

УДК 536.33

Дубов М.Ю.

Днепропетровский национальный университет

РАСЧЕТ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ И ПРОРЕЗИ, ОБРАЗОВАННОЙ СЕЧЕНИЕМ ДАННОГО ЦИЛИНДРА ПЛОСКОСТЬЮ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ОСИ ЕГО СИММЕТРИИ

Запропоновано аналітичну методику розрахунку кутів коефіцієнтів для циліндра кінцевих розмірів та прорізу, утвореного перерізом даного циліндра площиною, паралельною вісі його симетрії. Також здійснено порівняння запропонованої методики з загальноприйнятою аналітичною.

Представлена аналитическая методика расчета угловых коэффициентов для цилиндра конечных размеров и прорези, образованной сечением данного цилиндра плоскостью, параллельной оси его симметрии. Также произведено сравнение представленной методики с общепринятой аналитической.

An analytical method of calculating the angular coefficients for a cylinder of finite dimensions and the slot formed by cutting of the cylinder by a plane parallel to the axis of its symmetry is presented. Also, a comparison of the presented methods is carried out with the conventional analytical ones.

a, b, c – плоские углы или стороны сферических треугольников;
 $\angle A, \angle B, \angle C$ – двугранные углы сферических треугольников;
 F – площадь;
 h – ширина прорези или хорда дуги поверхности 2 в поперечном сечении цилиндра;
 l – линейная координата цилиндрической системы координат;
 L – длина цилиндра;
 r – расстояние между центрами элементарных площадок двух поверхностей;
 R – радиус основания цилиндра;
 s – криволинейная координата;
 W – телесный угол сферического четырехугольника, образованного после отсечения углов от сферического двуугольника;
 x, y – декартовы координаты;
 α – центральный угол в поперечном сечении цилиндра, опирающийся на границы поверхности 2 (прорези);
 β – угол между нормалью к одной элементарной площадке и направлением на

другую;
 γ – двугранный угол сферического двуугольника, вырезанного на сфере произвольного радиуса лучом, исходящим из произвольной точки на внутренней поверхности бесконечного цилиндра и описывающим границы поверхности 2 (прорези);
 Q – телесный угол сферического двуугольника;
 φ – средний геометрический угловой коэффициент;
 Φ – разрешающий угловой коэффициент;
 ψ – угловая координата цилиндрической системы координат;
 ω – телесный угол сферического треугольника;
 Ω – сумма телесных углов, под которыми «видят» точки поверхности цилиндра абсолютно черные поверхности 2, 5, 6 (прорезь).

Индексы:

1, 2, 3, 4, 5, 6 – номера поверхностей приемника;
 f – торцевая поверхность;
 m – максимум;
 x_y, z_y, x_z – проекции на плоскости x_y, z_y, x_z .

В известной литературе [1, 2] описываются различные типы приёмников сконцентрированного солнечного излучения. Их делят на два основных типа: поверхностные и объём-

ные. Гораздо более изученными и чаще всего используемыми в гелиотехнике являются приёмники первого типа, лучевоспринимающая поверхность которых может быть выпуклой,

плоской или вогнутой. Так как к основным потерям энергии в приёмниках, кроме конвективных, относятся также и потери, связанные с отражением и собственным излучением их лучевоспринимающих поверхностей, наиболее привлекательными с точки зрения минимизации таких потерь являются полостные приёмники (с вогнутой лучевоспринимающей поверхностью), обладающие значительно более высокой эффективной поглощательной способностью по сравнению с приёмниками открытого типа (с выпуклой или плоской лучевоспринимающей поверхностью).

Рассмотрим полостной приёмник солнечного излучения. Приёмник имеет форму цилиндра конечных размеров с прорезью для входа солнечного излучения, образованной сечением данного цилиндра плоскостью, параллельной оси его симметрии.

Для расчета лучистого теплообмена необходимо знать соответствующие разрешающие угловые коэффициенты, а точнее, хотя бы тот разрешающий угловой коэффициент, который показывает долю лучистого потока, излучаемого и отражаемого лучевоспринимающей поверхностью на саму же себя. В литературе для такой системы на сегодняшний день они, к сожалению, ни аналитического, ни численного решения не имеют.

Для начала рассмотрим общепринятую аналитическую методику расчета подобных задач.

Прежде чем приступать к расчету, дополним усечённый цилиндр условными абсолютно черными поверхностями с температурой $T_{\text{усл}} = 0$, восстанавливающими его до целого цилиндра с круглым основанием. Получится эквивалентная усеченному цилиндру замкнутая система, состоящая из шести поверхностей, где 1 и 2 – цилиндрическая поверхность приемника и абсолютно черная цилиндрическая поверхность соответственно; 3, 4 и 5, 6 – торцевые поверхности приемника и абсолютно черные торцевые поверхности соответственно.

Для иллюстрации метода [3, 4] достаточно рассмотреть расчет среднего геометрического углового коэффициента от поверхности 1 к по-

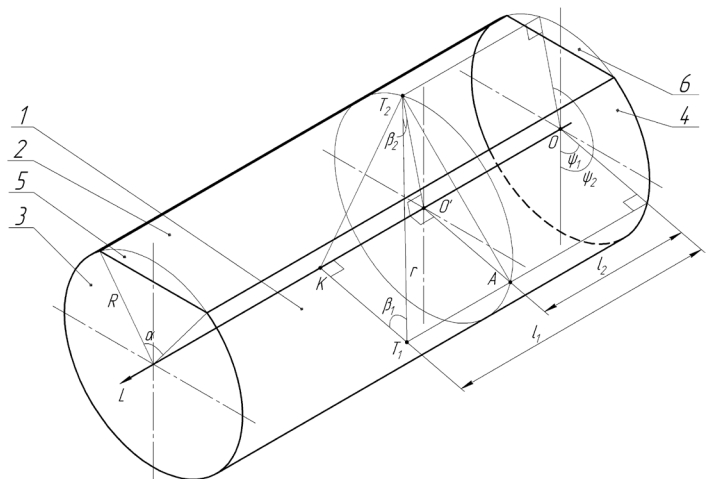


Рис. 1. К выводу формулы для определения углового коэффициента между цилиндрическими поверхностями 1 и 2 внутри цилиндра конечной длины общепринятым аналитическим методом. 1 и 2 – цилиндрическая поверхность приемника и абсолютно черная цилиндрическая поверхность соответственно, 3, 4 и 5, 6 – торцевые поверхности приемника и абсолютно черные торцевые поверхности соответственно.

верхности 2 (рис. 1). Он выразится как

$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{F_1} \int_{F_2} \int_{F_1} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2, \quad (1)$$

или вследствие симметрии системы

$$\varphi_{1-2} = \frac{2}{F_1} \int_{F_2} \int_{\frac{F_1}{2}} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2, \quad (2)$$

где r – расстояние между центрами элементарных площадок двух поверхностей, β_1 и β_2 – соответствующие углы между нормалью к одной элементарной площадке и направлением на другую, F_1 и F_2 – площади поверхностей 1 и 2.

Отыщем $\cos \beta_1$, $\cos \beta_2$, r и F_1 как функции от координат ψ_1 , ψ_2 , l_1 , l_2 .

$$T_2 A^2 = T_2 O'^2 + AO'^2 - 2 \cdot T_2 O' \cdot AO' \cdot \cos \angle T_2 O' A, \quad (3)$$

$$T_2 O' = AO' = R, \quad (4)$$

где R – радиус основания цилиндра.

$$\angle T_2 O' A = \psi_2 - \psi_1, \quad (5) \quad T_1 T_2^2 = r^2 = T_2 A^2 + A T_1^2, \quad (7)$$

$$T_2 A^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(\psi_2 - \psi_1) = \quad A T_1 = l_2 - l_1, \quad (8)$$

$$= 2R^2(1 - \cos(\psi_2 - \psi_1)), \quad (6) \quad r^2 = 2R^2(1 - \cos(\psi_2 - \psi_1)) + (l_2 - l_1)^2, \quad (9)$$

$$T_2 K^2 = T_1 K^2 + T_1 T_2^2 - 2 \cdot T_1 K \cdot T_1 T_2 \cdot \cos \angle T_2 T_1 K = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \beta_1, \quad (10)$$

$$T_2 K^2 = T_2 O'^2 + KO'^2 = R^2 + (l_2 - l_1)^2, \quad (11)$$

$$\cos \beta_1 = \frac{T_1 K^2 + T_1 T_2^2 - T_2 K^2}{2 \cdot T_1 K \cdot T_1 T_2} = \frac{R^2 + r^2 - R^2 + (l_2 - l_1)^2}{2Rr} = \frac{R}{r} (1 - \cos(\psi_2 - \psi_1)). \quad (12)$$

Очевидно, что
 $\beta_1 = \beta_2 = \beta.$

Тогда
 $\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = \cos \beta. \quad (13) \quad (14)$

и

$$\begin{aligned} \varphi_{1-2} &= \frac{2}{F_1} \int_{F_2} \int_{\frac{F_1}{2}} \frac{\cos^2 \beta}{\pi r^2} dF_1 dF_2 = \\ &= \frac{2}{LR \psi_{m1}} \int_0^L \int_{\psi_{m1}}^{\psi_{m2}} \int_0^L \int_0^{\psi_{m1}} \frac{R^2 (1 - \cos(\psi_2 - \psi_1))^2}{\pi ((l_2 - l_1)^2 + 2R^2 (1 - \cos(\psi_2 - \psi_1)))^2} d\psi_1 dl_1 d\psi_2 dl_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где L – длина цилиндра, ψ_{m1} , ψ_{m2} – граничные угловые координаты цилиндрической поверхности 1 и 2 соответственно.

Взять такой четырехкратный интеграл аналитически не представляется возможным, а точное численное решение получить весьма проблематично. Адекватность метода расчета угловых коэффициентов внутри цилиндра конечных размеров можно оценить следующим образом. Известно, что Поляком Г.Л. [5] был впервые выполнен вывод формулы для определения угловых коэффициентов внутри шаровой полости и бесконечного цилиндра. Для бесконечного цилиндра угловой коэффициент φ_{1-2} найдется так:

$$\varphi_{1-2} = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (16)$$

где α – центральный угол в поперечном сечении цилиндра, опирающийся на границы поверхности 2.

Например, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$
 $\varphi_{1-2} = \frac{\pi}{2\pi \cdot 3} = \frac{1}{6} = 0,1(6).$

Очевидно, что средний геометрический угловой коэффициент φ_{1-2} для цилиндра с достаточно большим соотношением $L/2R$ (например, $L/2R = 50000$) и углом α с большой точностью должен совпадать с аналогичным коэффициентом для цилиндра бесконечной длины с тем же углом α . Однако значение φ_{1-2} для такой системы, подсчитанное по формуле (15), совершенно далеко от значения, подсчитанного по формуле (16).

Рассмотрим альтернативную методику расчета угловых коэффициентов для цилиндра конечных размеров.

Алгоритм решения для цилиндрических поверхностей таков (рис. 2).

Находится центральный угол α в поперечном сечении цилиндра, опирающийся на границы поверхности 2, и угол γ

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{AB}{2R} = 2 \arcsin \frac{h}{2R}, \quad (17)$$

$$\gamma = \alpha/2, \quad (18)$$

где h – ширина прорези или хорда дуги поверх-

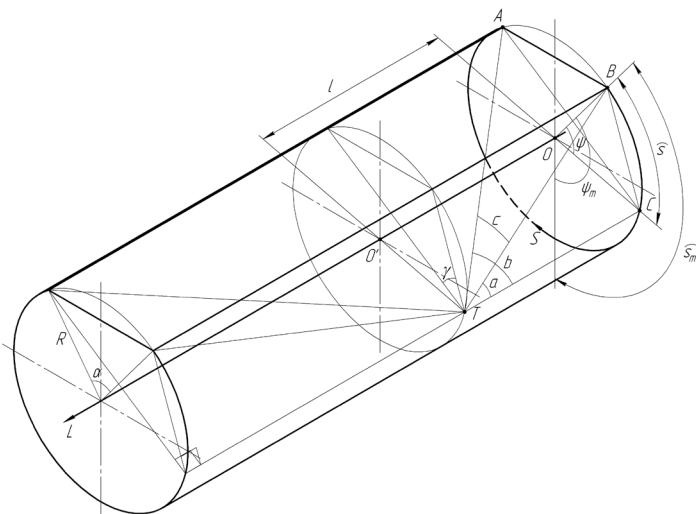


Рис. 2. К выводу формул для определения углового коэффициента между цилиндрической поверхностью 1 и прорезью (поверхности 2, 5, 6) внутри цилиндра конечной длины альтернативной аналитической методикой.

ности 2 в поперечном сечении цилиндра.

Здесь угол γ представляет собой двухгранный угол сферического двуугольника, вырезанного на сфере произвольного радиуса лучом, исходящим из произвольной точки на поверхности 1 бесконечного цилиндра и описывающим границы поверхности 2 (прорези). Разделив площадь (телесный угол) этого двуугольника на площадь (телесный угол) полусферы, мы получим соотношение (16).

В случае цилиндра конечной длины его торцами от выше упомянутого двуугольника будут отсекаются углы в виде двух сферических треугольников (рис. 3), плоские углы или стороны которых находятся как функции от координат s и l по формулам

$$a = \arctg\left(\frac{2R}{l} \sin \frac{s}{2R}\right), \quad (19)$$

$$b = \arctg\left(\frac{2R}{l} \sin \left(\frac{s}{2R} + \gamma\right)\right), \quad (20)$$

$$c = \arccos(\cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma). \quad (21)$$

Двугранные углы сферических треугольников выразятся как

$$\angle A = \arccos \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \quad (22)$$

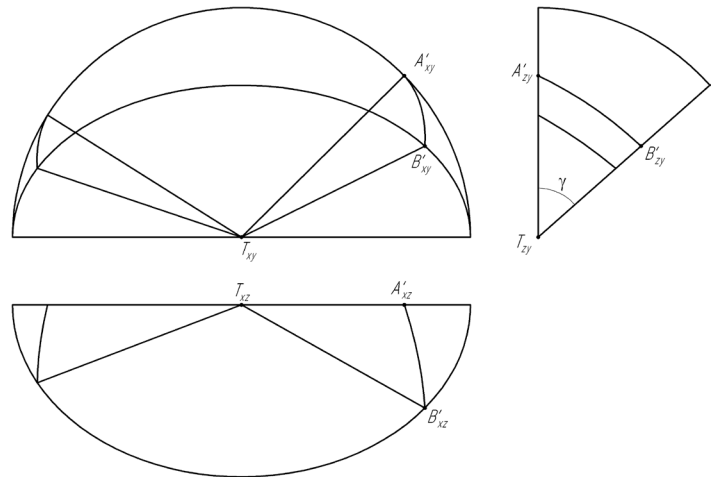


Рис. 3. Схема распространения излучения от произвольной точки T на внутренней поверхности цилиндра конечной длины на поверхность 2 (прорезь) в трех проекциях. T_{xy}, T_{zy}, T_{xz} – три проекции произвольной точки на поверхности цилиндра конечной длины, $A'_{xy}, A'_{zy}, A'_{xz}, B'_{xy}, B'_{zy}, B'_{xz}$ – три проекции точек A' и B' , образованных пересечением лучей, исходящих из точки T в направлении точек A и B соответственно, и сферы произвольного радиуса с центром в точке T .

$$\angle B = \arccos \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}, \quad (23)$$

$$\angle C = \gamma. \quad (24)$$

Далее находим телесный угол сферического треугольника, который выражается как сферический избыток этого треугольника в радианах $\omega = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$. (25)

Находим телесный угол сферического четырехугольника, образованного после отсечения углов от сферического двуугольника в виде сферических треугольников

$$q = 2\gamma, \quad (26)$$

$$W = q - 2\omega, \quad (27)$$

где q – телесный угол сферического двуугольника.

Поверхность 1 делится плоскостью симметрии на две равные части. Определим сумму телесных углов, под которыми «видят» все точ-

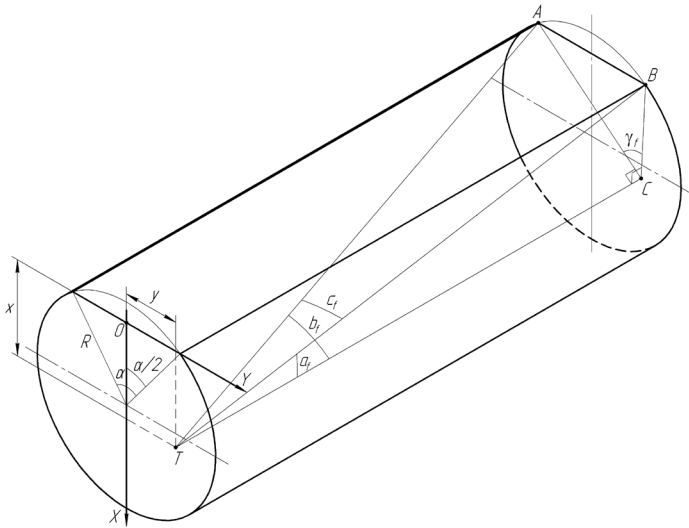


Рис. 4. К выводу формул для определения углового коэффициента между торцевыми поверхностями 3 и 4 и прорезью (поверхности 2, 5, 6) внутри цилиндра конечной длины альтернативной аналитической методикой

ки одной части поверхности 1 абсолютно черные поверхности 2, 5, 6 (прорезь)

$$\Psi_m = \pi - \gamma, \tag{28}$$

$$s_m = \Psi_m R, \tag{29}$$

$$\Omega = \int_0^L \int_0^{s_m} W ds dl, \tag{30}$$

$$c_f = \arccos(\cos b_f \cos a_f + \sin b_f \sin a_f \cos \gamma_f), \tag{36}$$

$$\angle A_f = \arccos \frac{\cos a_f - \cos b_f \cos c_f}{\sin b_f \sin c_f}, \tag{37}$$

$$\angle B_f = \arccos \frac{\cos b_f - \cos a_f \cos c_f}{\sin a_f \sin c_f}, \tag{38}$$

$$\angle C_f = \gamma_f, \tag{39}$$

$$\varrho_f = \gamma_f, \tag{40}$$

$$\omega_f = \angle A_f + \angle B_f + \angle C_f - \pi, \tag{41}$$

$$W_f = \varrho_f - \omega_f. \tag{42}$$

Торцевая поверхность разбивается на три

и, собственно, средний геометрический угловой коэффициент между поверхностью 1 и абсолютно черными поверхностями 2, 5, 6 (прорезью)

$$F = L S_m, \tag{31}$$

$$\Phi_{1-256} = \frac{\Omega}{2\pi F}, \tag{32}$$

где Ψ_m – граничные угловые координаты цилиндрической поверхности 1, S_m – граничная криволинейная координата цилиндрической поверхности 1, F – площадь части поверхности 1.

Аналогичные выкладки можно произвести и для произвольной точки на торцах цилиндра (рис. 4).

$$\gamma_f = \arccos \frac{x^2 + y^2 - \frac{h^2}{4}}{\sqrt{\left(\left(\frac{h}{2} - y\right)^2 + x^2\right)\left(\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + x^2\right)}}, \tag{33}$$

$$a_f = \arctg \frac{\sqrt{\left(\frac{h}{2} - y\right)^2 + x^2}}{L}, \tag{34}$$

$$b_f = \arctg \frac{\sqrt{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + x^2}}{L}, \tag{35}$$

области, и суммирование происходит отдельно по каждой из них

$$\Omega_{1f} = \int_0^q \int_0^{p - x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} W_f dy dx, \tag{43}$$

$$\Omega_{2f} = \int_0^q \int_{p - x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}^{\sqrt{R^2 - (x-q)^2}} W_f dy dx, \tag{44}$$

$$\Omega_{3f} = \int_0^{q+R} \int_0^{\sqrt{R^2 - (x-q)^2}} W_f dy dx, \tag{45}$$

$$F_{1f} = \int_0^q \int_0^{p - x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} dy dx = \frac{R^2}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}, \tag{46}$$

$$F_{2f} = \int_0^q \int_{p - x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}^{\sqrt{R^2 - (x-q)^2}} dy dx = \frac{R^2}{4} (\pi - \alpha), \tag{47}$$

$$F_{3f} = \int_0^{q+R} \int_0^{\sqrt{R^2-(x-q)^2}} dy dx = \frac{R^2}{4} \pi, \quad (48)$$

$$q = R \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (49)$$

$$p = R \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (50)$$

Средние геометрические угловые коэффициенты между каждой из торцевых областей и поверхностями 2, 5, 6

$$\Phi_{1f-256} = \frac{\Omega_{1f}}{2\pi F_{1f}}, \quad (51)$$

$$\Phi_{2f-256} = \frac{\Omega_{2f}}{2\pi F_{2f}}, \quad (52)$$

$$\Phi_{3f-256} = \frac{\Omega_{3f}}{2\pi F_{3f}}. \quad (53)$$

Средний геометрический угловой коэффициент между поверхностями 1, 3, 4, и абсолютно черными поверхностями 2, 5, 6 (прорезью)

$$\Phi_{134-256} = \frac{2\Omega + 4\Omega_{1f} + 4\Omega_{2f} + 4\Omega_{3f}}{2\pi F_{\Sigma}}, \quad (54)$$

или исходя из свойства распределительности для угловых коэффициентов

$$\Phi_{134-256} = \Phi_{1-256} \frac{2F}{F_{\Sigma}} + \Phi_{1f} \frac{4F_{1f}}{F_{\Sigma}} + \Phi_{2f} \frac{4F_{2f}}{F_{\Sigma}} + \Phi_{3f} \frac{4F_{3f}}{F_{\Sigma}}, \quad (55)$$

$$F_{\Sigma} = 2F + 4F_{1f} + 4F_{2f} + 4F_{3f}, \quad (56)$$

где F_{Σ} – общая площадь всех поверхностей приемника.

И, на конец, разрешающие угловые коэффициенты [4] ($r_2 = 0$)

$$\Phi_{134-134} = \frac{\Phi_{134-134}}{1-r_1\Phi_{134-134}}, \quad (57)$$

$$\Phi_{134-256} = \frac{\Phi_{134-256}}{1-r_1(1-\Phi_{134-256})}, \quad (58)$$

$$\Phi_{134-134} = 1 - \Phi_{134-256}, \quad (59)$$

где r_1 и r_2 – отражательные способности поверхностей приемника 1, 3, 4 и абсолютно чёрных поверхностей 2, 5, 6 соответственно.

Расчеты по представленной методике показали, что влияние излучения торцевых поверхностей приемника на лучистый теплообмен при соотношении $\frac{L}{2R} = 7,5$ пренебрежительно мало (при $\alpha = \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{\Phi_{1-256}}{\Phi_{134-256}}\right) \cdot 100 = 0,1\%$, а при $\frac{L}{2R} = 650$ угловой коэффициент, вычисленный по формулам (32), (54) или (55), стремится к его значению для цилиндра бесконечной длины (16) (при $\alpha = \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{\Phi_{134-256}}{\Phi_{1-2}}\right) \cdot 100 \approx \left(1 - \frac{\Phi_{1-256}}{\Phi_{1-2}}\right) \cdot 100 \approx 0,1\%$).

Выводы

Предложенная методика расчета угловых и разрешающих угловых коэффициентов между цилиндром конечных размеров и прорези, образованной сечением данного цилиндра плоскостью, параллельной оси его симметрии, позволяет уйти от сложного четырехкратного интегрирования, а реализованная на ЭВМ, позволяет быстро находить точные искомые значения угловых коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грилихес В.А. Солнечные космические энергостанции. – Л.: Наука, 1986. – 182 с.
2. Кудрин О.И. Солнечные высокотемпературные космические энергодвигательные установки / Под ред. Белякова В.П. – М.: Машиностроение, 1987. – 248 с.
3. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением / Под ред. д-ра техн. наук Хрусталева Б.А. М.: Мир, 1975. – 935 с.
4. Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. Теплообмен излучением. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.
5. Поляк Г.А. Анализ теплообмена излучением между диффузными поверхностями методом сальдо // Журнал техн. физ. – Т. 5, № 3. – С. 436-466.

Получено 09.07.2010 г.