

Резонансное повышение добротности собственных колебаний магнитного типа в открытом резонаторе с металлическим шаровым включением

Ю. В. Свищёв

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: svishchov@ire.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 30 апреля 2010 г.

Представлены результаты численного эксперимента по исследованию свойств собственных колебаний магнитного типа в открытом резонаторе со сферическими зеркалами, содержащем идеально проводящее шаровое включение. Обнаружен и исследован эффект резонансного повышения на несколько порядков добротности собственных колебаний, установлена природа этого эффекта.

1. Введение

В работах [1, 2] проведено теоретическое и экспериментальное исследование эффекта резонансного повышения добротности TEM_{00q} -колебаний в двухмерном открытом резонаторе с цилиндрической проводящей вставкой. Выдвинута гипотеза, что эффект повышения добротности колебания TEM_{005} связан как с противофазным сложением полей за пределами резонатора, так и с перестройкой структуры поля в самом резонаторе. При этом цилиндрическую вставку следует помещать в пучность электрического поля.

В настоящей работе приведены результаты аналогичных теоретических исследований, но применительно к открытому резонатору (ОР) со сферическими зеркалами, содержащему включение в виде идеально проводящего шара. Исследования проводились на основе развитой ранее в работе [3] спектральной теории собственных колебаний в ОР. Первые расчеты показали, что, как и в работах [1, 2], имеет место резонансное повышение добротности основных типов колебаний при помещении в ОР шара определенного радиуса. Однако объяснить природу этого эффекта на основе

выдвинутой в работах [1, 2] гипотезы оказалось проблематичным. Во-первых, в отличие от данных, приведенных в работах [1, 2], существуют три (в [1, 2] – только два) и более значений радиуса шара, при которых наблюдается эффект повышения добротности собственных колебаний. Во-вторых, значения радиусов, при которых наблюдается эффект, могут быть очень близки, что вызывает сомнение в справедливости выдвинутой гипотезы. В-третьих, найдены такие значения радиусов шаров, когда наблюдается эффект, но шар заполняет большую часть объема резонатора. В-четвертых, эффект наблюдается и для неосновных типов колебаний. То есть приведенные в гипотезе предположения (если применять их к ОР со сферическими зеркалами) являются скорее следствием, чем причиной возникновения эффекта. Перечисленные выше факторы послужили стимулом для проведения более детальных исследований с целью установить природу происхождения обнаруженного эффекта. Показано, что эффект резонансного повышения добротности собственных колебаний ОР является следствием междутиповой связи колебаний в ОР.

2. Постановка задачи и метод решения

На рис. 1 изображен ОР, образованный двумя одинаковыми соосными идеально проводящими сферическими зеркалами. Он характеризуется радиусами кривизны зеркал a , расстоянием L между зеркалами и угловыми размерами зеркал φ . Между зеркалами резонатора помещен идеально проводящий шар радиусом b . Расстояние между центром резонатора и центром шара равно ΔZ .

Аксиально-симметричные поля магнитного типа описываются магнитным потенциалом Дебая v , электрический потенциал Дебая u при этом равен нулю (электромагнитное поле имеет три отличные от нуля компоненты: E_φ , H_r , H_θ). С учетом этого математическая формулировка задачи о спектре собственных электромагнитных колебаний ОР с шаровым включением состоит в следующем. Требуется определить значения спектрального параметра $k = 2\pi/\lambda$ (λ – длина волны), при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца, $\Delta v + k^2 v = 0$, обеспечивающие выполнение граничных условий на зеркалах (равенство нулю тангенциальной составляющей электрического поля), условия конечности энергии электромагнитного поля в любой ограниченной области пространства, а также удовлетворяющие условию излучения на бес-

конечности (аналог условия Рейхардта в двумерном случае).

В работе [3] показано, что данная спектральная задача эквивалентна задаче на характеристические числа матричной оператор-функции вида $H(k) = I - A(k)$ (I – тождественный оператор, $A(k)$ – ядерная оператор-функция), доказана дискретность и конечная кратность спектра собственных частот, построен математически обоснованный алгоритм вычисления спектра. Типу колебаний в пустом ОР приписывается (см. [3]) символ TE_{0nq} , который означает, что единственная отличная от нуля компонента электрического поля E_φ имеет q пучностей по оси ОР и n раз обращается в нуль (исключая ось ОР, где $E_\varphi \equiv 0$) в перпендикулярном направлении (по радиусу в цилиндрической системе координат). Если при $\Delta Z \rightarrow 0$ и (или) $b \rightarrow 0$ найденные собственные колебания ОР с шаровым включением непрерывно переходят в собственные колебания пустого ОР, то будем классифицировать эти колебания и при $\Delta Z > 0$, $b > 0$ как колебания TE_{0nq} . Для относительно больших значений радиуса шара и в условиях обсуждаемого ниже явления междутиповой связи колебаний полезность такой классификации весьма относительна.

3. Эффект резонансного падения добротности собственных колебаний в пустом открытом резонаторе

Естественно предположить, что собственные частоты и добротность колебаний ОР при помещении в него неоднородности в виде идеально проводящего шара будут зависеть от геометрических параметров резонатора, т. е. от параметров L и φ . Поэтому кратко опишем результат, полученный в работе [4]. Имея самостоятельный интерес, он приблизит нас к пониманию природы повышения (падения) добротности собственных колебаний ОР при помещении в него шара.

На рис. 2 показаны зависимости реальных частей нормированных волновых чисел (нормированных собственных частот) $\text{Re}(ka)$ ($ka = (2\pi/\lambda)a = (\omega/c)a$, ω – частота, c – скорость света) и логарифмов добротностей $\lg Q$

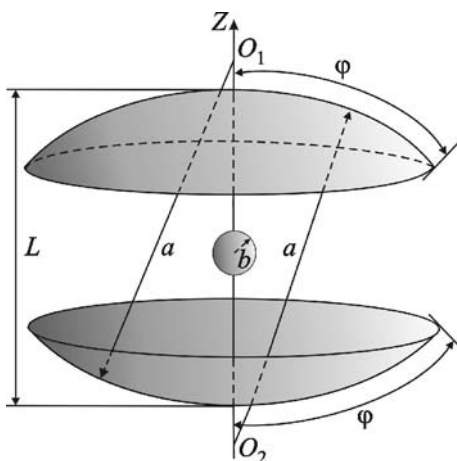


Рис. 1. Открытый резонатор с металлическим шаровым включением

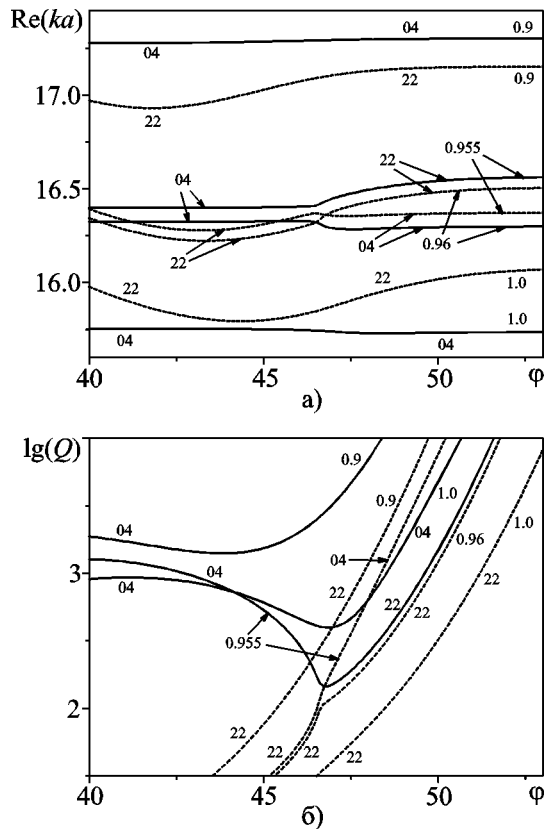


Рис. 2. Зависимость реальных частей нормированных волновых чисел (а) и логарифмов добротностей (б) собственных колебаний TE_{004} (сплошные линии и цифра 04) и TE_{022} (пунктирные линии и цифра 22) в окрестности их точки вырождения от углового размера φ зеркал для различных значений расстояния L/a (указаны дробными цифрами) между зеркалами пустого ОР

($Q = -0.5 \operatorname{Re}(ka) / \operatorname{Im}(ka)$) собственных колебаний TE_{004} и TE_{022} от углового размера зеркал φ для различных значений расстояния между зеркалами L/a . На основе численного эксперимента установлено (см. [4]), что в ОР с размерами $L = L_0 \approx 0.955a$, $\varphi = \varphi_0 \approx 46.6^\circ$ собственные частоты колебаний TE_{004} и TE_{022} расположены достаточно близко в метрике комплексного пространства. Во всех рассмотренных случаях модуль разности собственных частот соответствующих собственных колебаний не превосходил значения $\varepsilon = 10^{-4}$, с увеличением точности вычислений значение ε уменьшается. Это косвенно подтверждает, что, по-видимому, существуют значения пара-

метров резонатора L_0 и φ_0 , при которых указанные выше колебания становятся вырожденными, т. е. у них совпадают комплексные собственные частоты. Поэтому далее такие значения параметров резонатора и частоты будем условно называть точками вырождения. Отметим, что в контексте работы [4] и настоящей работы имеет значение не сама точка вырождения, а некоторая ее окрестность (см. ниже, а также работы [5, 6], где, в частности, рассматриваются вопросы о связи точек вырождения и морсовских критических точек при исследовании спектральных характеристик ряда электродинамических структур). В точке вырождения наблюдается резонансное падение добротности собственного колебания TE_{004} (точнее, соответствующего гибридного типа колебаний). Малая окрестность точки (L_0, φ_0) названа запрещенной зоной для колебаний TE_{004} и TE_{022} . Это означает, что, если взять ОР с размерами в этой окрестности, то в таком резонаторе можно наблюдать только гибридные типы колебаний, имеющие черты колебаний TE_{004} и TE_{022} . Вне указанной окрестности можно однозначно идентифицировать типы колебаний. При этом для $L < L_0$ при переходе через указанную окрестность наблюдается обмен типами колебаний, зависимости реальных частей двух собственных частот не пересекаются и имеют вид графика Вина. Для $L > L_0$ обмен типами колебаний не наблюдается (происходит только гибридизация колебаний), кривые реальных частей двух собственных частот пересекаются. Другими словами, имеются все факторы, свойственные явлению междутиповой связи колебаний в ОР [6].

Следует подчеркнуть, что данный результат, как и результат настоящей работы, был получен на основе строгой математической модели ОР. Асимптотическая теория [7] описывает только часть спектра ОР, формула для собственных частот не учитывает зависимости собственных частот от размера зеркал.

Для колебания TE_{004} явление междутиповой связи колебаний, как видно, приводит к резонансному падению добротности. В общем случае, явление междутиповой связи колебаний может приводить к разнообразным эффектам [4-6], в частности, к росту добротности собственных колебаний.

4. Эффект резонансного повышения (падения) добротности собственных колебаний в открытом резонаторе с идеально проводящим шаром

Рассмотрим конфокальный резонатор ($L/a=1$). На рис. 3 показаны зависимости реальных частей нормированных волновых чисел $\text{Re}(ka)$ и логарифмов добротностей $\lg Q$

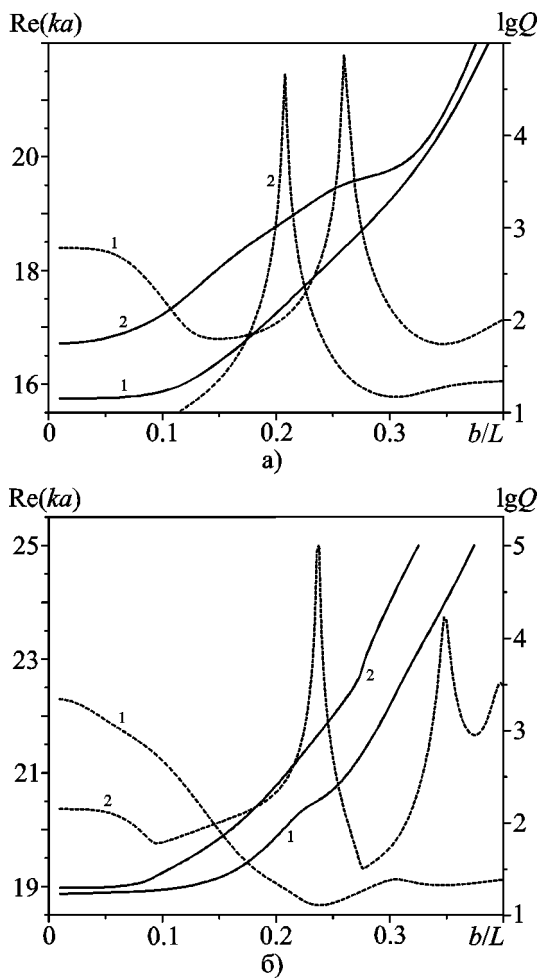


Рис. 3. Зависимости реальных частей нормированных волновых чисел (сплошные кривые) и логарифмов добротностей (пунктирные кривые) собственных колебаний конфокального ОР от относительного радиуса шара b/L , размещенного в центре ОР ($\Delta Z/L=0$): а) – TE_{004} при $\varphi = 45^\circ$ и TE_{031} при $\varphi = 50^\circ$ (обозначены цифрами 1 и 2 соответственно), б) – TE_{005} при $\varphi = 50^\circ$ и TE_{014} при $\varphi = 48^\circ$ (обозначены цифрами 1 и 2)

собственных колебаний TE_{004} , TE_{031} , TE_{005} , TE_{014} от относительного радиуса шара b/L , размещенного в центре конфокального открытого резонатора ($\Delta Z=0$). Размещение в ОР шара малого радиуса практически не приводит к изменению частоты и добротности колебаний. При дальнейшем увеличении радиуса шара происходит изменение как добротности, так и частоты собственных колебаний. Для некоторых значений радиуса наблюдается резонансное повышение добротности колебаний на несколько порядков по сравнению с добротностью колебаний в пустом резонаторе. Такие значения далее будем называть резонансными. Для основного колебания TE_{004} и неосновного колебания TE_{031} имеется одно резонансное значение радиуса, при котором достигается максимум $\lg Q$; для колебания TE_{014} – два резонансных значения радиуса. Добротность же основного колебания TE_{005} с увеличением радиуса шара монотонно падает, резонансного повышения добротности не наблюдается. То есть эффект зависит как от относительного радиуса шара b/L , так и от углового размера зеркал φ и типа колебаний.

Численный эксперимент показал, что качественно картина сохраняется, если рассмотреть не конфокальный ОР, а ОР с другим значением расстояния между зеркалами. Изменяются только резонансные значения радиусов шаров.

Представляет интерес вопрос, что происходит, если взять ОР с размерами L_0 , φ_0 , которым соответствует вырождение собственных колебаний TE_{004} и TE_{022} (рис. 2). Ответ следующий. С увеличением радиуса шара вырождение снимается, гибридные типы колебаний переходят в исходные типы колебаний TE_{004} и TE_{022} . Более того, происходит не только снятие вырождения, но и повышение на несколько порядков добротности основного типа колебания TE_{004} .

Анализ структуры полей показал, что размещение в ОР шара определенного радиуса может заметно изменить структуру поля резонатора. Внимания заслуживают колебания, для которых принятая выше классификация может быть уточнена следующим образом. В объеме резонатора условно выделим две части: объем между зеркалами резонатора

и объем между одним из зеркал и поверхностью шара. К каждому объему применяем классификацию, принятую для пустого открытого резонатора (см. пункт 1). На рис. 4 приведены распределения пространственной структуры квадрата модуля электрического поля в открытом резонаторе колебаний $TE_{0nq,ij}$ при нескольких (в том числе резонансных) значениях радиуса шара.

5. Природа эффекта повышения добротности

Для определенности рассмотрим колебание TE_{014} . Анализ структуры поля при изменении радиуса шара (кривая 2 на рис. 3, б), расположенного в центре резонатора ($\Delta Z = 0$), показал следующее. С увеличением радиуса шара про-

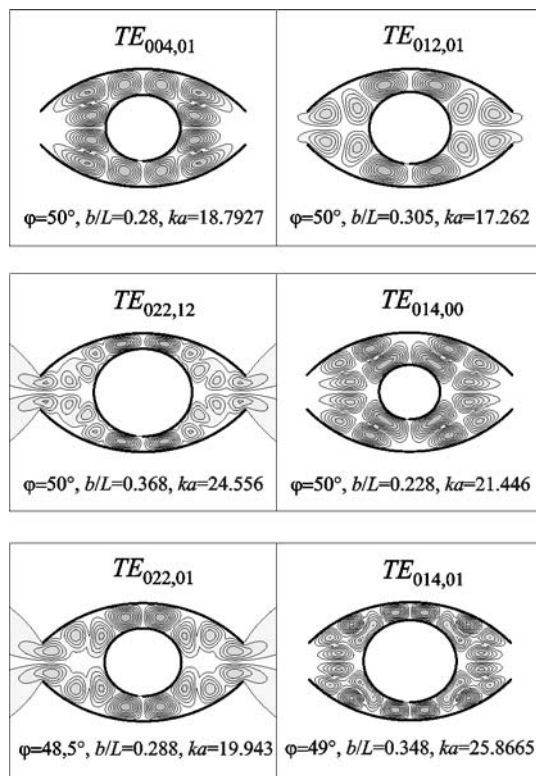


Рис. 4. Схематичное изображение пространственной структуры квадрата модуля электрического поля $|E_\varphi|^2$ собственных колебаний $TE_{0nq,ij}$ в открытом резонаторе с металлическим шаровым включением ($L/a = 1, \Delta Z/L = 0$)

исходит преобразование (через некоторые гибридные типы колебаний) структуры поля сначала от колебания TE_{014} к колебанию $TE_{014,00}$ (окрестность первого минимума добротности, $b/L \approx 0.095$), а затем к колебанию $TE_{014,01}$ (окрестность второго минимума добротности, $b/L \approx 0.275$). Именно это обстоятельство послужило толчком к применению для анализа обнаруженного эффекта того же подхода, что и в работе [4], а именно: изучение зависимости собственных частот от радиуса шара как основных, так и неосновных типов колебаний.

На рис. 5 приведены зависимости реальных частей нормированных волновых чисел и логарифмов добротностей собственных колебаний TE_{014} , TE_{032} и TE_{042} конфокального ОР от относительного радиуса шара b/L , размещенного в центре ОР ($\Delta Z/L = 0$), для различных значений углового размера зеркал φ . Точка $(L_0, \varphi_0) \approx (0.965a; 47.65^\circ)$ является точкой вырождения колебаний TE_{014} , TE_{032} в пустом ОР. Эти колебания при $L/a = 1$ в малой окрестности величины φ_0 в отсутствие шара являются гибридными (на рисунке они обозначены как ~ 14 и ~ 32). Как видно на рис. 5, добротность колебания TE_{014} с увеличением радиуса шара при $\varphi = 48^\circ$ имеет два максимума, при $\varphi = 50^\circ$ и $\varphi = 55^\circ$ монотонно падает. Добротность колебания TE_{032} , наоборот, имеет два максимума при $\varphi = 50^\circ$ и $\varphi = 55^\circ$. Реальные части нормированных волновых чисел этих колебаний при $\varphi = 48^\circ$ пересекаются, при $\varphi = 50^\circ$ и $\varphi = 55^\circ$ они образуют график Вина. В точке $\varphi = \varphi_1 \approx 48.2^\circ$, $b/L = b_1/L \approx 0.87$ модуль разности собственных частот близок к нулю.

Рассмотрим теперь, что происходит со структурой полей колебаний TE_{014} и TE_{032} при изменении параметров φ и b/L . При $b/L = 0$ (отсутствие шара) эти колебания, как было отмечено выше, являются гибридными. С увеличением b/L в окрестности точки $b/L = b_1/L$ при $\varphi = 48^\circ$ колебания TE_{014} и TE_{032} трансформируются в колебания $TE_{014,00}$ и $TE_{022,01}$, при $\varphi = 50^\circ$ и $\varphi = 55^\circ$ в малой окрестности точки $b/L = b_1/L$ наблюдается обмен типами колебаний, т. е. колебания TE_{014} и TE_{032} трансформируются соответственно в колебания $TE_{022,01}$ и $TE_{014,00}$, и при этом добротность

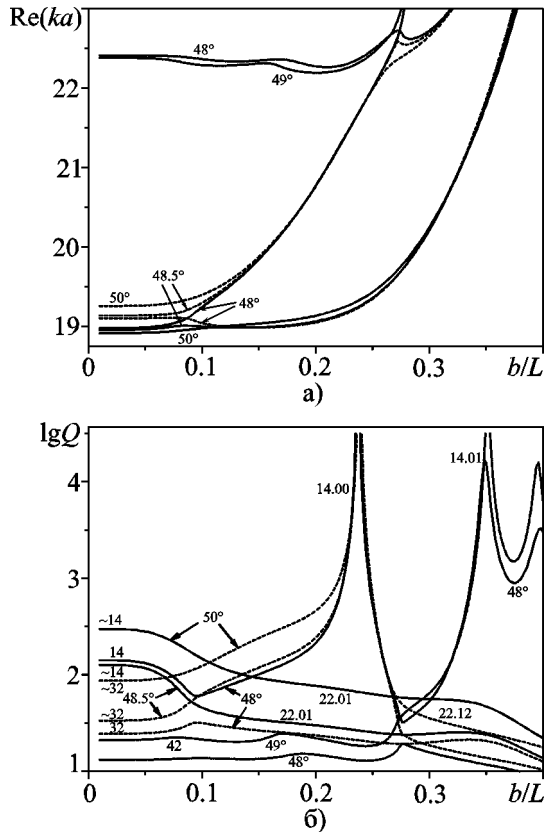


Рис. 5. Зависимость реальных частей нормированных волновых чисел (а) и логарифмов добротностей (б) собственных колебаний TE_{014} , TE_{032} и TE_{042} конфокального ОР от относительного радиуса шара b/L , размещенного в центре ОР ($\Delta Z/L = 0$), для различных значений углового размера зеркал φ . Символами 14, 32 и 42 обозначены колебания TE_{014} , TE_{032} и TE_{042} ; символами 14,00, 14,01, 22,01, 22,12 – колебания $TE_{014,00}$, $TE_{014,01}$, $TE_{022,01}$, $TE_{022,12}$; символами ~14 и ~32 – гибридные типы колебаний

высокодобротного колебания TE_{014} падает, а добротность низкодобротного колебания TE_{032} растет. В малой окрестности точки $\varphi = \varphi_1$, $b/L = b_1/L$ наблюдаются гибридные типы колебаний. При дальнейшем увеличении b/L аналогичные закономерности характерны для колебаний $TE_{014,00}$ и TE_{042} . В окрестности точки $b/L = b_2/L \approx 0.275$ эти колебания трансформируются в колебания $TE_{014,01}$ и $TE_{022,12}$. При этом наблюдается резонансное повышение добротности одного из образовавшихся колебаний.

Таким образом, анализ структуры поля показал, что в малой окрестности точек вырождения наблюдаются гибридные типы колебаний, зависимости реальных частей собственных частот либо пересекаются, либо имеют вид графика Вина. Вне этих окрестностей можно однозначно идентифицировать типы колебаний. То есть поведение спектральных характеристик ОР с шаровым включением в окрестности точек вырождения такое же, как и описанное в пункте 3. Можно утверждать, что эффект повышения (падения) добротности колебаний связан с явлением междутиповой связи колебаний, следствием которого, в частности, может быть преобразование колебаний в новые колебания, структура распределения поля которых может заметно отличаться от структуры полей исходных типов колебаний.

Математическую основу явления междутиповой связи колебаний составляет понятие морсовской критической точки соответствующего характеристического определителя [6]. В работе [4], а также в пункте 3 настоящей статьи показано, что точка вырождения собственных колебаний (рис. 2) является морсовской критической точкой. В монографии [6] в связи с этим было введено понятие вырожденной морсовской критической точки. В общем случае не каждая морсовская критическая точка является точкой вырождения. Далее позволим себе провести следующую аналогию. В контексте настоящей работы будем называть особой точкой некую воображаемую в пространстве параметров L , φ , b , ΔZ точку, в окрестности которой поведение спектральных характеристик присуще явлению междутиповой связи колебаний. В частном случае (рис. 2, 5) эта точка совпадает с найденными точками вырождения. В общем случае, наблюдается обмен типами колебаний, но точка вырождения может отсутствовать (она может возникнуть при вариации параметров L , φ , ΔZ). Понятие особой точки позволяет объяснить моменты, приведенные во Введении. Число экстремальных значений добротности собственных колебаний ОР с шаровым включением заранее предсказать нельзя, оно определяется типом колебаний, параметрами L , φ , b , ΔZ и может быть найдено в результате численного эксперимента.

Наличие двух близких резонансных значений радиуса шара объясняется наличием двух близко расположенных особых точек. Численный эксперимент показал, что характер зависимостей спектральных характеристик от геометрических параметров ОР с идеально проводящим шаром может быть весьма разнообразным. Возможные эпюры поведения собственных частот в окрестности морсовской критической точки приведены в работах [6, 8].

7. Выводы

Обнаружен и детально исследован эффект резонансного повышения (падения) добротности собственных колебаний в ОР со сферическими зеркалами при размещении в нем металлического шара определенного радиуса. Показано, что число экстремальных значений добротности собственных колебаний ОР с шаровым включением предсказать заранее не представляется возможным, оно определяется типом колебаний, параметрами L , φ , b , ΔZ и может быть найдено в результате численного эксперимента.

Установлено, что эффект резонансного повышения (падения) добротности собственных колебаний ОР является следствием междутиповой связи колебаний в ОР. Как правило, обнаруженный эффект наблюдается в окрестности точек вырождения (в комплексной плоскости) собственных колебаний. Наличие двух близких резонансных значений радиуса шара объясняется наличием двух близко расположенных точек вырождения.

Описанный эффект следует учитывать как при размещении в ОР различного рода неоднородностей, так и при восстановлении амплитудного распределения поля методом пробного тела.

Литература

1. Мележик П. Н., Мирошниченко В. С., Сенкевич Е. Б. Открытые резонаторы с проводящими цилиндрическими вставками. Ч. 1. Двухмерная модель // Изв. вузов. Радиофизика. – 2005. – Т. 48, №7. – С. 596-604.
2. Мележик П. Н., Мирошниченко В. С., Сенкевич Е. Б. Открытые резонаторы с проводящими цилиндрическими вставками. Ч. 2. Резонаторы с зеркала-

- ми конечной длины // Изв. вузов. Радиофизика. – 2005. – Т. 48, №8. – С. 684-691.
3. Свищёв Ю. В. Аксиально-симметричные собственные колебания магнитного типа в открытом резонаторе со сферическими зеркалами // Изв. вузов. Радиофизика. – 2006. – Т. 49, №9. – С. 787-798.
4. Свищёв Ю. В. О добротности собственных колебаний магнитного типа TE_{0nq} открытого резонатора со сферическими зеркалами // Радиофизика и радиоастрономия. – 2010. – Т. 15, №2. – С. 199-206.
5. Шестопалов В. П., Сиренко Ю. К. Динамическая теория решеток. – Киев: Наук. думка, 1989. – 216 с.
6. Шестопалов В. П. Морсовские критические точки дисперсионных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 240 с.
7. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М.: Сов. радио, 1966. – 476 с.
8. Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. Об аналитической природе явления междутиповой связи собственных колебаний // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 300, №6. – С. 1356-1359.

Резонансне покращення добротності власних коливань магнітного типу у відкритому резонаторі з металеву кульову вставкою

Ю. В. Свищов

Наводяться результати числового експерименту у дослідженні властивостей власних коливань магнітного типу у відкритому резонаторі зі сферичними дзеркалами, що має ідеально провідну кульову вставку. Знайдено та досліджено ефект резонансного покращення на декілька порядків добротності власних коливань, встановлено природу цього ефекту.

Resonant Increase of Magnetic Eigenmode Quality of an Open Resonator with a Spherical Metal Insertion

Y. V. Svischchov

Numerical experiment results on properties of magnetic eigenmodes of an open spherical-mirror resonator with a spherical perfectly conducting insertion are reported. Effect of the eigenoscillation quality enhancement by several orders of magnitude has been recognized, and its nature understood.