УДК 536.25

Фиалко Н.М., Блинов Д.Г., Прокопов В.Г., Шеренковский Ю.В., Юрчук В.Л., Сариогло А.Г.

Институт технической теплофизики НАН Украины

МАЛОМОДОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Розглянуто питання побудови маломодових моделей процесів теплопереносу. Проаналізовано різні аспекти застосування методу поліаргументних систем та методу декомпозиції по ортогональним власним функціям. Показана ефективність та перспективність застосування цих методів для аналізу процесів теплопереносу в тілах складної форми.

Рассмотрены вопросы построения маломодовых моделей процессов теплопереноса. Проанализированы различные аспекты применения метода полиаргументных систем и метода декомпозиции по ортогональным собственным функциям. Показана эффективность и перспективность применения этих методов для анализа процессов теплопереноса в телах сложной формы.

The issues of construction of low-dimensional models for heat transfer problems are discussed. The various aspects of applying the method of polyargumental systems and method of proper orthogonal decomposition are analysed. It is shown effectiveness and perspective of these methods for analyzing problems in the irregular domain.

a – амплитудный коэффициент,
A – параметр, характеризующий теплоотвод с поверхности пластины,
Bi – число Био,
c_p – теплоемкость,
Fo – число Фурье,
l – размер пластины,
n – внешняя нормаль к торцевой поверхности пластины,
q – функция тепловыделения,
t – температура пластины,
t_s – температура окружающей среды,
x, y – координаты,
X, Y – безразмерные координаты,
α – коэффициент теплоотдачи,
Γ – торцевая поверхность пластины,
δ – толщина пластины,
λ – теплопроводность материала пластины,
Θ – безразмерная температура,
ρ – плотность материала пластины,
τ – текущее время,
φ – пространственная базисная функция,
Φ – безразмерный источник тепловыделения,
POD – метод ортогональной декомпозиции (proper orthogonal decomposition),
ММ – маломодовая модель,
МПС – метод полиаргументных систем.

Индексы нижние:

max – максимальный.

При применении современных вычислительных методов для моделирования физических процессов, характеризующихся сложным временным и пространственным поведением, необходимо использовать модели, включающие в себя большое число подлежащих определению свободных параметров – таких как значения искомых величин в дискретных точках для методов конечных разностей и конечных элементов, амплитудные коэффициенты в спектральных методах и т.д. При этом соответствующие решения сложны для качественного и инженерного анализа, а количество информации, необходимой для хранения всех результатов вычислений, превышает разумные возможности вычислительных средств. В этой связи развитие методов, позволяющих получить решение в компактном, маломодовом виде (с небольшим числом свободных параметров) представляет значительный интерес.

Актуальность ММ связана и с прикладной стороной физического моделирования. Решение таких задач как задачи оптимизации, управления и идентификации, основанное на полных моделях, которые могут быть сильно нелинейными, невозможно даже при современном уровне вычислительной техники и, что еще более важно, нецелесообразно в рамках современных идей проектирования технических устройств, опирающихся на системный анализ и требующих соответствия точности и детализации описания уровню сложности применяемых алгоритмов моделирования.

В настоящей работе рассматривается один из эффективных подходов составления ММ, основанный на методах POD [1] и МПС [2]. Первоначально этот подход был предложен как попытка выявить детерминированные структуры в исследуемом физическом процессе. Ключевой идеей этих методов является определение эффективного базиса, позволяющего отразить в аппроксимационном приближении (построенном на основе этого базиса) основные пространственно-временные особенности изучаемого процесса. В традиционных интегральных и проекционных методах, в различных полуаналитических подходах проблема выбора базиса решается априорно, на основе эвристических соображений или свойств дифференциального оператора, описывающего исследуемый процесс. Это приводит к избыточности в смысле числа свобод описания (что является платой за полноту выбранного базиса). Методы POD и МПС являются эффективной попыткой преодоления такой избыточности.

Метод POD состоит в нахождении пространственного базиса на основе определения собственных функций некоторого интегрального уравнения [1]. Это интегральное уравнение (основное уравнение метода) строится путем аппроксимации корреляционной функции, определяемой по аппроксимируемому полю. При этом получаемый базис (по терминологии метода POD – эмпирический базис) является ортогональным, а временные коэффициенты, рассчитанные на его основе – некоррелированными во времени, что позволяет говорить о членах такой аппроксимации как о невзаимодействующих в среднем модах (но это не означает отсутствие взаимодействия локально во времени). В методе МПС результат находится в процессе решения специальным образом построенной полиаргументной системы [2, 3].

В силу специфики построения базиса, исследование процесса с помощью методов POD и МПС можно назвать эмпирическим спектральным анализом, в результате которого осуществляется декомпозиция изучаемых пространственно-временных полей по ортогональным базисным функциям и согласованным с ними ортогональным (некоррелированным) амплитудным коэффициентам. В отличие от традиционных подходов полученный эмпирический базис является не априорным, а индивидуальным, отражающим особенности данной конкретной задачи. Такие качественные характеристики как: коррелированность во времени взаимодействующих процессов (например, теплового и гидродинамического в задачах естественной конвекции), взаимосвязь пространственных подобластей задачи (ядра течения и погранслоя), влияние параметров и т.д. могут быть эффективно оценены на основе построенного приближения. Практика применения POD и МПС к задачам тепломассобмена показала их высокую эффективность [3–5].

Найденный указанными методами пространственный базис может быть положен в основу построения маломодовой модели, для составления которой используются проекционные методы типа Галеркина. Для этого дифференциальные уравнения, описывающие изучаемые процессы, проектируется на полученный при аппроксимации базис.

В качестве примера применения изложенного подхода рассмотрим задачу управления температурным режимом радиоэлектронного устройства сложной конфигурации (см. рис. 1) при наличии локализованных по пространству источников тепловыделения, изменяющихся во времени. Для упрощения анализа рассмотрим двумерную постановку следующего вида:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} - A\Theta + \Phi\,, \quad \left. \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} + \mathrm{Bi}\,\Theta \right) \right|_{\Gamma} = 0, \qquad (1)$$

$$\Theta\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0\,.$$

Здесь $\Theta\left(X,Y,\mathrm{Fo}\right)=\dfrac{t-t_s}{\dfrac{q_{\max}l^2}{\lambda\delta}}$, $\mathrm{Fo}=\dfrac{\lambda\tau}{\rho c_p l^2}$, $X=\dfrac{x}{l}$,

$$Y=\frac{y}{l},\; A=\frac{\alpha l^2}{\lambda\delta},\; \Phi=\frac{q}{q_{\max}},\; \mathrm{Bi}=\frac{\alpha\delta}{\lambda},$$

$0\le x,y\le l\le\tau,\;\; t=t(x,y,\tau)$.

Задача состоит в составлении динамической модели (системы обыкновенных дифференциальных уравнений) небольшой размерности, описывающей временное поведение изучаемого объекта при различном характере изменения во времени источников тепловыделения. Для этого необходимо определить специфический для анализируемой задачи пространственный

Задача состоит в составлении динамической модели (системы обыкновенных дифференциальных уравнений) небольшой размерности, описывающей временное поведение изучаемого объекта при различном характере изменения во времени источников тепловыделения. Для этого необходимо определить специфический для анализируемой задачи пространственный базис, отражающий характер изменения искомой функции в рассматриваемой области. Выбрав конкретный вид источника Φ(*X,Y*,Fo) и решив уравнение (1) при соответствующих граничных условиях, получим поле, обработав которое с помощью методов POD или МПС, определим искомый базис $\left\{\varphi_i\left(X,Y\right)\right\}$.

На рис. 2 показан характер пространственного распределения некоторых базисных функций для указанной постановки при

$$\Phi\left(X,Y,\mathrm{Fo}\right)=f(\mathrm{Fo})\sum_{1\le i\le M}\exp\left(-k_i\left(\left(X-X_i\right)^2+\left(Y-Y_i\right)^2\right)\right)$$

и следующих значениях параметров: A = 0,5; Bi = 0,05; M = 3; $k_1=k_2=k_3=500$; X_1 = 0,2; X_2 = 0,8; X_3 = 0,5; Y_1 = 0,8; Y_2 = 0,8; Y_3 = 0,25; f(Fo)=1. Эффективность найденного базиса иллюстрирует рис. 3, на котором приведено изменение во времени среднеквадратичной по рассматриваемой области погрешности δ, % в зависимости от

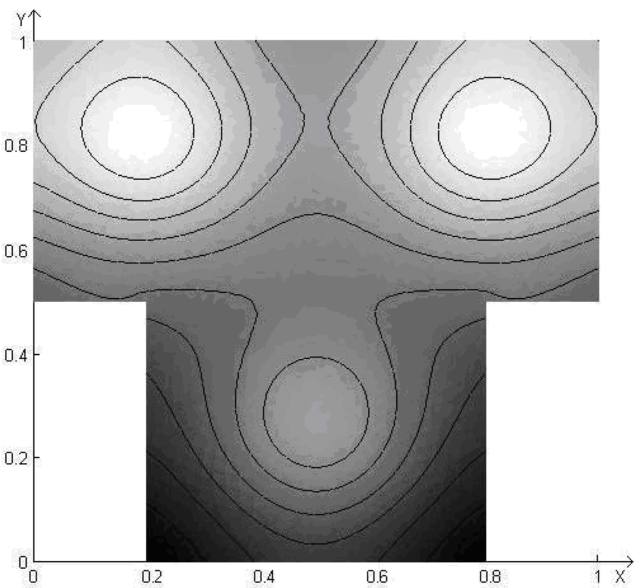


Рис. 1. К постановке задачи.

числа членов в аппроксимации. Как следует из полученных данных, имеет место быстрая сходимость. Так, уже пяти членов оказывается достаточно, чтобы погрешность аппрокисимации не превышала одного процента. Для сравнения отметим, что при разложении этого же поля в соответствии со стандартной процедурой, принятой в теории управления, по собственным функциям задачи (1), для обеспечения той же точности необходимо около восьмидесяти членов ряда.

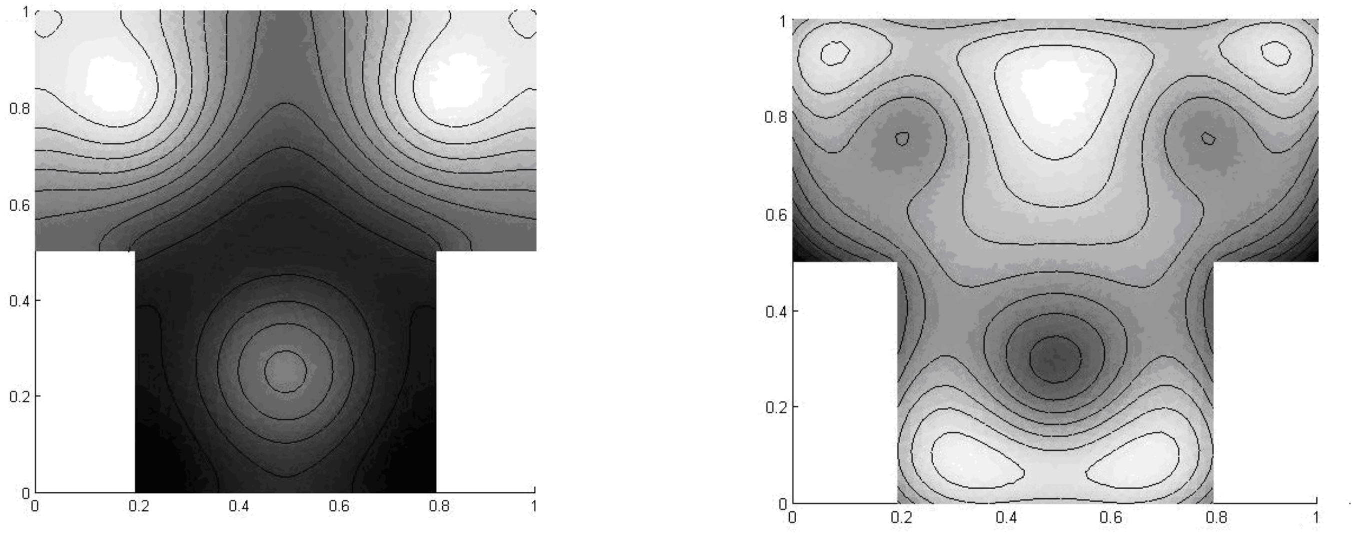
Далее представим искомую переменную Θ(*X,Y*,Fo) в виде разложения по найденным выше пространственным базисным функциям $\varphi_i(X,Y)$:

$$\Theta\left(X,Y,\mathrm{Fo}\right)\approx\Theta_N\left(X,Y,\mathrm{Fo}\right)=\sum_{1<=i<=N}a_i(\mathrm{Fo})\varphi_i\left(X,Y\right).$$

Используя процедуру проектирования исходного уравнения (1) на найденный базис, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения амплитудных коэффициентов $\{a_i\}$

$$\frac{d\mathrm{a}}{d\,\mathrm{Fo}}=A_1\mathrm{a}+Q\,, \qquad (2)$$

(вид матричных коэффициентов приведен в



а) *б)*

Рис. 2. Вид базисных функций $\varphi_i(X, Y)$: а) i = 2; б) i = 5.

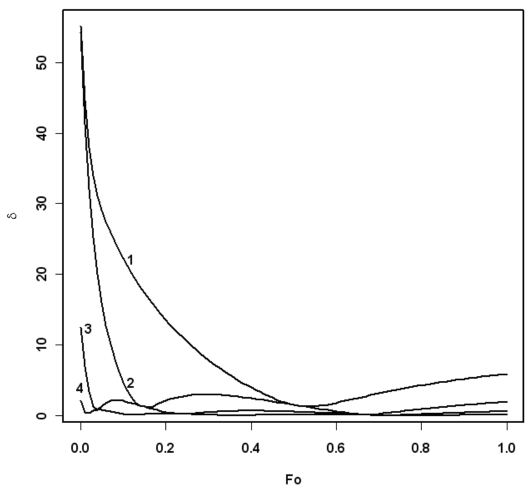


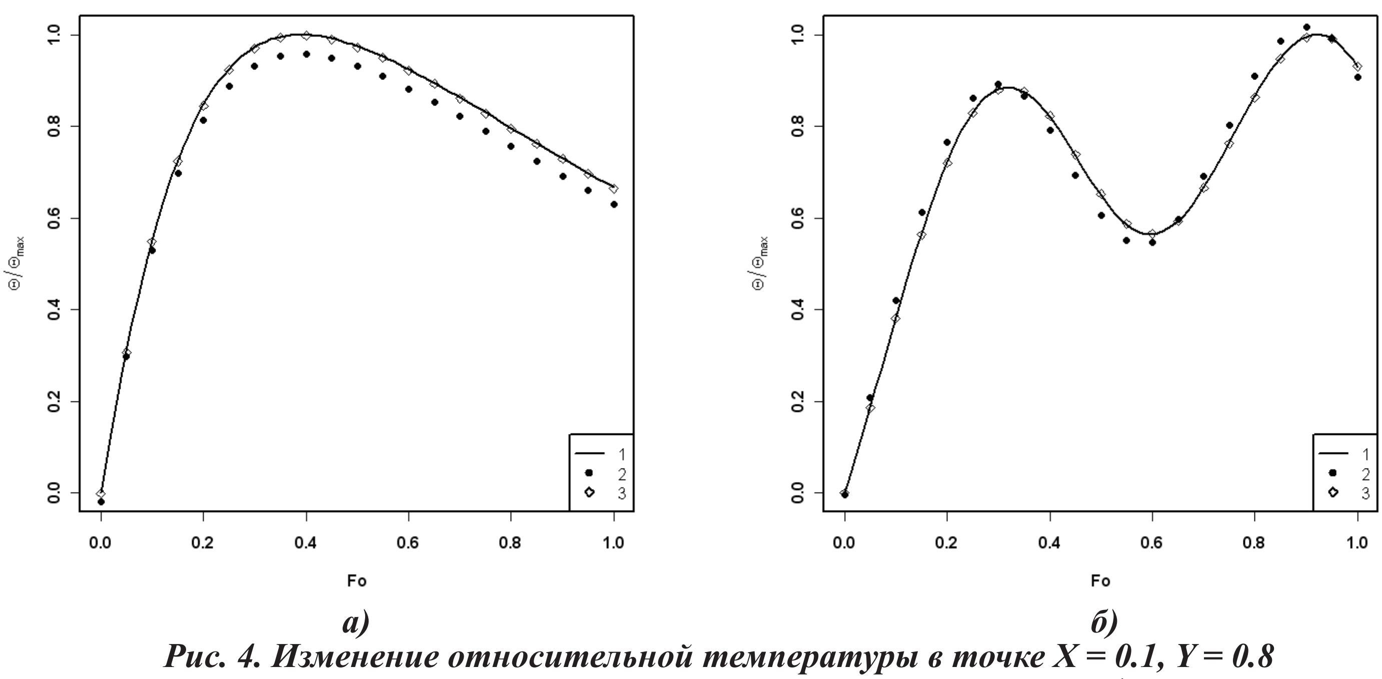
Рис. 3. Изменение во времени среднеквадратичной погрешности для различного числа членов N: 1 – N = 1, 2 – 2, 3 – 3, 4 – 4.

[3]).

Построенная система (2) и является искомой маломодовой моделью для анализируемого объекта. По форме приведенная система (2) является стандартной записью метода Галеркина. Принципиальное отличие излагаемого подхода связано с процедурой построения оптимального базиса. Как известно, в проекционных методах выбор базиса определяет не только необходимое число членов в приближенном решении, но и устойчивость вычислительного процесса. В связи с этим, использование в качестве базиса не априорно выбранной, а специально определенной системы функций, отражающей особенности данной задачи, позволяет существенно улучшить отмеченные характеристики. Следует также подчеркнуть, что при априорном выборе базиса наличие сложной конфигурации области существенно затрудняет построение базисных функций и требует дополнительных усилий (в частности, использования метода R-функций [6] и т.п.). При использовании же излагаемого в настоящей работе подхода, сложная форма области не вызывает дополнительных трудностей, поскольку она учитывается наряду с другими особенностями задачи при определении базисных функций.

Принципиальный вопрос, возникающий при использовании построенной модели, связан с определением диапазона параметров, в котором применима предлагаемая модель. Наиболее часто предполагается, что базис, найденный при каком-либо одном (реперном) наборе параметров, остается корректным и в некотором диапазоне их изменения. Более ресурсозатратным является проведение вычислений для целого ряда реперных значений параметров и использования всех данных, полученных в процедуре осреднения. Тем самым находится базис, учитывающий особенности исследуемого процесса во всем интересующем диапазоне. Практика построения моделей на основе изложенного метода показывает, что при корректном подходе к построению базиса динамическая модель обладает приемлемым уровнем погрешности и способностью отразить качественные особенности процесса.

В данном примере для построения базиса использовался источник с характеристиками не зависящим от времени. Однако полученный базис оказывается достаточным и для решения задач с принципиально иным временным поведением. На рис. 4 приведены результаты расчетов с помощью маломодовой модели (2) для источников с экспоненциальным и синусоидальным характером поведения во времени. Погрешность моделирования для всех рассмотренных случаев не превышает одного процента. Показательным является также тот факт, что базис был построен на основе данных, полученных на временном участке значительно меньшем чем моделируемый интервал. Это свидетельствует о широком диапазоне корректности построенной модели.



а) б)

Рис. 4. Изменение относительной температуры в точке X = 0.1, Y = 0.8 при различном характере временной зависимости тепловыделения: экспоненциальном (а) и синусоидальном (б), 1 – точное решение, 2 – N = 3, 3 – N = 4.

Выводы

Таким образом, лежащая в основе методов POD и МПС идея построения базиса, индивидуального для рассматриваемой задачи, позволяет этим методам служить эффективным средством построения ММ процессов тепломассопереноса. Сочетание физичности и компактности ММ позволяет использовать такого рода модели, как при физическом анализе изучаемых процессов, так и при решении таких ресурсоемких задач как задачи управления, оптимизации и идентификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sirovich L.* Turbulence and the dynamics of coherent structures, Parts I – III // Quarterly of Applied Mathematics. – 1987. – Vol.45. – P. 561–590.

2. *Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В.* Об одном новом методе математического исследования процессов переноса // Пром. теплотехника. – 1979. – Т.1, №2. – С. 33–41.

3. *Blinov D. G., Sherenkovskii Yu.V. Fialko N.M., Prokopov V. G. and Yurchuk V.L.* Construction of low-dimensional models for heat-transfer problems on the base of method of polyargumental systems // Int.Comm. Heat Mass Transfer. – 2004. – Vol. 31, №7. – P. 963–970.

4. *Sirovich L.* Empirical eigenfunctions and low dimensional systems // In: New Perspectives in Turbulence. –N.Y.: Springer-Verlag, 1991. – 139 p.

5. *Deane A.E., Kevrekidis I.G., Kardiadakis G.E., Orszag S.A.* Low-dimensional models for complex geometry flows: application to grooved channels and circular cylinders // Phys. Fluids A. –1991. – Vol. 3, № 10. – P. 2337–2354.

6. *Рвачев В.Л., Слесаренко А.П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – Киев: Наукова думка, 1976. – 288с.

Получено 01.12.2009 г.