -\text{grad}(p_\varepsilon) + \Delta V_\varepsilon + Gr \cdot \theta_\varepsilon \bar{e}_2, \\ \text{div} V_\varepsilon(x, t) = 0, \\ \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial t} + V_\varepsilon \cdot \text{grad}(\theta_\varepsilon) - V_\varepsilon \bar{e}_2 = Pr^{-1} \Delta \theta_\varepsilon, \end{cases} \quad (3)$$

де $Gr = g \gamma (T_1 - T_2) \ell^3 / \nu^2$ – число (критерій) Грасгофа, $Pr = \nu/k$ – число Прандтля.

Як показано в роботах [1–3], при виборі критичного значення параметра перфорації $0 < C_0 < \infty$, граничні характеристики суцільного середовища при $\varepsilon \rightarrow 0$ задовольняють наступній системі рівнянь Біркмана на множині Ω :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V + \frac{2\pi}{C_0} (V - V^*) = \\ = -\text{grad}(p) + \Delta V + Gr \cdot \theta \bar{e}_2, \\ \text{div} V(x, t) = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + V \cdot \text{grad}(\theta) + \frac{2\pi}{C_0} (\theta - \theta^*) - V \cdot \bar{e}_2 = Pr^{-1} \Delta \theta, \end{cases} \quad (4)$$

де параметри V^* та θ^* пов'язані зі структурою граничного переходу і значенням константи

$C_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon$, $\sigma_\varepsilon = \varepsilon^2 \log(1/r_\varepsilon)$ [1-3], r_ε – радіус тонких стрижнів (рис. 1).

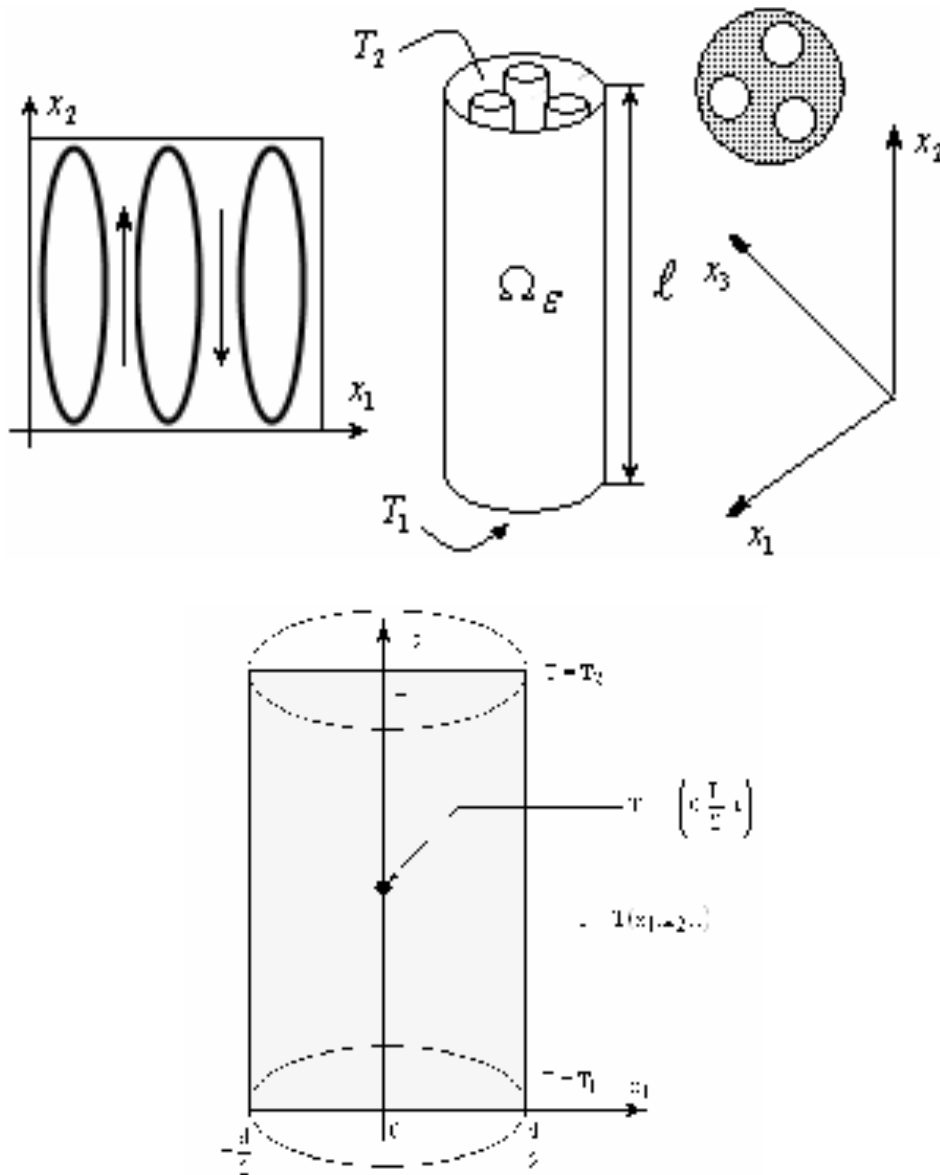


Рис. 1. Схематичне зображення моделі перфорованої камери горіння Ω_ε .

На верхню і нижню основи чарунки Куетта накладаємо граничні умови, що виражають рівність нулю наведеної температури θ (рис. 1):

$$\theta|_{x_2=0} = 0; \quad \theta|_{x_2=\ell} = 0. \quad (5)$$

Представимо векторні рівняння (4) в скалярній

формі, позначаючи відповідно x_1 та x_2 - компоненти швидкості V через u і v .

Виключаємо поле тисків, для чого диференціюємо перше рівняння по x_2 , а друге – по x_1 та віднімаємо одне від іншого. В результаті одержуємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{2\pi}{C_0} \cdot (u - u^*) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x_1} + v \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{2\pi}{C_0} \cdot (v - v^*) = \text{Gr} \cdot \theta - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\theta u)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\theta v)}{\partial x_2} + \frac{2\pi}{C_0} \cdot (\theta - \theta^*) - v = \text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) &= -\frac{u \partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{v \partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{u \partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{v \partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \\ &- \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} - \text{Gr} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \\ &+ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^3} \right) - \frac{2\pi}{C_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u^*}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v^*}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Поєднуючи (7) і два останніх рівняння системи (6), приходимо до наступної основної для подальших побудов системи:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) = -u \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{u \partial^2 v}{\partial x_1^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \\ - \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} - \text{Gr} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \\ + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^3} \right) - \frac{2\pi}{C_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u^*}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v^*}{\partial x_1} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\theta u)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\theta v)}{\partial x_2} + \frac{2\pi}{C_0} \cdot (\theta - \theta^*) - v = \text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Далі, застосовуємо метод Гальоркіна, представляючи шукані поля у вигляді розкладання в ряди по деякій повній системі базисних функцій, після цього предметом розгляду стане залежність коефіцієнтів розкладання від часу.

Будемо будувати розкладання по базису тригонометричних функцій вигляду:

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha x_1) \cdot \sin(n\beta x_2), \sin(\alpha x_1) \cdot \cos(n\beta x_2), \\ &\cos(\alpha x_1) \cdot \cos(n\beta x_2), \cos(\alpha x_1) \cdot \sin(n\beta x_2), \end{aligned}$$

де n і m – цілі числа, а α і β – константи, що пов'язані з геометрією конвективних валів Бенара [4].

Отже, покладемо

$$\theta(x_1, x_2, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}(t) \cos(\alpha x_1) \sin(n\beta x_2) \quad (9)$$

З умови нульової дивергенції

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

слідуює, що існує функція струму

$\psi(x_1, x_2, t)$: $u = -\partial\psi/\partial x_2$, розкладаючи яку в тригонометричний ряд по обраному базису, одержимо:

$$\psi(x_1, x_2, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}(t) \sin(m\alpha x_1) \sin(n\beta x_2). \quad (10)$$

Тоді для компонентів швидкості маємо:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, t) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n\beta G_{mn}(t) \sin(m\alpha x_1) \cos(n\beta x_2), \\ v(x_1, x_2, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m\alpha G_{mn}(t) \cos(m\alpha x_1) \sin(n\beta x_2). \end{cases} \quad (11)$$

Далі, підставляючи вирази (9) і (11) в рівняння (8) і, використовуючи співвідношення ортогональності для базисних функцій, одержуємо нескінченну систему рівнянь для коефіцієнтів G_{mn} і F_{mn} . За аналогією з роботою [4] будемо обмежуватися в отриманих рядах першими гармоніками, вважаючи істотними та відмінними від нуля члени G_{11} , F_{11} , F_{02} , які позначимо, відповідно, через X , Y і Z .

Отже, маємо:

$$\begin{cases} u = -X\beta \sin(\alpha x_1) \cdot \cos(\beta x_2), \\ v = X\alpha \cos(\alpha x_1) \cdot \sin(\beta x_2), \\ \theta = Y \cos(\alpha x_1) \cdot \sin(\beta x_2) - Z \sin(2\beta x_2). \end{cases} \quad (12)$$

Підставимо ці вирази в перше рівняння системи (8). В отриманому співвідношенні всі виникаючі комбінації синусів і косинусів варто привести за допомогою тригонометричних формул до сум членів обраного базису, а потім відкинути члени, що відмінні за структурою від присутньої в лівій частині комбінації виду $\sin(\alpha x_1) \cdot \sin(\beta x_2)$. Прирівнюючи коефіцієнти в лівій і правій частині, одержуємо

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\alpha Gr}{\alpha^2 + \beta^2} Y - (\alpha^2 + \beta^2) X - \frac{2\pi}{C_0} (X - X^*). \quad (13)$$

Поступаючи аналогічно із другим рівнянням (8) і прирівнюючи спочатку коефіцієнти при $\cos(\alpha x_1) \cdot \sin(\beta x_2)$, а потім коефіцієнти при $\sin(2\beta x_2)$, одержуємо два рівняння:

$$\frac{dY}{dt} = \alpha X - Pr^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) Y - \alpha\beta XZ - \frac{2\pi}{C_0} (Y - Y^*), \quad (14)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -4\beta^2 Pr^{-1} Z + \frac{\alpha\beta}{2} XY - \frac{2\pi}{C_0} (Z - Z^*).$$

Вводячи нові змінні: $X = Ax$, $Y = By$, $Z = Cz$, $t = D\tau$ з відповідними значеннями констант A , B , C і D :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2} Pr^{-1} (\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta}, \quad B = \frac{\sqrt{2} Pr^{-1} (\alpha^2 + \beta^2)^3}{\alpha^2\beta Gr}, \\ C &= \frac{Pr^{-1} (\alpha^2 + \beta^2)^3}{\alpha^2\beta Gr}, \quad D = \frac{Pr}{\alpha^2 + \beta^2}, \end{aligned}$$

одержуємо динамічну систему (13)-(14) у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = Pr \cdot (y - x) - (q/C_0) \cdot (x - x^*), \\ \frac{dy}{d\tau} = (Ra/Ra_c) x - y - xz - (q/C_0) \cdot (y - y^*), \\ \frac{dz}{d\tau} = -bz + xy - (q/C_0) \cdot (z - z^*), \end{cases} \quad (15)$$

де $q = 2\pi D$, $Ra = Gr \cdot Pr = g\gamma\ell^3 (T_1 - T_2) / \nu \cdot k$ – число Релея, $Ra_c = \pi^4 a^{-2} (1 + a^2)^3$ – його критичне значення при якому виникають конвекційні вали [4], $a = h_1/h_2$, $b = 4/(1 + a^2)$, $\alpha = \pi/h_1$, $\beta = \pi/h_2$, ℓ – довжина камери горіння.

Відзначимо, що при $x^* = x$, $y^* = y$ і $z^* = z$ система (15) переходить в класичну систему Лоренца [4].

Безрозмірна змінна $x(\tau)$ характеризує швидкість обертання конвективних валів, а змінні $y(\tau)$ і $z(\tau)$ відповідають за розподіл температури відповідно по горизонталі та вертикалі, τ – безрозмірний час.

3. Аналіз стійкості

На швидкість $V(x, t) = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ і приведену температуру $\vartheta(t)$ діємо оператором усереднювання за просторовими змінними, покладаючи:

$$v(t) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |V(x,t)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |\theta(x,t)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$v^*(t) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |V^*(x,t)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\vartheta^*(t) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |\theta^*(x,t)|^2 dx \right)^{1/2},$$

де $\text{mes}(\Omega)$ – об'єм області Ω .

Виходячи з системи рівнянь (4) одержимо на функції $v(t)$ і $\vartheta(t)$ диференціальні нерівності. Для цього помножимо (скалярно) перше рівняння системи (4) на $V(x,t)$, а третє – на $\theta(x,t)$ і одержану рівність проінтегруємо по області Ω . Але, перш за все, одержимо ряд проміжних співвідношень. Маємо:

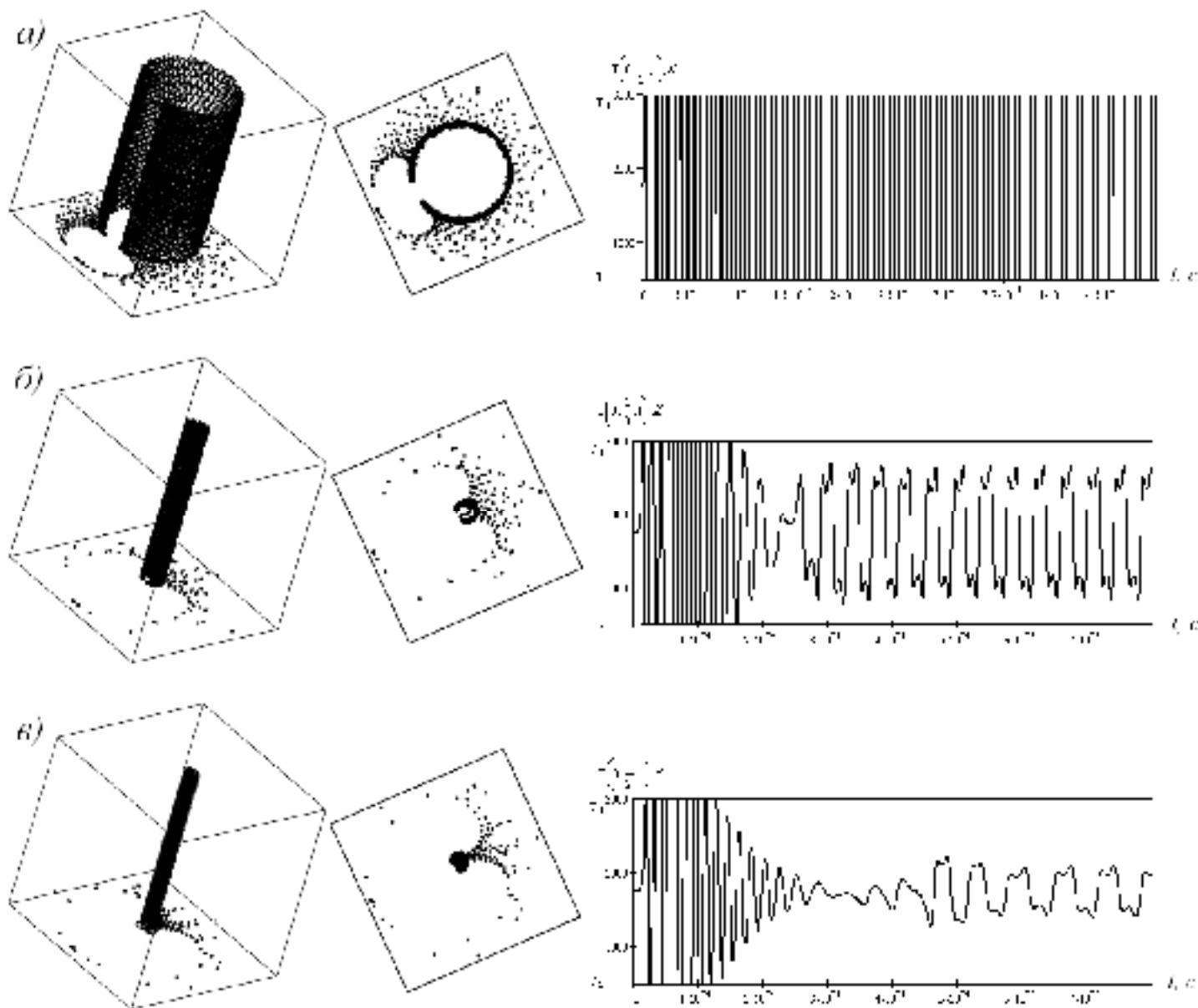


Рис. 2. Траєкторії руху фазової частинки та пульсації температури за часом в камері горіння при різних значеннях числа Прандтля: а) $Pr = 5$; б) $Pr = 30$; в) $Pr = 50$.

$$\int_{\Omega} \partial V / \partial t \cdot \mathbf{V}(x, t) dx = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} v_i \partial v_i / \partial t dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 v_i^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \frac{dv^2(t)}{dt} = v(t) \frac{dv(t)}{dt},$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} dx = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} v_i v_j \partial v_j / \partial x_i dx =$$

$$= - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{V_j^2}{2} \partial v_i / \partial x_i dx = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{V}|^2 \cdot \operatorname{div} \mathbf{V} dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} p(x, t) \cdot \mathbf{V}(x, t) dx = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} v_i \partial p / \partial x_i dx =$$

$$= - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} p \partial v_i / \partial x_i dx = - \int_{\Omega} p(x, t) \operatorname{div} \mathbf{V}(x, t) dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} dx = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \Delta v_i v_i dx =$$

$$= - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \nabla v_i \cdot \nabla v_i dx = - \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{V}(x, t)|^2 dx,$$

де матриця

$$\nabla \mathbf{V}(x, t) \equiv \operatorname{div} \mathbf{V}(x, t) = \left(\partial v_i / \partial x_j \right)_{i, j=1;3}$$

є дивергенцією векторного поля.

Далі ми також використовуватимемо нерівність Коші – Буняковського [4] і нерівність Фрідрікса [4].

Застосовуючи приведені вище нерівності до співвідношення одержаного після множення першого рівняння (4) на $\mathbf{V}(x, t)$ і подальшого його інтегрування по області Ω , одержуємо нерівність

$$v(t) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{2\pi}{C_0} v^2(t) + \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{V}(x, t)|^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{2\pi}{C_0} v(t) v^*(t) + \operatorname{Gr} v(t) \vartheta(t)$$

або після скорочення на $v(t)$ і використання нерівності Фрідрікса

$$\frac{dv(t)}{dt} + \left(\frac{2\pi}{C_0} + \frac{1}{c_1} \right) v(t) \leq \operatorname{Gr} \vartheta(t) + \frac{2\pi}{C_0} v^*(t). \quad (16)$$

Аналогічні перетворення виконаємо над рівнянням енергії з системи (4). Маємо

$$\int_{\Omega} \partial \theta / \partial t \cdot \theta(x, t) dx = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} v_i \partial v_i / \partial t =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \theta^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \frac{d\vartheta^2(t)}{dt} = \vartheta(t) \frac{d\vartheta(t)}{dt},$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad}(\theta) \theta(x, t) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} v_i \partial \theta^2(x, t) / \partial x_i dx =$$

$$= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \partial v_i(x, t) / \partial x_i \theta(x, t) dx =$$

$$= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{V}(x, t) \theta(x, t) dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} \Delta \theta \cdot \theta(x, t) dx = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} (\partial E / \partial x_i)^2 dx =$$

$$= - \int_{\Omega} |\operatorname{grad} \theta(x, t)|^2 dx,$$

$$\vartheta(t) \frac{d\vartheta(t)}{dt} + \left(\frac{2\pi}{C_0} + \frac{\operatorname{Pr}^{-1}}{c_1} \right) \vartheta^2(t) \leq$$

$$\leq \frac{2\pi}{C_0} \vartheta(t) \vartheta^*(t) + v(t) \vartheta(t)$$

або після скорочення на $\vartheta(t)$

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} + \left(\frac{2\pi}{C_0} + \frac{\operatorname{Pr}^{-1}}{c_1} \right) \vartheta(t) \leq \frac{2\pi}{C_0} \vartheta^*(t) + v(t). \quad (17)$$

Вводячи функцію енергії $\varepsilon(t) = v(t) + \vartheta(t)$, об'єднаємо нерівності (16) – (17) в нерівність

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + c_2 \varepsilon(t) \leq c_3 \varepsilon(t) + \frac{2\pi}{C_0} \vartheta^*(t),$$

де позначено $c_2 = \frac{2\pi}{C_0} + \frac{1}{c_1} \min \{ \operatorname{Pr}^{-1}, 1 \}$,

$c_3 = \max \{ \operatorname{Gr}, 1 \}$, або приймаючи $c = c_3 - c_2$, остаточно отримуємо

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \leq c \varepsilon(t) + \frac{2\pi}{C_0} \vartheta^*(t). \quad (18)$$

З нерівності (18) отримаємо наступну достатню умову стійкості

$$c < 0 \Leftrightarrow c_3 < c_2 \Leftrightarrow$$

$$\max \{Gr, 1\} < \frac{2\pi}{C_0} + \frac{1}{c_1} \min \{Pr^{-1}, 1\}. \quad (19)$$

З нерівності (19) для випадку перфорування камери горіння системою тонких стрижнів [2], тобто при $C_0 = \infty$ і додатковій умові $\min \{Gr, Pr\} \geq 1$, отримуємо достатню умову стійкості в чисто геометричній інтерпретації $Ra < \frac{1}{c_1}$,

де $Ra = Gr \cdot Pr = g\gamma\ell^3 (T_1 - T_2) / \nu \cdot a$ – число Релея.

Висновки

Проведений аналіз показує, що структура динаміки в перфорованій камері горіння істотно залежить від способу її перфорування (розбиття тонкими стрижнями) і в одних випадках приводить до стабілізуючих впливів (виникнення у відповідному фазовому просторі стійкої нерухомої точки), а в інших – до виникнення режимів періодичних (рис. 2, б), або стохастичних автоколивань (рис. 2, в). Базуючись на рівняннях Нав'є–Стокса в наближенні Буссинеска, дією оператором усереднення за просторовими змінними, отримано диференціальну нерівність для енергії потоку. З отриманої диференціальної нерівності для енергії потоку отримана достатня умова його стійкості, при виконанні якої будь-яке гладке нестационарне збурення з часом стабілізується.

ЛІТЕРАТУРА

1. Когут П.И. Асимптотический анализ задачи Бенара-Рэлея в обобщенной ячейке Куэтта / П.И. Когут, В.В. Гоцуленко // Ломоносовские чтения-2008: междунар. науч. конф., 24-25 апр. 2008 г.: тезисы докл. – С. 74–75.
2. Kogut P.I. Homogenization of the nonlinear of Benard problem in the generalized Couette cell / P.I. Kogut, V.V. Gotsulenko // Second International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya.D. Lopatinskii, November 11–14, 2008.: Books of abstracts.– Donetsk Nation. Univ., 2008. – С. 62.
3. Гоцуленко В. В. Асимптотический анализ уравнения Навье - Стокса в обобщенной ячейке Куэтта

/В.В. Гоцуленко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – ДНУ. – 2007. – С. 44–63.

4. Кузнецов С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. – Ижевск.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 295 с.

5. Birnir B. Existence theory and strong attractors for the Rayleigh-Benard problem with a large aspect ratio / B. Birnir B., N. Svanstedt // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2004. – Vol.10. – P. 58–74.

6. Kapustyan O.V. A weak attractor and properties of solutions for the three-dimensional Benard problem / O.V. Kapustyan, V.S. Melnik, J. Valero // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2007. – Volume 18, Number 2&3. – P. 449–481.

7. Деклараційний патент України № 15255. Камера горіння повітря-нагрівача доменних печей / В.В.Гоцуленко, В.М. Гоцуленко. – Бюллетень. – 2006. – № 6.

8. Гоцуленко В.В. Управление автоколебаниями при вибрационном горении / В.В. Гоцуленко, А.М. Павленко, Б.И. Басок // Промышленная теплотехника. – 2005. – Т. 27, № 1. – С. 9–13.

9. Гоцуленко В. В. Математическое моделирование стохастических автоколебаний в сотовых моделях камер горения регенеративных воздухонагревателей доменных печей / В.В. Гоцуленко, А.М. Павленко // Металургія (Наукові праці ЗДІА). – Запоріжжя: РВВ ЗДІА. – 2008. – Вип. 18. – С. 31–38.

Отримано 03.07.2009 р.