УДК 532.5: 536.24

Авраменко А.А., Сорокина Т.В., Алексеенко В.В.

Институт технической теплофизики НАН Украины

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННО–ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ТУРБУЛЕНТНОГО ГОРЕНИЯ

На основі ренормалізаційної техніки проведено аналіз диференційного рівняння дифузії при турбулентному горінні. Отримані ренормалізаційні коефіцієнти дифузії та константи швидкості реакції.

На основе ренормализационной техники проведен анализ дифференциального уравнения диффузии при турбулентном горении. Получены ренормализационные коэффициент диффузии и константа скорости реакции.

The analysis of diffusion differential equation for turbulent combustion is carried out renormalization technique. Renormalization coefficients of diffusion and affinity coefficients (kinetic constants) are obtained.

a – температуропроводность;
B – величина, пропорциональная скорости диссипации;
D_0 – коэффициент диффузии;
d – размерность пространства;
E – энергии активации;
K_T – температурная константа скорости реакции;
R – универсальная газовая постоянная;
T – температура;
u_a – компоненты скорости, соответствующие координатам ;
t – время;
y и y_{ox} – концентрации горючего и окислителя соответственно;
x_a – координата;
k, β, σ – волновое число;
χ, ϖ, ω – частота;
ε – параметр, равный четырем;
λ – параметр возмущения;
ν – кинематическая вязкость.

Комплексы:

$\mathrm{Le} = \dfrac{a}{D}$ – число Льюиса;

$\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu}{a}$ – число Прандтля;

$\mathrm{Sc} = \dfrac{\nu_0}{D_0}$ – число Шмидта;

$\mathrm{Ze} = \dfrac{E\left(T_b - T_0\right)}{RT_b^2}$ – число Зельдовича;

$\theta = \dfrac{T - T_0}{T_b - T_0}$ – безразмерная температура.

Индексы:

$\rightarrow$ – вектор;
b – величина соответствующая термодинамически равновесным продуктам сгорания;
t – турбулентные параметры;
0 – начальное значение.

Вступление

Процесс горения является сложным химическим превращением, которое сопровождается тепло- и массообменом и, как правило, имеет турбулентный характер. Развитие вычислительной техники помогло решению множества задач о горении с использованием численного моделирования [1]. Однако такой подход не применим для решения общей физико-химической и гидродинамической задачи о горении. Во-первых, из-за сложности химической кинетики реального горения, представляющего собой огромное количество элементарных реакций, во-вторых, для моделирования турбулентного пламени следует досконально изучить само явление турбулентности. К сожалению, по причине различных математических и вычислительных сложностей строгой теории турбулентного горения пока нет. Поэтому, вместо прямого численного моделирования, довольно часто при решении задач о горении для описания турбулентного потока используется гипотеза Тейлора о «стационарной» турбулентности [2-7, 24].

В соответствии с гипотезой пульсации турбулентного потока во времени пренебрежимо малы по сравнению с пульсациями, возникающими из-за распространения пламени, и их можно не учитывать. В работе [8] показана адекватность применения гипотезы для пламени с реальным значением коэффициента теплового расширения $\theta = 5...10$, типичного для лабораторного и промышленного горения. Влияние коэффициента теплового расширения при $\theta = 5...10$ гораздо слабее, чем в случае искусственного приближения $\theta = 1$ [9]. Роль пульсаций во времени значительна лишь для случая, когда масштаб турбулентности близок к длине волны отсечки неустойчивости Дарье-Ландау [8]. Такого рода неустойчивость широко изучена для ламинарного горения [10, 11] и турбулентного в [12]. Автором [13] исследовано влияние турбулентности на скорость пламени с тепловым расширением. Также применяется ренормализационно-групповой анализ [14] для исследования горения, позволяющий получить строгую аналитическую модель турбулентного горения без эмпирических коэффициентов. Впервые этот подход использовался для теории горения в работе [15], впоследствии и в других [13]. Оржег [15] применил процедуру ренормализации к пламени с нулевым тепловым расширением, используя в отдельности для каждой полосы в турбулентном спектре формулу Клавена-Вильямса [2], и полагая, что вклад турбулентных вихрей различного масштаба в увеличение скорости горения не зависит от масштаба вихря. Недостатком метода [15] является нестрогое описание автомодельных свойств пламени, однако метод Поше [16] лишен такого недостатка. В работе [13] проведено сравнение результатов, полученных на основании ренормализационных методов Яхота и Поше. Результаты, полученные Яхотом, являются заниженными, по отношению к результатам, полученным Поше.

В представленном исследовании предпринята попытка построить модель турбулентного горения на основании ренормализационно-группового подхода, позволяющего получить, перенормированные коэффициент диффузии (D) и константу скорости реакции (K).

Базовые уравнения

Исходное уравнение диффузии с нелинейным стоком горючего и окислителя в реакциях горения имеет следующий вид [17]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial y}{\partial t}+\lambda\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(u_\alpha y\right)=D_0\nabla^2 y-\lambda y y_{ox}\,A\exp[-\frac{E}{RT}]=D_0\nabla^2 y-\lambda K_T y y_{ox}\left(1-\mathrm{Ze}\cdot\theta\right),\\
&\frac{\partial y_{ox}}{\partial t}+\lambda\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(u_\alpha y_{ox}\right)=D_0\nabla^2 y_{ox}-\lambda y_{ox} yA\exp[-\frac{E}{RT}]=D_0\nabla^2 y_{ox}-\lambda K_T y_{ox} y\left(1-\mathrm{Ze}\cdot\theta\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

где t – время, u_a – компоненты скорости, соответствующие координатам x_a, λ – параметр возмущения, y и y_{ox} – концентрации горючего и окислителя соответственно, D_0 – коэффициент диффузии, K_T – температурная константа скорости реакции.

Под K_T подразумевается соответствующая всей совокупности реакций горения аррениусовская температурная зависимость K_T с эффективными значениями предэкспонента A и энергии активации E (R – универсальная газовая постоянная, T – температура). Воспользуемся преобразованием аррениусовской экспоненты в константе скорости K_T по Д.А. Франк-Каменецкому [23].

Разложим в ряд по T в пределах $T\in[T_g,\ 1]$ нижеприведенное выражение

$$\exp[-\frac{E}{RT}]=\exp[-\frac{E}{RT}]-\exp[-\frac{E}{RT}]\underbrace{\frac{E\left(T_b-T_0\right)}{RT_b^2}}_{\mathrm{Ze}}\underbrace{\frac{\left(T-T_b\right)}{\left(T_b-T_0\right)}}_{\theta}=\exp[-\frac{E}{RT_b}]\left(1-\mathrm{Ze}\cdot\theta\right),$$

где $T_b > T > T_0$.

Фурье преобразование базовых уравнений

Операция перенормировки проводится в пространстве волновых чисел и частоты. Для «перевода» уравнения (1) в это пространство необходимо воспользоваться комплексным преобразованием Фурье [18]. Фурье-образы слагаемых в (1) имеют вид:

$$y=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d^d k\int d\omega \mathrm{Y}\left(\vec{k},\omega\right)\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t\right). \tag{2}$$

$$u_n=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d^d k\int d\omega U_n\left(\vec{k},\omega\right)\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t\right). \tag{3}$$

$$u_\alpha y=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\limits_{k\le k_c} d^d k\int d\omega W(\vec{k},\omega)\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t). \tag{4}$$

$$yy_{ox}=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d^d k\int d\omega W_m\left(\vec{k},\omega\right)\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t\right). \tag{5}$$

$$yy_{ox}\theta=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d^d k\int d\omega W_{mn}\left(\vec{k},\omega\right)\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t\right), \tag{5,a}$$

где k – волновое число, $\vec{k}$ – вектор волнового числа, $\vec{x}$ – вектор координаты точки, d – размерность пространства, ω – частота, W – Фурье-образ произведения двух (5) компонент концентраций горючего и окислителя или трех (5, а) компонент с учетом θ, $\theta=\frac{T-T_0}{T_b-T_0}$ – безразмерная температура, T_b – теоретическая температура горения, соответствующая термодинамически равновесным продуктам сгорания. В (2)-(5) k_c представляет собой величину ультрафиолетового обрезания в пространстве волновых чисел. Допущение, что моды скорости исчезают при $k_c > k$ [14] равносильно предположению, что влияние отбрасываемых при этом мелкомасштабных мод сводится к замене коэффициента диффузии D_0 или константы скорости реакции K_0 на некоторые, зависящие от параметра обрезания, перенормированные значения $D_0 = D_0(k_c)$ или $K_T K_T(k_c)$.

Преобразования для первого и второго уравнений системы (1) аналогичны, поэтому рассмотрим подробно только первое из них.

Подставим образы (2)-(5, а) в исходное уравнение (1), предварительно продифференцировав их.

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-i\omega\cdot\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d^d k\int d\omega Y\left(\vec{k},\omega\right)\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t\right). \tag{6}$$

$$\frac{\partial\left(u_\alpha y_m\right)}{\partial x_\alpha}=ik_\alpha\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d^d k\int d\omega W\left(\vec{k},\omega\right)\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t\right). \tag{7}$$

Согласно теореме о свертке [64],

$$W=\int_{k\le k_c}\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\int\frac{d\varpi}{2\pi}Y\left(\vec{\sigma},\vec{\omega}\right)U_\alpha\left(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\varpi\right), \tag{7, a}$$

$$W_m = \int_{k\le k_c} \frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\int\frac{d\varpi}{2\pi}Y(\vec{\sigma},\vec{\omega})Y_{ox}\left(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\varpi\right), \tag{7, б}$$

$$W_{mn} = \iint\limits_{k\le k_c} \frac{d^d\sigma d^d\beta}{(2\pi)^{2d+2}}\iint d\varpi\, d\chi Y(\vec{\sigma},\varpi)Y_{ox}(\beta,\chi)\theta(k-\vec{\sigma}-\beta,\omega-\varpi-\chi). \tag{7, в}$$

Подставив (7, а) в (7), получим

$$\frac{\partial(u_\alpha y)}{\partial x_\alpha} = ik_\alpha\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d^dk\int d\omega\int_{k\le k_c}\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\int\frac{d\varpi}{2\pi}Y\left(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\varpi\right)U_\alpha(\vec{\sigma},\omega)\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t\right). \tag{8}$$

Производная от следующего слагаемого в первом уравнении системы (1) равна

$$\nabla^2 y = -k^2\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d^dk\int d\omega Y\left(\vec{k},\omega\right)\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t\right). \tag{9}$$

Подставив (7, б) в (5) и (7, в) в (5, а) имеем

$$yy_{ox} = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d^dk\int d\omega\int_{k\le k_c}\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\int\frac{d\varpi}{2\pi}Y(\sigma,\varpi)Y_{ox}\left(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\varpi\right)\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t\right), \tag{9, а}$$

$$yy_{ox}\theta = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d^dk\int d\omega\iint\limits_{k\le k_c}\frac{d^d\sigma d^d\beta}{(2\pi)^{2d+2}}\iint d\varpi\, d\chi \mathrm{Y}(\vec{\sigma},\varpi)\mathrm{Y}_{\mathrm{ox}}(\beta,\chi)\theta(k-\vec{\sigma}-\beta,\omega-\varpi-\chi)\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{\mathrm{x}}-i\omega t\right). \tag{9,б}$$

Подставив образы (2) и их производные (6), (8)–(9, б) в исходное уравнение (1) в результате получим

$$-i\omega\cdot Y\left(\vec{k},\omega\right)+\lambda ik_\alpha\int_{k\le k_c}\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\int\frac{d\varpi}{2\pi}Y\left(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\varpi\right)U_\alpha(\sigma,\varpi)+$$

$$+D_0k^2Y\left(\vec{k},\omega\right)-K_T\lambda\int_{k\le k_c}\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\int\frac{d\varpi}{2\pi}Y(\sigma,\varpi)Y_{ox}\left(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\varpi\right)+$$

$$+K_T\lambda\cdot\mathrm{Ze}\iint\limits_{\kappa\le\kappa_c}\frac{d^d\sigma d^d\beta}{(2\pi)^{2d+2}}\iint d\varpi d\chi\left(Y(\sigma,\varpi)Y_{ox}(\beta,\chi)\theta(k-\sigma-\beta,\omega-\varpi-\chi)\right)=0.$$

Введем обозначения $\tilde{\sigma}\to(\sigma,\varpi)$, $\tilde{k}\to\left(\vec{k},\omega\right)$, $\tilde{\beta}\to(\beta,\chi)$, а $d\tilde{\sigma}=d^d\sigma\, d\varpi$.
После преобразования получим

$$\begin{aligned} G_{D_0}^{-1}Y\left(\tilde{k}\right) = &-\frac{\lambda ik_\alpha}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d\tilde{\sigma}Y\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_\alpha(\tilde{\sigma})+\frac{K_T\lambda}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d\tilde{\sigma}Y(\tilde{\sigma})Y_{ox}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)- \\ &-\frac{K_T\lambda\,\mathrm{Ze}}{(2\pi)^{2d+2}}\int_{k\le k_c} d\tilde{\sigma}Y_{ox}\left(\tilde{\beta}\right)Y(\tilde{\sigma})\theta\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

где $G_{D_0}^{-1}=-i\omega+D_0k^2$ – пропогатор нулевого порядка.

Ренормализационная процедура и ренормализация уравнений диффузии

Перейдем к непосредственной процедуре ренормализационного анализа, основы которой разработаны в работе [19]. Согласно идеологии этой работы данная процедура включает два этапа:

1. Разбиение поля скоростей и концентраций на медленную и быструю части

$$U\left(\vec{k},\omega\right)=\begin{cases}U^{<}\left(\vec{k},\omega\right), & 0<k<k_c\exp\left(-\tau\right),\\ U^{>}\left(\vec{k},\omega\right), & k_c\exp\left(-\tau\right)<k<k_c,\end{cases} \quad (11)$$

$$Y\left(\vec{k},\omega\right)=\begin{cases}Y^{<}\left(\vec{k},\omega\right), & 0<k<k_c\exp\left(-\tau\right),\\ Y^{>}\left(\vec{k},\omega\right), & k_c\exp\left(-\tau\right)<k<k_c,\end{cases} \quad (12)$$

$$\theta\left(\vec{k},\omega\right)=\begin{cases}\theta^{<}\left(\vec{k},\omega\right), & 0<k<k_c\exp\left(-\tau\right),\\ \theta^{>}\left(\vec{k},\omega\right), & k_c\exp\left(-\tau\right)<k<k_c,\end{cases} \quad (13)$$

(где τ – положительный параметр) с последующим исключением высокочастотных мод $Y^{<}$ путем решения уравнения для них и подстановкой полученного решения в уравнение для медленных мод $Y^{>}$.

2. Перенормировка U, Y, θ и k_c таким образом, чтобы вновь полученное уравнение выглядело как исходное дифференциальное уравнение диффузии. На этом этапе производится ренормализация коэффициентов диффузии и константы скорости реакции.

Подставим (11)-(13) в (10). При этом разобьем уравнение (10) на быстрые и медленные моды Уравнение для медленных мод имеет вид:

$$\begin{gathered}G_{D_0}^{-1}Y^{<}\left(\tilde{k}\right)=-\frac{\lambda i k_\alpha}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\int_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\Big[Y^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_\alpha^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)+Y^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_\alpha^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)+\\ +Y^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_\alpha^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)+Y^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_\alpha^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\Big]+\frac{K_T\lambda}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\int_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\Big[Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)+Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)+\\ +Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)+Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)\Big]- \qquad (14)\\ -\frac{K_T\lambda\,\mathrm{Ze}}{\left(2\pi\right)^{2d+2}}\iint\limits_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\,d\tilde{\beta}\Big[Y_{ox}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)+Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)\theta^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+\\ +\theta^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)+Y_{ox}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+\\ +Y_{ox}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)\Big].\end{gathered}$$

Уравнение для быстрых мод:

$$\begin{gathered}G_{D_0}^{-1}Y^{>}\left(\tilde{k}\right)=-\frac{\lambda i k_\alpha}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\int_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\Big[Y^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_\alpha^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)+Y^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_\alpha^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)+\\ +Y^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_\alpha^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)+Y^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_\alpha^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\Big]+\frac{K_T\lambda}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\int_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\Big[Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)+Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)+\\ +Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)+Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)\Big]- \qquad (15)\\ -\frac{K_T\lambda\,\mathrm{Ze}}{\left(2\pi\right)^{2d+2}}\iint\limits_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\,d\tilde{\beta}\Big[Y_{ox}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)+Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)\theta^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+\\ +\theta^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)+Y_{ox}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+Y^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+\\ +Y_{ox}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)\Big].\end{gathered}$$

Теперь необходимо исключить быстрые моды из уравнения для медленных мод (15). С этой целью вводим ряды для быстрых мод по параметру λ. Вместо этого для быстрых мод вводим нижние числовые индексы, обозначающие порядок в ряде возмущения. Таким образом, имеем

$$U_{\alpha}^{>}\left(\tilde{k}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^{s}U_{\alpha s}^{>}\left(\tilde{k}\right),\quad Y^{>}\left(\tilde{k}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^{s}Y_{s}^{>}\left(\tilde{k}\right),$$
$$\theta^{>}\left(\tilde{k}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^{s}\theta_{s}^{>}\left(\tilde{k}\right). \tag{16}$$

В окончательном результате следует принять $\lambda = 1$.

Подставим (16) в (15) и сгруппируем члены при одинаковых степенях λ.

Это дает $-s = 0$: $G_{D_0}^{-1}Y_0^{>}\left(\tilde{k}\right)=0$.

Для второго уравнения соответственно:

$G_{D_0}^{-1}Y_{0ox}^{>}\left(\tilde{k}\right)=0$, следовательно:

$$Y_0^{>}\left(\tilde{k}\right)=0,\ Y_{0ox}^{>}\left(\tilde{k}\right)=0. \tag{17}$$

$\theta_0^{>}\left(\tilde{k}\right)=0$, что является известным из уравнения энергии.

$-s = 1$:

$$G_{D_0}^{-1}Y_1^{>}\left(\tilde{k}\right)=-\frac{ik_{\alpha}}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\int_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\left[Y^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_{\alpha}^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)+Y^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_{0\alpha}^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\right]+$$
$$+\frac{K_T}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\int_{\kappa\le\kappa_c}d\tilde{\sigma}Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)-\frac{K_T\mathrm{Ze}}{\left(2\pi\right)^{2d+2}}\iint_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\,d\tilde{\beta}Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right). \tag{18}$$

Следующий шаг – это исключение быстрых мод из уравнения (14) для медленных мод, путем подстановки ряда (16) в (14). Используя правила осреднения, подробно описанные в [18], исключим эффекты быстрых мод.

Учитывая выражение (17) получим:

$$G_{D_0}^{-1}Y^{<}\left(\tilde{k}\right)=-\frac{\lambda ik_{\alpha}}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\int_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\left[Y^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_{\alpha}^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)+\lambda_0\underbrace{U_{\alpha0}^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_1^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)}_{I}+\lambda_0^2\underbrace{U_{\alpha1}^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_1^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)}_{II}\right]+$$
$$+\frac{K_T\lambda}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\int_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\left[Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)+\lambda_0^2\underbrace{Y_1^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox1}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)}_{III}\right]-\frac{K_T\lambda Ze}{\left(2\pi\right)^{2d+2}}\iint_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\,d\tilde{\beta}\left[\lambda_0^2\underbrace{Y_1^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta_1^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)}_{IV}+\right.$$
$$\left.+\lambda_0^2\underbrace{Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox1}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)\theta_1^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)}_{V}+\lambda_0^2\underbrace{Y_{ox1}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)Y_1^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)}_{VI}+Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)\right]. \tag{19–20}$$

Получение ренормализационных константы скорости реакции и коэффициента диффузии

Рассмотрим подынтегральное выражение слагаемых *I – VI* уравнения (19-20).

Подставим в слагаемое *I* вместо $Y_1^{\rangle}$, полученное выражение и, учитывая правила осреднения, имеем:

$$Y_1^{>}\left(-\tilde{\sigma}\right)U_{0\alpha}^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)=$$
$$=-G_{D_0}^{-1}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)\frac{ik_{\beta}}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\int_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\,Y^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{q}\right)U_{0\beta}^{>}\left(\tilde{q}\right)U_{0\alpha}^{>}\left(\tilde{\sigma}\right). \tag{21}$$

При ренормализации уравнений Навье-Стокса получено [14]:

$$U_0^{>}\left(\tilde{k}\right)=G_0\left(\tilde{k}\right)F^{>}\left(\tilde{k}\right), \tag{22}$$

где $F^{>}\left(\tilde{k}\right)$ – случайная сила, корреляция которой определяется по формуле [14]

$$\overline{F_n\left(\vec{k},\omega\right)F_m\left(\vec{k}',\omega'\right)}=$$
$$=\frac{2\left(2\pi\right)^{d+1}}{k^{d-4+\varepsilon^*}}BM_{nm}\left(\vec{k}\right)\delta\left(\vec{k}+\vec{k}'\right)\delta\left(\omega+\omega'\right). \tag{23}$$

где дельта-функция Дирака δ гарантирует статистическую однородность корреляционной функции в пространстве и времени. B – величина, пропорциональная скорости диссипации, ε – параметр, равный четырем, $M_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}-\dfrac{q_{\alpha}q_{\beta}}{q^2}$.

Преобразуем (21) с учетом (22) и (23). Полученное выражение проинтегрируем, используя свойство дельта-функции Дирака

$$Y_1^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_{0\alpha}^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)=-G_{D_0}^{-1}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)\frac{ik_\beta}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\int_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\left[Y^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{q}\right)\left|G_0\left(\tilde{\sigma}\right)\right|^2\frac{2\left(2\pi\right)^{d+1}}{\sigma^{d-4+\varepsilon^*}}BM_{\alpha\beta}\left(\vec{\sigma}\right)\delta\left(\tilde{\sigma}+\tilde{q}\right)\right]=$$
$$=-\frac{2ik_\beta}{\tilde{\sigma}^{d-4+\varepsilon^*}}G_{D_0}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)\left|G_0\left(\tilde{\sigma}\right)\right|^2BM_{\alpha\beta}\left(\vec{\sigma}\right)Y^{\langle}\left(\tilde{k}\right). \quad (24)$$

Слагаемым *II* уравнения (19-20) пренебрегаем, т.к. в нем не учтены процессы горения.
Преобразуем подынтегральное выражение *III* уравнения (19-20). Для этого используем выражения (22), (23) и (24).

$$Y_1^{\rangle}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{1ox}^{\rangle}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)=\frac{U_{0\beta}^{\rangle}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)Y_1^{\rangle}\left(\tilde{\sigma}\right)U_{0\alpha}^{\rangle}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{1ox}^{\rangle}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)}{U_{0\beta}^{\rangle}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_{0\alpha}^{\rangle}\left(\tilde{\sigma}\right)}=$$
$$=-\frac{2k_\alpha k_\beta G_{D_0}\left(\tilde{\sigma}\right)G_0\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)G_{D_0}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)G_0\left(\tilde{\sigma}\right)BM_{\alpha\beta}\left(\vec{\sigma}\right)Y^{\langle}\left(\tilde{k}\right)Y_{ox}^{\langle}\left(\tilde{k}\right)}{\tilde{\sigma}^{d-4+\varepsilon^*}\left(2\pi\right)^{d+1}\delta\left(\tilde{k}\right)}, \quad (24, а)$$

IV преобразуем аналогичным образом. Выражение для $\theta_1^{>}\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)$ используем из уравнений для температур [22].

$$Y_1^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta_1^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)=\frac{Y_1^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)U_{0\beta}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)\theta_1^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)U_{0\alpha}^{>}\left(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)}{U_{0\beta}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_{0\alpha}^{>}\left(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta}\right)}=$$
$$=-\frac{k_n k_\beta G_{D_0}\left(\tilde{\sigma}\right)G_0\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)G_{T_0}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)G_0\left(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta}\right)BM_{\alpha\beta}\left(\vec{\sigma}+\vec{\beta}\right)Y^{<}\left(\tilde{k}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\beta}\right)}{\left(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta}\right)^{d-4+\varepsilon^*}\left(2\pi\right)^{d+1}\delta\left(\tilde{k}+\tilde{\beta}\right)}. \quad (25)$$

V и *VI* подынтегральные выражения преобразовываются аналогично слагаемым *IV* и *III* соответственно.

$$Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta_1^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)Y_{ox1}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)=\frac{Y^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)\theta_1^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)U_{0\alpha}^{>}\left(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta}\right)Y_{ox1}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)U_{0\beta}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\beta}\right)}{U_{0\beta}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\beta}\right)U_{0\alpha}^{>}\left(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta}\right)}=$$
$$=-\frac{k_n k_\gamma G_{D_0}\left(\tilde{\beta}\right)G_0\left(\tilde{k}-\tilde{\beta}\right)G_{T_0}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)G_0\left(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta}\right)BM_{\alpha\beta}\left(\vec{\sigma}+\vec{\beta}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{k}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)}{\left(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta}\right)^{d-4+\varepsilon^*}\left(2\pi\right)^{d+1}\delta\left(\tilde{k}+\tilde{\beta}\right)}. \quad (25, а)$$

$$Y_1^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)Y_{ox1}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)=\frac{Y_{ox1}^{>}\left(\tilde{\beta}\right)U_{0\beta}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\beta}\right)Y_1^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)U_{0\alpha}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)}{U_{0\beta}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\beta}\right)U_{0\alpha}^{>}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)}=$$
$$=-\frac{2k_\gamma k_\beta G_{D_0}\left(\tilde{\sigma}\right)G_0\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)G_{D_0}\left(\tilde{\beta}\right)\left|G_0\left(\tilde{k}-\tilde{\beta}\right)\right|BM_{\alpha\beta}\left(\tilde{k}-\vec{\beta}\right)Y^{<}\left(\tilde{k}\right)Y_{ox}^{<}\left(\tilde{k}\right)\theta^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)}{\left(\tilde{k}-\tilde{\beta}\right)^{d-4+\varepsilon^*}\left(2\pi\right)^{d+1}\delta\left(2\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)}. \quad (25, б)$$

Подставим (24), (24, а), (25), (25, а), (25, б) в (19-20) вместо подынтегральных выражений *I* – *VI* соответственно, получим

$$G_{D_0}^{-1}Y^{<}\left(\tilde{k}\right)=-\frac{\lambda ik_\alpha}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\int_{k\le k_c}d\tilde{\sigma}\left[Y^{<}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)U_\alpha^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)-\lambda_0\underbrace{\frac{2ik_\beta}{\tilde{\sigma}^{d-4+\varepsilon^*}}G_{D_0}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)\left|G_0\left(\tilde{\sigma}\right)\right|^2BM_{\alpha\beta}\left(\vec{\sigma}\right)Y^{\langle}\left(\tilde{k}\right)}_{I}\right]+$$

$$+\frac{K_T\lambda}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d\tilde{\sigma}\left[Y^{<}(\tilde{\sigma})Y_{ox}^{<}(\tilde{k}-\tilde{\sigma})-\lambda_0^2\underbrace{\frac{2k_\alpha k_\beta G_{D_0}(\tilde{\sigma})G_0(\tilde{k}-\tilde{\sigma})G_{D_0}(\tilde{k}-\tilde{\sigma})G_0(\tilde{\sigma})BM_{\alpha\beta}(\vec{\sigma})Y^{<}(\tilde{k})Y_{ox}^{<}(\tilde{k})}{\tilde{\sigma}^{d-4+\varepsilon^*}(2\pi)^{d+1}\delta(\tilde{k})}}_{III}\right]-$$

$$-\frac{K_T\lambda\mathrm{Ze}}{(2\pi)^{2d+2}}\iint_{k\le k_c} d\tilde{\sigma}\,d\tilde{\beta}\left[-\lambda_0^2\underbrace{\frac{k_n k_\beta G_{D_0}(\tilde{\sigma})G_0(\tilde{k}-\tilde{\sigma})G_{T_0}(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta})G_0(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta})BM_{\alpha\beta}(\vec{\sigma}+\vec{\beta})Y^{<}(\tilde{k})\theta^{<}(\tilde{k})Y_{ox}^{<}(\tilde{\beta})}{(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta})^{d-4+\varepsilon^*}(2\pi)^{d+1}\delta(\tilde{k}+\tilde{\beta})}}_{IV}-\right.$$

$$-\lambda_0^2\underbrace{\frac{k_n k_\gamma G_{D_0}(\tilde{\beta})G_0(\tilde{k}-\tilde{\beta})G_{T_0}(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta})G_0(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta})BM_{\alpha\beta}(\vec{\sigma}+\vec{\beta})Y_{ox}^{<}(\tilde{k})\theta^{<}(\tilde{k})Y_{ox}^{<}(\tilde{\sigma})}{(\tilde{\sigma}+\tilde{\beta})^{d-4+\varepsilon^*}(2\pi)^{d+1}\delta(\tilde{k}+\tilde{\beta})}}_{V}- \qquad (26)$$

$$\left.-\lambda_0^2\underbrace{\frac{2k_\gamma k_\beta G_{D_0}(\tilde{\sigma})G_0(\tilde{k}-\tilde{\sigma})G_{D_0}(\tilde{\beta})\left|G_0(\tilde{k}-\tilde{\beta})\right|BM_{\alpha\beta}(\tilde{k}-\vec{\beta})Y^{<}(\tilde{\kappa})Y_{ox}^{<}(\tilde{k})\theta^{<}(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta})}{(\tilde{k}-\tilde{\beta})^{d-4+\varepsilon^*}(2\pi)^{d+1}\delta(2\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta})}}_{VI}+Y_{ox}^{<}(\tilde{\beta})Y^{<}(\tilde{\sigma})\theta^{<}(\tilde{k}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta})\right].$$

$$G_D=\left[-i\omega+k^2\left(D_0+\Delta D\right)\right]^{-1},$$

где

$$\Delta D=\frac{2\lambda^2 k_\alpha k_\beta}{(2\pi)^{d+1}k^2}\int_{k\le k_c} d\tilde{\sigma}\left[-\frac{1}{\sigma^{d-4+\varepsilon^*}}G_{D_0}(\tilde{k}-\tilde{\sigma})\left|G_0(\tilde{\sigma})\right|^2 BM_{\alpha\beta}(\vec{\sigma})\right]$$

– поправка, ренормализующий коэффициент диффузии. Вычисление интеграла этой поправки в пределе $k\to 0$, $\omega\to 0$, дает следующее выражение:

$$\Delta D=\frac{d-1}{d}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{\lambda^2 B}{\nu_0^2}\frac{\nu_0}{\nu_0+D_0}\frac{\exp(\varepsilon^*\tau)-1}{\kappa_c^{\varepsilon^*}\varepsilon^*}.$$

Где $S_d=\dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$.

Следовательно, эффективный ренормализованный коэффициент диффузии будет иметь вид

$$D=D_0+\frac{d-1}{d}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{\lambda^2 B}{\nu_0^2}\frac{\nu_0}{\nu_0+D_0}\frac{\exp(\varepsilon^*\tau)-1}{\kappa_c^{\varepsilon^*}\varepsilon^*}.$$

Продифференцируем это выражение по τ в пределе $\tau\to 0$ [14].

$$\frac{dD}{d\tau}=\frac{d-1}{d}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{\lambda^2 B}{\kappa_c^{\varepsilon^*}}\frac{1}{\nu(\nu+D)}.$$

Вводя турбулентное число Шмидта получим

$$\frac{d\mathrm{Sc}_t^{-1}}{d\tau}=\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{d\tau}\left(\frac{d-1}{d}\tilde{A}_d^{-1}\frac{1}{1+\mathrm{Sc}_t^{-1}}-\mathrm{Sc}_t^{-1}\right).$$

Решив это дифференциальное уравнение для трехмерного пространства [14] имеем

$$\left|\frac{\mathrm{Sc}_t^{-1}-1{,}3929}{\mathrm{Sc}^{-1}-1{,}3929}\right|^{0{,}6321}\left|\frac{\mathrm{Sc}_t^{-1}+2{,}3929}{\mathrm{Sc}^{-1}+2{,}3929}\right|^{0{,}3679}=\frac{\nu_0}{\nu}.$$

Для получения ренормализационного коэффициента константы скорости реакции ΔK необходимо проинтегрировать предпоследнее и последнее слагаемые в (26), первоначально интегрируя по частоте, а затем по волновым числам. Интегрирование слагаемых *IV, V, VI* сначала по частоте, затем по волновым числам с последующим упрощением получившихся выражений дает ноль. Распишем все входящие в предпоследнее слагаемое выражения (26) пропогаторы для получения ренормализационной константы скорости реакции:

$$-\frac{K_T\lambda^3}{(2\pi)^{d+1}}\int\limits_{k\le k_c} d\tilde{\sigma}\left[Y^{<}(\tilde{\sigma})Y^{<}_{ox}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)-\lambda_0^2\underbrace{\frac{2k_\alpha k_\beta G_{D_0}(\tilde{\sigma})G_0\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)G_{D_0}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)G_0(\tilde{\sigma})BM_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma})Y^{<}\left(\tilde{k}\right)Y^{<}_{ox}\left(\tilde{k}\right)}{\tilde{\sigma}^{d-4+\varepsilon^*}(2\pi)^{d+1}\delta\left(\tilde{k}\right)}}_{III}\right]=$$

$$=-\frac{K_T\lambda^3}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d\tilde{\sigma}\left[-\frac{1}{\left(-i\varpi+D_0\sigma^2\right)}\cdot\frac{1}{\left(-i(\omega-\varpi)+D_0(k-\sigma)^2\right)}\cdot\frac{1}{\left(-i\varpi+\nu\sigma^2\right)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{\left(-i(\omega-\varpi)+\nu(k-\sigma)^2\right)}\cdot\frac{2k_\alpha k_\beta BM_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma})Y^{<}\left(\tilde{k}\right)Y^{<}_{ox}\left(\tilde{k}\right)}{\sigma^{d-4+\varepsilon^*}(2\pi)^{d+1}\delta\left(\tilde{k}\right)}\right]. \quad (28)$$

Подинтегральная функция имеет полюса:

$$\varpi_1=-iD_0\sigma^2, \quad (29)$$

$$\varpi_2=\omega+iD_0(k-\sigma)^2, \quad (30)$$

$$\varpi_3=-i\nu\sigma^2, \quad (31)$$

$$\varpi_4=\omega+i\nu(k-\sigma)^2, \quad (32)$$

из них в верхней полуплоскости находятся (30) и (32). Интеграл по частоте равен произведению коэффициента $2\pi i$ и суммы вычетов подынтегральной функции в особых точках верхней полуплоскости. Интеграл по волновым числам получен на основе формул, приведенных в статье [20]. В результате, проинтегрировав (28), имеем

$$-\frac{K_T\lambda^3}{(2\pi)^{d+1}}\int_{k\le k_c} d^d\tilde{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\left[-\frac{2k_\alpha k_\beta G_{D_0}(\tilde{\sigma})G_0\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)G_{D_0}\left(\tilde{k}-\tilde{\sigma}\right)G_0(\tilde{\sigma})BM_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma})Y^{<}\left(\tilde{k}\right)Y^{<}_{ox}\left(\tilde{k}\right)}{\tilde{\sigma}^{d-4+\varepsilon^*}(2\pi)^{d+1}\delta\left(\tilde{k}\right)}\right]=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\varpi)d\varpi=2\pi i\left(\mathrm{Re}s\left[f(\varpi),\varpi_2\right]+\mathrm{Re}s\left[f(\varpi),\varpi_4\right]\right)=$$

$$=\frac{K_T\lambda^3}{(2\pi)^{d+1}}\int\limits_{k_c\exp(-\tau)}^{k_c}\left[-\frac{2k_\alpha k_\beta BY^{\langle}\left(\tilde{k}\right)Y^{\langle}_{ox}\left(\tilde{k}\right)}{\sigma^{d-4+\varepsilon^*}(2\pi)^{d+1}\delta\left(\tilde{k}\right)}\frac{\pi(\sigma+3k)}{D_0\sigma^7\nu(D_0+\nu)}\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{\sigma_\alpha\sigma_\beta}{\sigma^2}\right)\right]d^d\tilde{\sigma}=$$

$$=\frac{K_T\lambda^3k_\alpha k_\beta BY^{<}\left(\tilde{k}\right)Y^{<}_{ox}\left(\tilde{k}\right)}{2\pi(2\pi)^{2d}\delta\left(\tilde{k}\right)D_0\nu(D_0+\nu)}\int\limits_{k_c\exp(-\tau)}^{k_c}\left[\delta_{\alpha\beta}\sigma^{-6-y}-\sigma^{-8-y}\sigma_\alpha\sigma_\beta\right]d^d\tilde{\sigma}=$$

$$=\frac{K_T\lambda^3k_\alpha k_\beta\delta_{\alpha\beta}BY^{<}\left(\tilde{k}\right)Y^{<}_{ox}\left(\tilde{k}\right)}{2\pi(2\pi)^{2d}\delta(\tilde{\kappa})D_0\nu(D_0+\nu)}\frac{(d-1)S_d}{d}\int\limits_{k_c\exp(-\tau)}^{k_c}\sigma^{-7+d-y}d\sigma=$$

$$=\frac{K_T\lambda^3k_\alpha k_\beta\delta_{\alpha\beta}BY^{<}\left(\tilde{k}\right)Y^{<}_{ox}\left(\tilde{k}\right)}{2\pi(2\pi)^{2d}\delta(\tilde{\kappa})D_0\nu(D_0+\nu)}\frac{(d-1)S_d}{d}\frac{k_c^{-\varepsilon^*-2}\left(e^{\tau\left(\varepsilon^*+2\right)}-1\right)}{\varepsilon^*+2}.$$

Ренормализационная константа скорости реакции будет определяться формулой

$$\Delta K=\frac{K_T\lambda^3k_\alpha k_\beta\delta_{\alpha\beta}B\delta_{\alpha\beta}}{2\pi(2\pi)^{2d}\delta\left(\tilde{k}\right)D_0\nu(D_0+\nu)}\frac{(d-1)S_d}{d}\frac{k_c^{-\varepsilon^*-2}\left(e^{\tau\left(\varepsilon^*+2\right)}-1\right)}{\varepsilon^*+2}. \quad (33)$$

Для получения дифференциального уравнения константы скорости реакции продифференцируем (33) по τ в пределе $\tau \to 0$ [14], т.е. устремляя разницу между локальными волновыми числами обрезания к нулю в соответствии с $k_c^{'} = k_c^{'} \exp(-\tau) < k < k_c$. В результате:

$$\frac{1}{K_{T_b}} \frac{dK}{d\tau} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{D} \frac{dD}{d\tau}. \qquad (34)$$

В левой части этого уравнения скорость реакции записана без T_b, так как на каждом шаге итерационного исключения быстрых мод ренормализуется, то значение температурной константы скорости реакции, которое получено на предыдущем шаге. При условии $\tau \to 0$ значение константы скорости реакции в обеих частях (34) одно и то же.

Решим дифференциальное уравнение (34), положив $\lambda = 1$. Это дает

$$\frac{K}{K_{T_b}} = \left(\frac{D}{D_0}\right)^{\frac{1}{2\pi}}. \qquad (35)$$

Ренормированная скорость реакции $K+K_0$ будет иметь вид

$$K + K_{T_b} = K_{T_b}\left(1 + \left(\frac{D}{D_0}\right)^{\frac{1}{2\pi}}\right).$$

Существует другой путь получения дифференциального уравнения константы скорости реакции, который рассмотрен ниже.

$$\frac{1}{K_{T_b}} \frac{dK}{d\tau} = \underbrace{\frac{\mathrm{Sc}_t}{\left(\mathrm{Sc}^{-1}+1\right)}}_{\Lambda} \underbrace{\frac{\lambda(d+2)}{\pi(2\pi)^d d}}_{\Xi}.$$

Используя замену $d\tau = -k_c^{'-1} dk_c^{'}$ получим

$$\frac{dK}{K_{T_b}} = -\Lambda \cdot \Xi \frac{dk_c^{'}}{k_c^{'}}.$$

Начальные условия: $K = K_0$ при $k_c \to k_d$, следовательно

$$K = K_0 \left(\frac{k_d}{k_c}\right)^{\Lambda\cdot\Xi}. \qquad (36)$$

Выразим соотношение k_d / k_c из выражения для эффективной вязкости [22] и подставим в (36).

$$\frac{\nu_{эф}}{\nu_0} = \left(1 + \left(\frac{\nu_t}{\nu_0}\right)^3 \cdot \left(1 - \left(\frac{k_d}{k_c}\right)^{-\varepsilon^*}\right)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Получим

$$K = K_0 \left(\frac{\left(\frac{\nu_t}{\nu_0}\right)^3}{1 - \left(\frac{\nu_{эф}}{\nu_0}\right)^3 + \left(\frac{\nu_t}{\nu_0}\right)^3}\right)^{\frac{\Lambda\cdot\Xi}{\varepsilon^*}}.$$

Учитывая, что $\left(\frac{\nu_{эф}}{\nu_0}\right) \approx \left(\frac{\nu_t}{\nu_0}\right)$, окончательно получим

$$K = K_0 \left(\frac{\nu_t}{\nu_0}\right)^{\frac{3\Lambda\cdot\Xi}{\varepsilon^*}}.$$

Были рассмотрены и другие варианты преобразований уравнений (1), а именно последнего члена с последующей перенормировкой и получением ренормализационных коэффициентов. Все полученные коэффициенты сведены в табл. 1.

Выводы

В результате проведенного исследования при использовании ренормализационного анализа получены перенормированные константа скорости реакции и коэффициент диффузии. Теоретический анализ показал, что рост константы скорости реакции напрямую зависит от уровня турбулентности, что выражается зависимостью этой константы от турбулентной вязкости или коэффициента диффузии. При этом показатель степени в зависимости для константы скорости реакции является функцией либо теплофизических свойств (числа Прандтля, Льюиса, Шмидта) либо энергии активации и температуры (число Зельдовича).

Табл. 1. Ренормализационная константа скорости реакции

Исходное выражение последнего слагаемого уравнения (1)	Перенормированные члены	Коэффициенты переноса
$K_T \lambda y y_{ox}$	y, y_{ox}	$\frac{K}{K_{T_b}} = \left(\frac{D}{D_0}\right)^{\frac{1}{2\pi}}$; $K + K_{T_b} = K_{T_b}\left(1 + \left(\frac{D}{D_0}\right)^{\frac{1}{2\pi}}\right)$
$K_T \lambda \frac{E}{RT_b} y y_{ox} \theta$	y, θ	А) $\frac{K}{K_{T_b}} = \left(\frac{\nu_t}{\nu_0}\right)^{\frac{3\Omega\Xi}{\varepsilon^*}}$, где $\Omega = \frac{2 + \Pr^{-1} + \mathrm{Sc}^{-1}}{\left(\Pr^{-1} + \mathrm{Sc}^{-1}\right)\left(\Pr^{-1} + 1\right)\left(\mathrm{Sc}^{-1} + 1\right)}$, $\Xi = \frac{2 \cdot \varepsilon^* \cdot (d+2)}{3 \cdot (2\pi)^{d+1}} \lambda^3 \frac{E}{RT_b}$ Б) $K + K_{T_b} = K_{T_b}\left(1 + \left(\frac{D}{D_0}\right)^M\right)$, где $M = \frac{1 + 2\Pr + \mathrm{Le}^{-1}}{(1 + \mathrm{Le})(1 + \Pr)}$
$K_T \lambda y y_{ox}(1 - \mathrm{Ze} \cdot \theta)$	y, θ	А) $\frac{K}{K_{T_b}} = \left(\frac{\nu_t}{\nu_0}\right)^{\frac{3\Omega\Xi \mathrm{Ze}}{\varepsilon^*}}$, где $\Omega = \frac{2 + \Pr^{-1} + \mathrm{Sc}^{-1}}{\left(\Pr^{-1} + \mathrm{Sc}^{-1}\right)\left(\Pr^{-1} + 1\right)\left(\mathrm{Sc}^{-1} + 1\right)}$, $\Xi = \frac{2 \cdot \varepsilon^* \cdot (d+2)}{3 \cdot (2\pi)^{d+1}} \lambda^3$ Б) $K + K_{T_b} = K_{T_b}\left(1 + \left(\frac{D}{D_0}\right)^M\right)$, где $M = \frac{1 + 2\Pr + \mathrm{Le}^{-1}}{(1 + \mathrm{Le})(1 + \Pr)}$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Туник Ю.В*. Распространение турбулентного горения метановоздушных смесей в трубах // Физика горения и взрыва. –Т. 36, № 3, – 2000.

2. *P. Clavin, F.A. Williams*. Theory of premixed-flame propagation inlarge-scale turbulence, J. Fluid Mech. – 1979, N. 3, V. 90. – P. 589-604.

3. *V. Yakhot*. Propagation velocity of premixed turbulent flames, Combust. Sci. Technol. – 1988, V. 60. – P. 191-214.

4. *R.C. Aldredge*. Premixed flame propagation in a high-intensity, large-scale vertical flow, Combust.Flame. – 1996, V. 106, N. 1-2, – P. 29-40.

5. *B.T. Helenbrook and C.K. Law,* The role of Landau-Darrieus instability in large-scale flows, Combust. Flame, – 1999, V. 117, N. 1-2, – P. 155-169.

6. *B.Denet*. Frankel equation for turbulent flames in the presence of a hydrodynamic instability, Phys. Rev. E, – 1997, V. 55, N. 6. – P. 6911-6916.

7. *L. Kagan and G. Sivashinsky*. Flame propagation and extinction in large-scale vertical flows, Combust. Flame, – 2000, V. 120, N. 1-2, – P. 222-232.

8. *В.Б. Аккерман, В.В. Бычков*. Пламя с реальным тепловым расширением в нестационарном турбулентном потоке // Физика горения и взрыва, – 2005, Т. 41, № 4.

9. *V.V. Bychkov and B. Denet*. Effect of temporal pulsations of a turbulent flow on the flame velocity, Combust. Theory Modelling, – 2002, V. 6, N. 2, – P. 209-222.

10. *P. Pelce and P. Clavin*. Influence of hydrodynamics and diffusion upon the stability limits of laminar premixed flames, J. Fluid Mech.,124, P. 219-237 (1982).

11. *V.V. Bychkov and M.A. Liberman*. Dynamics and stability of premixed flames, Phys. Rep., 325, Nos. 4-5, P. 115-237 (2000).

12. *V. Bychkov*. Importance of the Darrieus-Landau instability for strongly corrugated turbulent flames, Physical Review E 68, 066304, 2003.

13. *Б.В. Аккерман*. Математическая теория турбулентного и ламинарного горения в предварительно перемешанной газовой смеси. – Диссертация, 2005.

14. *Yakhot V, Orszag S.A*. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory // J. Sci. Comp. – 1986. – 1, № 1. – P. 3-51.

15. *V. Yakhot,* Combust. Sci. Technol. 60 191 (1988).

16. *A. Pocheau*, Phys. Rev. E 49 1109 (1994).

17. *Ши Д*. Численные методы в задачах теплообмена. – М.: Мир, 1988. – 544 с.

18. *McComb W.D*. The physics of fluid turbulence. – Oxford: Clarendon Press, 1990.

19. F*orster D., Nelson D.R., Stephen M.J.* Large-distance and longtime properties of a randomly stirred fluid // Phys. Rev. A. – 1977. – 16, № 2. – P. 732-749.

20. *S. Sukorianskiy et al. J.* Fluid Dynamics Reseach 33 (2003). – P. 319-331.

21. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление – М.: Наука, 1974. – 542 с.

22. *Авраменко А.А., Басок Б.И., Кузнецов А.В*. Групповые методы в теплофизике. К.: Наукова думка, 2003. – 483 с.

23. *Д.А. Франк-Коменецкий*. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1947. – 367 с.

24. *B. Denet*. Possible role of temporal correlations in the bending of turbulent flame velocity // Comb. Theory Modelling, 1999, V. 3, P. 585-589.

Получено 12.04.2011 г.