УДК 521.21/22

Ю.О. Лук'янченко

ПОПЕРЕДНЄ ОПРАЦЮВАННЯ СУПУТНИКОВИХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ГРАДІЄНТІВ МІСІЇ GOCE

Супутник GOCE запущено у 2009 р. на низькій (260 км) орбіті, на його борту встановлено електростатичний гравітаційний градієнтометр для вимірювання градієнтів прискорення вільного падіння. В роботі наведено алгоритм використання кватерніонів при трансформуванні градієнтів прискорення вільного падіння від системи GRF (референцна система градієнтометра) до LNOF (локальна система, орієнтована на північ). Виконано математичну перевірку проміжних обчислень та показано способи, що покращують використання даних.

Ключові слова: кватерніони; місія GOCE; правило перетворення коваріації; гравітаційні градієнти; системи координат.

Вступ

Супутник GOCE запущено у 2009 р. на низькій (260 км) орбіті, на його борту встановлено електростатичний градієнтометр для вимірювання градієнтів прискорення вільного падіння. Після запуску супутника GOCE стали доступними виміряні ним градієнти прискорення вільного падіння, що стало поштовхом до нових досліджень у цій галузі. Європейська космічна агенція надала дослідникам доступ до великого набору різноманітних даних. Постала проблема вибору та правильного порядку використання потрібних даних для опрацювання гравітаційних градієнтів з подальшим їх використанням.

Постановка завдання

У роботі використано дані **EGG_NOM_2** (гравітаційні градієнти у системі **GRF**, їх точність, поправки, кватерніони переходу від **GRF** до **IRF**), **EGG_TRF_2** (гравітаційні градієнти у системі **LNOF**, їх точність та географічні координати φ, λ, r), **SST_PSO_2** (дані кінематичної орбіти та кватерніони переходу від **EFRF** до **IRF**) [Gruber et al., 2010]. Це, своєю чергою, дає змогу отримати вертикальні градієнти V_{zz}, за допомогою яких можна обчислити гармонійні коефіцієнти гравітаційного поля Землі. Оскільки дані **EGG_NOM_2** рекомендують використовувати для побудови глобальних моделей гравітаційного поля, то виникає задача трансформування градієнтів із системи градієнтометра **GRF**, яка є близькою до орбітальної системи **LNOF** (орієнтація осей **NEU**), для якої і записується рівняння вертикальних градієнтів [Марченко та ін., 2011].

Зв'язок кватерніонів та матриці повороту

Кватерніоном називається гіперкомплексне число, яке геометрично реалізується у чотиривимірному просторі. Систему кватерніонів створив у 1843 р. Вільям Роуен Гамільтон. Вона була першою системою, яка узагальнює комплексні числа. Потім кватерніони забули і до 60-х років XX століття майже не використовували. Починаючи з середини 60-х років, кватерніони набувають все більшої популярності в аналітичній фотограмметрії та інших прикладних науках. На сучасному етапі кватерніонне обчислення є основною частиною математичного апарату сучасної космічної фотограмметрії та космічної геодезії.

Кватерніони дозволяють досить ефективно розв'язувати задачі, пов'язані з композиціями обертань простору. Вони мають ряд переваг, порівняно з описом обертання за допомогою ейлерових кутів, оскільки дають можливість отримати безпосередньо координати вектора у новій системі координат при повороті простору на кут θ навколо деякої інваріантної осі $\mathbf{C}^0$.

Кватерніони утворюють чотиривимірну алгебру над полем дійсних чисел з базисом (1, $\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$, $\mathbf{e_z}$). Насправді $\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$, $\mathbf{e_z}$ можуть мати загальнішу суть, ніж орти в ортонормованому базисі.

Для роботи з кватерніонами необхідно знати правила їх перемноження (див. таблицю).

Правила перемноження елементів кватерніона

$1 \times 1 = 1$	$1 \times \mathbf{e_x} = \mathbf{e_x}$	$1 \times \mathbf{e_y} = \mathbf{e_y}$	$1 \times \mathbf{e_z} = \mathbf{e_z}$
$\mathbf{e_x} \times 1 = 1$	$\mathbf{e_x} \times \mathbf{e_x} = -1$	$\mathbf{e_x} \times \mathbf{e_y} = \mathbf{e_z}$	$\mathbf{e_x} \times \mathbf{e_z} = -\mathbf{e_y}$
$\mathbf{e_y} \times 1 = 1$	$\mathbf{e_y} \times \mathbf{e_x} = -\mathbf{e_z}$	$\mathbf{e_y} \times \mathbf{e_y} = -1$	$\mathbf{e_y} \times \mathbf{e_z} = \mathbf{e_x}$
$\mathbf{e_z} \times 1 = 1$	$\mathbf{e_z} \times \mathbf{e_x} = \overline{\mathbf{e_y}}$	$\mathbf{e_z} \times \mathbf{e_y} = -\mathbf{e_x}$	$\mathbf{e_z} \times \overline{\mathbf{e_z}} = -1$

З цього випливає, що:

$$\mathbf{e_x}^2 = \mathbf{e_y}^2 = \mathbf{e_z}^2 = \mathbf{e_x}\ \mathbf{e_y}\ \mathbf{e_z} = -1,$$

де порядок множників у добутку $\mathbf{e_x}\ \mathbf{e_y}\ \mathbf{e_z}$ строго фіксований.

Також наслідком цих базових співвідношень є:

$$\mathbf{e_x}\ \mathbf{e_y} = -\mathbf{e_y}\ \mathbf{e_x} = \mathbf{e_z};\ \mathbf{e_y}\ \mathbf{e_z} = -\mathbf{e_z}\ \mathbf{e_y} = \mathbf{e_x};$$

$$\mathbf{e_z}\ \mathbf{e_x} = -\mathbf{e_x}\ \mathbf{e_z} = \mathbf{e_y}.$$

Будь-який кватерніон можна подати так:

$$Q = \mathrm{A} + c_1\ \mathbf{e_x} + c_2\ \mathbf{e_y} + c_3\ \mathbf{e_z}. \qquad (1)$$

При цьому розрізняють скалярну частину А та векторну:

$$\mathbf{C^0} = c_1\ \mathbf{e_x} + c_2\ \mathbf{e_y} + c_3\ \mathbf{e_z},$$

отже:

$$Q = \mathrm{A} + \mathbf{C^0}.$$

Якщо A=0, то кватерніон є вектором, що свідчить про тісний зв'язок кватерніонного та векторного обчислення (історично векторне обчислення виникло із кватерніонного).

Для кожного кватерніона існує спряжений кватерніон

$$Q^{-1} = \mathrm{A} - c_1\,\mathbf{e_x} - c_2\,\mathbf{e_y} - c_3\,\mathbf{e_z} = \mathrm{A} - \mathbf{C^0}, \qquad (2)$$

при цьому

$$Q\,Q^{-1} = Q^{-1}\,Q = \mathbf{A}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2. \qquad (3)$$

Величина $Q\,Q^{-1}$ є дійсним числом і називається нормою кватерніона та позначається $N(Q)$. Норма кватерніона $N(Q)$ задовольняє співвідношення

$$N(Q_1Q_2) = N(Q_1)N(Q_2)\,. \qquad (4)$$

Будь-яке обертання тривимірного простору навколо початку координат можна задати за допомогою кватерніона q з нормою, яка дорівнює одиниці. Поворот, відповідний кватерніону q, перетворює вектор $\mathbf{r^0} = l\mathbf{e_x} + m\mathbf{e_y} + n\mathbf{e_z}$ на вектор $\mathbf{R^0} = L\mathbf{e_x} + M\mathbf{e_y} + N\mathbf{e_z}$.

$$\mathbf{R^0} = q\mathbf{r^0}q^{\mathbf{-1}} = L\mathbf{e_x} + M\mathbf{e_y} + N\mathbf{e_z}\,. \qquad (5)$$

Розглянемо алгоритм, який описує кватерніонний поворот простору в ортонормованому базисі.

Нехай напрям на точку простору перед поворотом задано одиничним вектором

$$\mathbf{r^0} = l\mathbf{e_x} + m\mathbf{e_y} + n\mathbf{e_z}\,,$$

відомо кут θ повороту простору та напрямні косинуси c_1, c_2, c_3 осі повороту $\mathbf{c^0} = c_1\mathbf{e_x} + c_2\mathbf{e_y} + \; + c_3\mathbf{e_z}$. Потрібно визначити напрямні косинуси одиничного вектора $\mathbf{R^0} = L\mathbf{e_x} + M\mathbf{e_y} + N\mathbf{e_z}$, на який перетворився вектор r^0 в результаті повороту осі $\mathbf{c^0}$ на кут θ.

Розглянутому повороту відповідає нормований кватерніон q:

$$q = \frac{1}{N}\left(A + c_1\mathbf{e_x} + c_2\mathbf{e_y} + c_3\mathbf{e_z}\right) = a + b\mathbf{e_x} + c\mathbf{e_y} + d\mathbf{e_z},$$

де $\quad A = N\cos\frac{\theta}{2}; \qquad N = \sqrt{A_1{}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 + c^2{}_3},$

звідки

$$N = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}; \qquad A = ctg\frac{\theta}{2}\,.$$

Спряжений нормований кватерніон q^{-1} матиме вигляд

$$q^{-1} = \frac{1}{N}\left(A - c_1\mathbf{e_x} - c_2\mathbf{e_y} - c_3\mathbf{e_z}\right).$$

Тоді вектор $\mathbf{R^0}$ можна визначити за формулою:

$$\mathbf{R^0} = q\mathbf{r^0}q^{-1}, \qquad (6)$$

де при перемноженні компонент треба дотримуватись правил перемноження ортів (див. табл.) [Урмаєв, 1989].

Перепишемо елементи кватерніона через такі позначення q_1, q_2, q_3, q_4, що, своєю чергою, відповідає A, c_1, c_2, c_3, тоді матрицю повороту $\mathbf{R}$ можна записати через елементи кватерніона.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Інтерполяція кватерніонів та координат супутника

Місія GOCE дає можливість отримати велику кількість різноманітних даних, і часто ці дані приведені на різні епохи. Тоді виникає необхідність у їх інтерполяції. Під час розв'язання поставленої задачі виникла потреба в інтерполяції двох типів даних, а саме: прямокутних координат супутника та кватерніонів переходу від однієї системи до іншої.

Для інтерполяції координат використано інтерполяційний поліном Лагранжа третього степеня, тобто взяли два попередніх та два наступних вузли інтерполяції відносно точки, на яку виконується інтерполяція. Для інтерполяції кватерніонів використано методику, яку рекомендує Європейська космічна агенція [Gruber et al., 2010].

Нехай нам потрібно знайти кватерніон на певну епоху, маючи два сусідніх кватерніони (один заданий на попередню епоху, інший заданий на наступну), назвемо їх відповідно q_a та q_b, результуючий кватерніон назвемо q_{ab}. Отже, отримаємо такий вираз $q_{ab} = q_a q_b$, і тоді елементи нового кватерніона будуть обчислюватись за формулами (8):

$$\left.\begin{aligned} q_{ab4} &= q_{a4}q_{b4} + q_{a1}q_{b1} + q_{a2}q_{b2} + q_{a3}q_{b3} \\ q_{ab1} &= q_{a4}q_{b1} - q_{a1}q_{b4} + q_{a3}q_{b2} - q_{a2}q_{b3} \\ q_{ab2} &= q_{a4}q_{b2} - q_{a2}q_{b4} + q_{a1}q_{b3} - q_{a3}q_{b1} \\ q_{ab3} &= q_{a4}q_{b3} - q_{a3}q_{b4} + q_{a2}q_{b1} - q_{a1}q_{b2} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Нехай кожен кватерніон заданий на певну епоху, введемо відповідні позначення: t, t_a, t_b, після чого визначимо такі величини:

$$\Phi_{ab} = 2\arccos(q_{ab4}); \qquad (9)$$

$$\Phi_{at} = \Phi_{ab}\frac{t - t_a}{t_b - t_a}; \qquad (10)$$

Тоді можна обчислити елементи кватерніона q_{at}

$$\left.\begin{aligned} q_{at4} &= \cos\frac{\Phi_{at}}{2} \\ q_{at1} &= q_{ab1}\frac{\sin\frac{\Phi_{at}}{2}}{\sin\frac{\Phi_{ab}}{2}} \\ q_{at2} &= q_{ab2}\frac{\sin\frac{\Phi_{at}}{2}}{\sin\frac{\Phi_{ab}}{2}} \\ q_{at3} &= q_{ab3}\frac{\sin\frac{\Phi_{at}}{2}}{\sin\frac{\Phi_{ab}}{2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (11)$$

Після цього потрібний нам кватерніон можна знайти з рівняння (12)

$$q_t = q_a q_{at}\,, \tag{12}$$

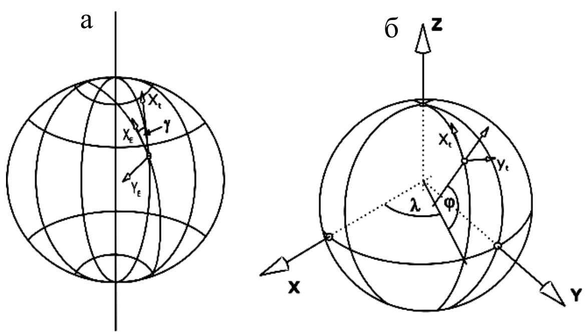
де елементи q_t визначають за виразами (13).

$$\left.\begin{aligned} q_{t4} &= q_{a4}q_{at4} - q_{a1}q_{at1} - q_{a2}q_{at2} - q_{a3}q_{at3} \\ q_{t1} &= q_{a4}q_{at1} + q_{a1}q_{at4} - q_{a3}q_{at2} + q_{a2}q_{at3} \\ q_{t2} &= q_{a4}q_{at2} + q_{a2}q_{at4} - q_{a1}q_{at3} + q_{a3}q_{at1} \\ q_{t3} &= q_{a4}q_{at3} + q_{a3}q_{at4} - q_{a2}q_{at1} + q_{a1}q_{at2} \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Системи координат

У роботі розглянемо такі системи координат: **GRF**, **LNOF**, **EFRF**, **IRF** [Gruber et al., 2010]. Останні дві системи є добре відомими, це земна та інерціальна системи відповідно. Система **LNOF** – це система, центр якої розташований у центрі мас супутника, вісь OX напрямлена на північ, вісь OZ збігається з радіус-вектором до супутника і вісь OY доповнює систему до правої. Система **GRF** є системою самого градієнтометра, її центр міститься у центрі мас градієнтометра, вісь OX напрямлена в напрямку руху супутника, вісь OZ близька до напрямку радіус-вектора до супутника, але за рахунок зовнішніх сил має невелике відхилення від нього, вісь OY доповняє систему до правої (рис. 1). Можна сказати, що система **GRF** є реальною системою, напрямки якої визначаються положенням градієнтометра, а система **LNOF** є модельною.

Орієнтація супутника визначається за допомогою системи **GNSS** та спеціальних камер, що стежать за зірками (star-trackers).



Система **LNOF** для геодезичних координат (б) і розходження між напрямками осей систем **GRF** та **LNOF** (а)

Перехід від системи **LNOF** до **EFRF** реалізується через матрицю повороту **R** (14),

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & \sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda & -\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Перетворення тензора градієнтів між різними системами координат

Для трансформування координат від однієї системи до іншої використовується матриця повороту простору $\mathbf{R}$, наприклад, трансформування координат від геоцентричної до топоцентричної системи виконується відповідно до рівняння

$$\mathbf{X_g} = \mathbf{R}\mathbf{X_t}\,, \tag{15}$$

де $\mathbf{X_g}$ і $\mathbf{X_t}$ є векторами прямокутних координат у геоцентричній та топоцентричній системах відповідно.

Для того, щоб трансформувати градієнти між цими системами, потрібно використати правило перетворення коваріації (16) [Марченко та ін., 2011]

$$\mathbf{V_g} = \mathbf{R}\mathbf{V_t}\mathbf{R^T}\,, \tag{16}$$

де $\mathbf{V_g}$ і $\mathbf{V_t}$ є тензорами градієнтів у геоцентричній та топоцентричній системах відповідно.

Отже, остаточно трансформування гравітаційних градієнтів із системи **GRF** до системи **LNOF** можна виконати так:

$$\mathbf{V_{LNOF}} = \mathbf{R^T_{L-E}}[\mathbf{R^T_{E-I}}(\mathbf{R_{G-I}}\mathbf{V_{GRF}}\mathbf{R^T_{G-I}})\mathbf{R_{E-I}}]\mathbf{R_{L-E}}\,, \tag{17}$$

де **R** з відповідними індексами означає трансформування між певними системами, букви в індексах показують, між якими системами координат відбувається трансформування (**LNOF**, **GRF**, **IRF**, **EFRF**).

За цим самим правилом можна виконувати оцінку точності визначень.

Результати математичних обчислень

Після проведення обчислення виявлено, що при обчисленні матриці повороту від **EFRF** до **IRF** через кватерніони у файлах **PSO** її визначник дорівнює одиниці з точністю 10^{-5}. Після проведення аналогічної операції з кватерніонами у файлах **NOM** визначник не дорівнював одиниці, але після декількох експериментів було встановлено, що визначник матриці набуває значення 1 з точністю 10^{-3}, якщо змінити порядок вихідних кватерніонів. Після трансформування градієнтів у файлах **NOM** з **GRF** до **LNOF** і порівняння їх з градієнтами у файлах **TRF** виявилось, що вони не відповідають один одному. Проведені експерименти показали, що якщо використовувати кватерніони з файлів **NOM** для трансформування градієнтів з файлів **TRF**, то отримуємо результат, подібний до того, який одержано після трансформування градієнтів з файлів **TRF** до системи **EFRF** через матрицю повороту (14) і потім трансформування їх до системи **IRF** через кватерніони з файлів **PSO**.

Висновки

Оскільки дані **EGG_NOM_2** рекомендують для побудови глобальних моделей гравітаційного поля Землі, в роботі наведено алгоритм трансформування градієнтів із системи **GRF** до **LNOF**, що необхідно для подальшого визначення гармонічних коефіцієнтів гравітаційного поля Землі. Також автор робить припущення про інший порядок використання кватерніонів у файлах **EGG_NOM_2** та про те, що у цих файлах задаються кватерніони переходу від **LNOF** до **IRF**, а не від **GRF** до **IRF**.

Література

Урмаєв М.С. Космическая фотограмметрия: учебник для вузов. – М.: Недра, 1989. – 279 с.

Марченко О.М., Ярема Н.П., Лопушанський О.М., Лук'янченко Ю.О. Добові розв'язки гармонічних коефіцієнтів 2-го порядку за даними градієнтометра місії GOCE // Геодинаміка. – 2011. – 1 (10). – С. 22–26.

Eicker A. Gravity Field Refinement by Radial Basis Functions from In-situ Satellite Data // Institut fur Geodasie und Geoinformation der Universitat Bonn, 2008.

Bock H., Jäggi A., Meyer U., Visser P., Van den Ijssel J., Van Helleputte T., Heinze M., Hugentobler U. GPS-derived orbits for the GOCE satellite // J. Geod. – 2011. – 85. – P. 807–818.

Bouman J., Fiorot S., Fuchs M., Gruber T., Schrama E., Tscherning C., Veicherts M., Visser P. GOCE gravitational gradients along the orbit // J. Geod. – 2011. – 85. – P. 791–805.

Muller J. GOCE gradients in various reference frames and their accuracies // Advances in Geosciences. – 2003. – 1. – P. 33–38.

Pail R., Plank G. Assessment of three numerical solution strategies for gravity field recovery from GOCE satellite gravity gradiometry implemented on a parallel platform // Journal of Geodesy. – 2002. – 76. – P. 462–474.

Gruber Th., Rummel R., Abrikosov O., Van Hees R. GOCE High Level Processing Facility GOCE Level 2 Product Data Handbook // The European GOCE Gravity Consortium EGG-C. – 2010. – 77 p.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СПУТНИКОВЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ГРАДИЕНТОВ МИССИИ GOCE

Ю.А. Лукьянченко

Спутник GOCE был запущен в 2009 г. на низкой (260 км) орбите, на его борту расположен электростатический гравитационный градиентометр для измерения ускорения свободного падения. В работе приведен алгоритм использования кватернионов для трансформации гравитационных градиентов от системы GRF (референсная система градиентометра) к LNOF (локальная система, ориентированная на север). Выполнена математическая проверка промежуточных вычислений и показаны способы, улучшающие использование данных.

Ключевые слова: кватернионы; миссия GOCE; правило преобразования ковариации; гравитационные градиенты; системы координат.

PREPROCESSING OF SATELLITE GRAVITY GRADIENT OF GOCE MISSION

Y.O. Lukyanchenko

GOCE satellite was launched in 2009 on a low (260 km) orbit and it contains the electrostatic gravity gradiometer which is destining for measuring of gravity gradients. In the paper the algorithm of using of quaternions during the transformation of gravity gradients from the system GRF (Gradiometer Reference Frame) to LNOF (Local North Oriented Frame) is shown. Mathematical verification of intermediate calculations is realized and methods of improvement of data using are shown.

Key words: quaternions; GOCE mission; rule of transformation of covariance; gravity gradients; coordinates systems.

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів Надійшла 10.05.2012