

Кумулянтное описание усеченного произвольным образом полета Леви

Д. В. Виноградов

ООО “Химэкс”,
ул. Студенческая, 30-205, г. Дзержинск, Нижегородская обл., 606016, Россия
E-mail: Dmitry.Vinogradov@list.ru

Статья поступила в редакцию 30 июня 2010 г.

Методом кумулянтного анализа исследованы свойства усеченного произвольным образом полета Леви. Найдена последовательность кумулянтов, характеризующая усеченное произвольным образом распределение Леви, и определена их зависимость от формы усечения. Исследовано влияние формы усечения на свойства гауссова и Леви режимов процесса.

1. Введение

Усеченный полет Леви относится к классу дискретных процессов случайного блуждания с независимыми одинаково распределенными приращениями. Как известно, процессы случайного блуждания находят широкое применение для описания стохастических процессов как физической, так и нефизической природы [1]. Например, физические процессы броуновского движения и диффузии описываются гауссовым случайным блужданием, являющимся автомодельным процессом с фрактальной размерностью равной 2 [2].

В нефизических системах довольно часто встречаются автомодельные процессы с другой фрактальной размерностью. Это так называемые полеты Леви [3]. Они обладают бесконечной дисперсией, а их приращения распределены по α -устойчивым законам с индексом устойчивости $0 < \alpha < 2$ (распределения Леви).

В экономических и финансовых системах, являющихся объектом исследования нового междисциплинарного направления – экономфизики [4, 5], стохастические процессы обладают рядом особых свойств. Моменты их приращений конечны, но сами процессы

являются негауссовыми. Их крупномасштабные флуктуации имеют характер броуновского движения, в то время как мелкомасштабные флуктуации обладают некоторыми свойствами полетов Леви. Впервые в работе [6] для описания подобных процессов была предложена модель стохастического процесса, получившая название усеченный полет Леви.

Распределение вероятности приращений усеченного полета Леви представляет собой слабым образом деформированное распределение Леви. Деформация должна быть такой, чтобы дисперсия результирующего распределения оказалась конечной. Согласно обобщенной центральной предельной теореме, результирующее распределение перейдет из области притяжения распределения Леви в область притяжения гауссова распределения. Чтобы у результирующего распределения дисперсия была конечной, выбранная деформация должна подавить “хвосты” распределения Леви при сохранении его центральной части. Так, в пионерской работе [6] для этой цели было использовано полное отсечение “хвостов” распределения Леви.

Вслед за [6] появился целый ряд работ [7-10], где предлагались иные варианты усе-

чения распределения Леви и на их основе строились стохастические процессы усеченных полетов Леви. Действительно, существует множество вариантов слабой деформации распределения Леви, решающих поставленную задачу. Поэтому имеется целый класс распределений, которые можно назвать произвольно усеченными распределениями Леви.

Усеченные полеты Леви получили достаточно широкое распространение при описании стохастических процессов различной природы, в том числе в радиофизике и радиоастрономии. Так, например, существует гипотеза, что турбулентность в межзвездном и межпланетном пространстве подчиняется статистике Леви. В работе [11] показано, что флуктуации скорости частиц и вектора магнитного поля, связанные с магнитогидродинамической турбулентностью быстро солнечного ветра во внутренней гелиосфере, подчиняются статистике усеченного полета Леви. В работе [12] на основе предположения, что флуктуации плотности межзвездного газа также подчиняются статистике Леви, объясняются аномальные зависимости излучения дальних пульсаров, а именно форма регистрируемого радиосигнала и зависимость его ширины от меры дисперсии.

В качестве примера использования усеченных полетов Леви в радиофизике можно привести медицинские эксперименты по ЯМР (ядерный магнитный резонанс), в которых вероятностное распределение изменения фазы спина молекул воды в сильном нелинейном магнитном поле является усеченным полетом Леви [13].

Следующим интересным примером является то, что траектория движения человека есть усеченный полет Леви, и это необходимо учитывать [14] при разработке алгоритмов маршрутизации в сетях с переносными мобильными узлами, работающими по протоколу DTN.

Несмотря на то что усеченные полеты Леви получили достаточно широкое распространение, до сих пор отсутствует спе-

циальное исследование влияния формы деформации на их свойства. Целью настоящей работы является исследование методом кумулянтного анализа влияния формы деформации усечения на свойства усеченных полетов Леви.

2. Кумулянтное представление процесса случайного блуждания

Процесс дискретного случайного блуждания $\{\eta_n\}$,

$$\eta_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (1)$$

с независимыми одинаково распределенными приращениями $\{X_i\}$ относится к нестационарным случайным процессам с отсутствием статистических связей между приращениями и в общем случае является негауссовым. Такой процесс полностью описывается [15] одномерной плотностью вероятности $W(x, n)$, где n – количество шагов, а $W(x, 1) \equiv P(x)$ – плотность вероятности приращений $\{X_i\}$, либо одномерной характеристической функцией $\theta(q, n)$:

$$\theta(q, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, n) e^{iqx} dx,$$

являющейся фурье-образом одномерной плотности вероятности [16].

В статистической радиофизике для исследования негауссовых случайных процессов, к числу которых относится и рассматриваемый случай, чрезвычайно успешно применяется метод кумулянтного анализа [15]. В рамках кумулянтного подхода случайный процесс (1) исчерпывающим и однозначным образом описывается бесконечной последовательностью кумулянтных функций $\tilde{\kappa}_j(n)$, $j = 1, 2, 3, \dots$, где

$$\theta(q, n) = \exp \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{\kappa}_j(n)}{j!} (iq)^j \right]. \quad (2)$$

Последовательность кумулянтных функций является фундаментальной [15], в результате чего при описании негауссовых случайных процессов кумулянтный подход оказывается наиболее простым и эффективным. Действительно, случайный процесс (1) в силу отсутствия статистических связей между приращениями описывается кумулянтными функциями [15] с линейной зависимостью от числа шагов:

$$\tilde{\kappa}_j(n) = n\kappa_j, \quad (3)$$

где κ_j ($\kappa_j \equiv \tilde{\kappa}_j(1)$) есть набор кумулянтов, определяющих распределение вероятности приращений случайного процесса $P(x)$.

Как уже отмечалось выше, кумулянтные функции исчерпывающим и однозначным образом описывают случайный процесс и содержат в себе все характеристики исследуемого процесса. Так, например, для дисперсии случайного процесса (1), являющейся вторым кумулянтном, $D(n) \equiv \tilde{\kappa}_2(n)$, получаем из (3) хорошо известный закон диффузии [2]:

$$D(n) = \mathcal{D}n, \quad (4)$$

где в качестве коэффициента диффузии выступает дисперсия приращений $\mathcal{D} = \sigma^2 \equiv \kappa_2$.

Форма одномоментного распределения вероятности процесса также определяется кумулянтами, а точнее, безразмерными кумулянтными коэффициентами [15] $\lambda_j = \kappa_j / \sigma^j$. Напомним, что нормальное распределение вероятности характеризуется только первыми двумя кумулянтами (среднее значение и дисперсия), а третий и четвертый кумулянтные коэффициенты, λ_3 и λ_4 , являются коэффициентами асимметрии и эксцесса соответственно. Последующие кумулянтные коэффициенты описывают более сложные от-

клонения формы распределения вероятности от нормальной.

Форма одномоментного распределения вероятности $W(x, n)$ исследуемого процесса (1) на шаге n определяется высшими кумулянтными коэффициентами процесса $\tilde{\lambda}_j(n) = \tilde{\kappa}_j(n) / \tilde{\kappa}_2^{j/2}(n)$, для которых из (3) получаем:

$$\tilde{\lambda}_j(n) = \lambda_j / n^{j/2-1}, \quad (5)$$

где λ_j – кумулянтные коэффициенты распределения вероятности приращений $P(x)$. Из (5) видно, что высшие кумулянтные коэффициенты $\tilde{\lambda}_j(n)$ при росте шагов, $n \rightarrow \infty$, стремятся к нулю тем быстрее, чем выше их порядок. При достаточно большом количестве шагов высшие кумулянтные коэффициенты становятся пренебрежимо малыми, и одномоментное распределение вероятности $W(x, n)$ определяется только первыми двумя кумулянтами, т. е. становится гауссовым. Выражение (5) есть не что иное как кумулянтное представление центральной предельной теоремы.

Таким образом, из вышеизложенного видно, что процесс случайного блуждания (1) с независимыми одинаково распределенными приращениями описывается кумулянтными функциями (3) и полностью определяется кумулянтами распределения вероятности приращений $P(x)$.

3. Кумулянты произвольно усеченного распределения Леви

Для исследования влияния формы деформации на свойства произвольно усеченного полета Леви необходимо найти кумулянты усеченного распределения Леви, являющегося распределением его приращений.

В настоящей работе будем рассматривать только симметричный случай. Представим произвольно усеченное распределение Леви в виде произведения двух функций:

$$P(x) = CP_L(x)g(x), \quad (6)$$

где $P_L(x)$ есть симметричное несмещенное α -устойчивое распределение Леви [17-18], $g(x)$ – симметричная деформирующая функция, а C – нормирующий множитель. Предположим, что деформирующая функция имеет в нуле значение $g(0)=1$, а при стремлении аргумента $|x| \rightarrow \infty$ стремится к нулю совместно со всеми своими производными быстрее любой степени $1/|x|$. Предположим также, что характерный пространственный масштаб l деформирующей функции $g(x)$ во много раз больше пространственного масштаба γ исходного распределения Леви:

$$l \gg \gamma. \quad (7)$$

Для нахождения кумулянтов κ_j распределения вероятности (6) воспользуемся их представлением через моменты распределения m_j [19],

$$\kappa_j = j! \sum_{i=1}^j \sum \left(\frac{m_{p_i}}{p_i!} \right)^{\pi_i} \dots \left(\frac{m_{p_i}}{p_i!} \right)^{\pi_i} \frac{(-1)^{p-1} (p-1)!}{\pi_1! \dots \pi_i!}, \quad (8)$$

где второе суммирование распространяется на все положительные π и ρ , подчиненные условиям:

$$p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \dots + p_i\pi_i = j,$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_i = \rho.$$

В силу симметрии распределения (6) нечетные кумулянты равны нулю, а низшие четные кумулянты получаем из (8):

$$\kappa_2 = m_2,$$

$$\kappa_4 = m_4 - 3m_2^2,$$

$$\kappa_6 = m_6 - 15m_2m_4 + 30m_2^3.$$

Моменты распределения (6), в свою очередь, можно найти через значение его характеристической функции $\theta(q)$ в нуле [16]:

$$m_j = (i)^j \left[\frac{d^j \theta(q)}{dq^j} \right]_{q=0}, \quad (9)$$

где $\theta(q)$ есть фурье-образ плотности распределения вероятности $P(x)$.

Так как усеченное распределение Леви (6) представлено в виде произведения двух функций, то, согласно свойствам Фурье преобразования [20], его характеристическая функция есть свертка их фурье-образов:

$$\theta(q) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_L(q-\tau)G(\tau)d\tau. \quad (10)$$

Здесь $G(\tau)$ есть фурье-образ деформирующей функции $g(x)$, а $\theta_L(q)$ – характеристическая функция симметричного несмещенного α -устойчивого распределения Леви (см. например [16-18]):

$$\theta_L(q) = \exp(-\gamma^\alpha |q|^\alpha), \quad (11)$$

где α – индекс устойчивости, а γ – параметр, характеризующий ширину распределения Леви.

Опираясь на свойства характеристической функции [16], а именно $\theta(0) = 1$ и $\theta(-q) = \theta^*(q)$, где знак “*” означает комплексно сопряженную величину, и симметричность распределения вероятности, для моментов распределения (6) получим из (9), (10), (11):

$$m_j = (i)^j \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_L^{(j)}(q)G(q)dq}{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_L(q)G(q)dq}. \quad (12)$$

Далее воспользуемся наличием в задаче малого параметра $\varepsilon = (\gamma/l)^\alpha \ll 1$, а именно соотношением пространственных масштабов распределения Леви и деформирующей функции, и будем искать моменты усеченного распределения Леви в виде асимптотического разложения по этому малому параметру.

Для этого используем метод Лапласа (см., например [21]). Из-за наличия малого параметра Фурье, образ деформирующей функции $G(q)$ сосредоточен в малой окрестности начала координат в виде резкого максимума, а вне этой окрестности близок к нулю. Этот максимум тем резче, чем меньше параметр ε . С другой стороны, в этой окрестности значение характеристической функции распределения Леви $\theta_L(q)$ претерпевает малые изменения. В силу этого в окрестности начала координат точное значение функции $\theta_L(q)$ можно заменить ее асимптотическим разложением и искать решение в виде ряда по малому параметру ε .

Для этого введем безразмерные координаты $\zeta = lq$, $\xi = x/l$ и разложим характеристическую функцию $\theta_L(\zeta)$ в асимптотический ряд по малому параметру ε :

$$\theta_L(\zeta) = \exp(-\varepsilon|\zeta|^\alpha) \approx 1 - \varepsilon|\zeta|^\alpha + \varepsilon^2 \frac{|\zeta|^{2\alpha}}{2} - \dots \quad (13)$$

Перейдем в выражении (12) к безразмерным переменным, заменим точное значение характеристической функции на приближенное (13) и, ограничиваясь в решении членами порядка малости до $o(\varepsilon^1)$ включительно, получим для моментов усеченного распределения Леви:

$$m_j = -(i)^j l^j \varepsilon \alpha (\alpha - 1) \dots (\alpha - j + 1) \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta|^{\alpha-j} G(\zeta) d\zeta \quad (14)$$

Учитывая, что обратное преобразование Фурье \mathcal{F}^{-1} степенной функции [22] есть

$$\mathcal{F}^{-1} [|\zeta|^\beta] = -\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi\beta}{2} \Gamma(\beta+1) |\xi|^{-\beta-1},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма функция, и перейдя в выражении (14) из пространства фурье-образов в пространство распределений вероятности, получим:

$$m_j = l^j \varepsilon \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{j-1-\alpha} g(\xi) d\xi \quad (15)$$

Выражение (15) справедливо для всех моментов произвольно усеченного распределения Леви. Отметим, что порядки величин моментов усеченного распределения Леви есть $m_j \sim l^j \varepsilon$. Поэтому, ограничиваясь в разложении членами порядка малости $o(\varepsilon^1)$, для кумулянтов из (8) получим $\kappa_j \approx m_j$, или

$$\kappa_j = l^{j-\alpha} \gamma^\alpha A(\alpha) \mu_j(\alpha), \quad (16)$$

где

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \Gamma(\alpha+1) \sin \frac{\pi\alpha}{2}, \quad (17)$$

$$\mu_j(\alpha) = \int_0^{\infty} \xi^{j-1-\alpha} g(\xi) d\xi \quad (18)$$

Здесь $\mu_j(\alpha)$ описывает влияние формы усечения распределения Леви на кумулянты. Отметим, что функция $\mu_j(\alpha)$, по сути, является преобразованием Меллина деформирующей функции $g(\xi)$ [20].

В случае усеченного распределения Коши (индекс устойчивости $\alpha=1$) выражения (16), (17), (18) упрощаются. В этом случае значения воздействующей функции $\mu_j(1)$ есть моменты деформирующей функции соответствующего порядка, $\mu_j(1) = M_{j-2}$, а для кумулянтов распределения получаем простое выражение:

$$\kappa_j = l^{j-1} \gamma \frac{2M_{j-2}}{\pi}.$$

Как отмечалось ранее, высшие кумулянтные коэффициенты показывают степень отличия распределения от нормального. Основываясь на (16), (17), (18), найдем высшие кумулянтные коэффициенты для усеченного распределения Леви:

$$\lambda_j = \left(\frac{l}{\gamma}\right)^{\alpha(j-2)/2} \frac{\mu_j(\alpha)}{A(\alpha)\mu_2^{j/2}(\alpha)}.$$

Из полученных результатов можно сделать вывод, что с точки зрения кумулянтного подхода отличительной особенностью распределения вероятности произвольно усеченного распределения Леви является определенный порядок величины высших кумулянтных коэффициентов: $\lambda_j \sim \varepsilon^{1-j/2}$ (например, $\lambda_4 \sim \varepsilon^{-1}$, $\lambda_6 \sim \varepsilon^{-2}$ и т. д.). Такая зависимость есть “визитная карточка” усеченного распределения Леви, и любое вероятностное распределение, высшие кумулянтные коэффициенты которого удовлетворяют этому требованию, относится к классу усеченных распределений Леви.

Из полученных результатов следует также, что кумулянты усеченного распределения Леви (16) зависят как от характерного масштаба деформирующей функции l , так и от соотношения пространственных масштабов $\varepsilon = (\gamma/l)^\alpha$, а именно $\kappa_j \sim l^j \varepsilon$, что в силу малости $(\gamma/l)^\alpha \ll 1$ делает зависимость значений кумулянтов от индекса устойчивости α исходного распределения Леви $\kappa_j(\alpha) \sim (\gamma/l)^\alpha$ сильной. Выражение (17) дает слабую зависимость кумулянтов от индекса устойчивости α . Зависимость кумулянтов от формы деформирующей функции описывается выражением (18).

4. Примеры усеченных распределений Леви

Рассмотрим в качестве примеров, иллюстрирующих полученные результаты, несколько вариантов деформирующих функций.

Усечение Мантеньи–Стенли. Усеченный полет Леви был впервые предложен в работе [6], где использовалось полное отсечение “хвостов” распределения Леви. Используемая деформирующая функция Мантеньи–Стенли имела вид:

$$g_{ms}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq 1; \\ 0, & |\xi| > 1. \end{cases} \quad (19)$$

Порождаемая ею функция воздействия $\mu_j(\alpha)$ есть

$$\mu_j(\alpha) = \frac{1}{j - \alpha}.$$

Из выражений (16), (17), (18) можно получить все кумулянты данного усеченного распределения, в том числе дисперсию:

$$\sigma^2 = l^{2-\alpha} \gamma^\alpha A(\alpha) \frac{1}{2-\alpha}. \quad (20)$$

Найденный результат совпадает с результатом для дисперсии в работе [6]. Однако отметим, что в [6] он был получен для ограниченных значений индекса устойчивости $1 \leq \alpha < 2$, в то время как сейчас для всех возможных значений индекса устойчивости $0 < \alpha \leq 2$.

Достаточно важной характеристикой усеченного распределения Леви является также его эксцесс. Для деформирующей функции Мантеньи–Стенли это

$$\lambda_4 = \left(\frac{l}{\gamma}\right)^\alpha \frac{1}{A(\alpha)} \frac{(2-\alpha)^2}{(4-\alpha)}.$$

Экспоненциальное усечение. Другим значимым примером является экспоненциальное подавление. Его деформирующая функция есть

$$g_e(\xi) = \exp(-|\xi|). \quad (21)$$

Она порождает функцию воздействия

$$\mu_j(\alpha) = \Gamma(j - \alpha).$$

При этом дисперсия будет иметь вид:

$$\sigma^2 = l^{2-\alpha} \gamma^\alpha A(\alpha) \Gamma(2 - \alpha), \quad (22)$$

а эксцесс –

$$\lambda_4 = \left(\frac{l}{\gamma}\right)^\alpha \frac{1}{A(\alpha)} \frac{(2-\alpha)(3-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Экспоненциально-степенное усечение.
Можно предложить также деформирующую функцию с экспоненциальным подавлением

$$g_s(\xi) = \exp(-|\xi|^h), \quad (23)$$

обладающую параметром h , позволяющим менять ее форму и степень подавления “хвостов” распределения Леви от полного их подавления, $h \rightarrow \infty$, до полного отсутствия подавления, $h = 0$. Ее функция воздействия есть

$$\mu_j(\alpha) = \frac{1}{h} \Gamma\left(\frac{j-\alpha}{h}\right).$$

Отметим, что при $h \rightarrow \infty$ она стремится к функции воздействия, порождаемой деформирующей функцией Мантеньи–Стенли.

Дисперсия данного усеченного распределения есть

$$\sigma^2 = l^{2-\alpha} \gamma^\alpha A(\alpha) \frac{\Gamma((2-\alpha)/h)}{h}, \quad (24)$$

а эксцесс –

$$\lambda_4 = \left(\frac{l}{\gamma}\right)^\alpha \frac{h}{A(\alpha)} \frac{\Gamma((4-\alpha)/h)}{\Gamma^2((2-\alpha)/h)}.$$

5. Свойства усеченного полета Леви

Как известно [4-6], свойства флуктуаций усеченного полета Леви зависят от их масштаба N . Крупномасштабные флуктуации процесса носят характер броуновского движения, и это называется гауссовым режимом усеченного полета Леви [4]. Мелкомасштабные флуктуации обладают некоторыми свойствами флуктуаций полета Леви, и это называется режимом Леви.

Гауссов режим. С точки зрения кумулянтного подхода гауссов режим наступает, когда высшими кумулянтными коэффициентами одномоментного распределения вероятности процесса $W(x, n)$ можно пренебречь. В этом случае процесс описывается законом диффузии (4), причем коэффициент диффузии есть дисперсия его приращений. В случае усеченных распределений Леви дисперсия определяется выражением (16), а в частных случаях формулами (20), (22), (24).

Как следует из (5), гауссов режим наступает для флуктуаций с характерным масштабом N_G , превышающим коэффициент эксцесса приращений $N_G \gg \lambda_4$, и для усеченных полетов Леви получаем $N_G \gg \lambda_4 \sim (l/\gamma)^\alpha$ или более точно

$$N_G \gg \lambda_4 = \left(\frac{l}{\gamma}\right)^\alpha \frac{\mu_4(\alpha)}{A(\alpha)\mu_2^2(\alpha)}, \quad (25)$$

С точки зрения кумулянтного подхода гауссов режим полностью определяется вторым и четвертым кумулянтами распределения приращений, или его дисперсией и эксцессом. С другой стороны, эти кумулянты зависят от формы усечения распределения Леви (16), (17), (18), причем она влияет как на коэффициент

диффузии, так и на условие наступления гауссова режима (25).

Например, для усеченного полета Коши $\alpha = 1$, и деформирующей функции Мانتеньи–Стенли (19) получаем коэффициент диффузии гауссова режима $\mathcal{D} = 2l\gamma/\pi$, и условие наступления гауссова режима определяется неравенством $N_G \gg \pi l/6\gamma$. Для экспоненциальной деформирующей функции (21) находим тот же коэффициент диффузии $\mathcal{D} = 2l\gamma/\pi$, но характерный масштаб флуктуаций гауссова режима увеличивается в шесть раз – $N_G \gg \pi l/\gamma$. Для экспоненциально-степенной функции (23) при значении параметра $h = 1/2$ коэффициент диффузии в два раза превышает коэффициент диффузии для усечения Мانتеньи–Стенли, $\mathcal{D} = 4l\gamma/\pi$, в то время как характерный масштаб флуктуаций гауссова режима увеличивается в 180 раз – $N_G \gg 30\pi l/\gamma$.

Режим Леви. В случае мелкомасштабных флуктуаций усеченного полета Леви, если их характерный масштаб $N \leq (l/\gamma)^\alpha$, высшими кумулянтами распределения вероятности пренебрегать нельзя. В этом случае для одномоментной характеристической функции усеченного полета Леви при условии (7) из (2), (3), (16) получаем:

$$\theta(q, n, \gamma) = \exp \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{n\gamma^\alpha l^{j-\alpha} A(\alpha) \mu_j(\alpha)}{j!} (iq)^j \right]. \quad (26)$$

Благодаря тому что для кумулянтов усеченных распределений Леви характерна зависимость $\kappa_j \sim l^{j-\alpha} \gamma^\alpha$, из (26) вытекает равенство

$$\theta(q, n, \gamma) = \theta(q, 1, \gamma n^{1/\alpha}). \quad (27)$$

Физический смысл равенства (27) состоит в том, что одномоментное распределение вероятности n -го шага усеченного полета Леви совпадает с распределением вероятности, полученным из исходного усеченного распределения Леви изменением пространственного масштаба распределения Леви на величину $\gamma_{eff} = \gamma n^{1/\alpha}$, при сохранении простран-

ственного масштаба деформирующей функции l . Это утверждение справедливо при выполнении условия

$$\gamma_{eff} = \gamma n^{1/\alpha} \ll l, \quad (28)$$

когда для кумулянтов усеченного распределения Леви с характерным пространственным масштабом γ_{eff} справедливы выражения (16), (17), (18).

Из найденного равенства (27) элементарно следует известное свойство [4-6] усеченного полета Леви в режиме Леви зависимости вероятности возврата в исходную точку $W(0, n, \gamma)$ от числа шагов:

$$W(0, n, \gamma) = P_L(0, \gamma n^{1/\alpha}) = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi \alpha \gamma n^{1/\alpha}}. \quad (29)$$

Действительно, из (27) следует, что для усеченного полета Леви

$$W(0, n, \gamma) = W(0, 1, \gamma n^{1/\alpha}),$$

и при выполнении условия (28) влияние деформирующей функции на вероятность возврата в исходную точку есть величина второго порядка малости, и она равна вероятности возврата в исходную точку для невозмущенного распределения Леви (29).

6. Заключение

Решена задача нахождения кумулянтов усеченного распределения Леви при произвольном усечении исходного распределения Леви. Найдено, что характерной особенностью последовательности кумулянтов усеченного распределения Леви является зависимость порядка величины высших кумулянтных коэффициентов от их порядкового номера $\lambda_j \sim (l/\gamma)^{j/2-1}$.

Показано, что свойства гауссова режима усеченного полета Леви полностью зависят от двух кумулянтов распределения приращений: дисперсии и эксцесса. Исследована их

зависимость от формы усечения распределения Леви.

Для режима Леви установлено, что усеченный полет характеризуется полным набором кумулянтных функций. Также найдено свойство (27), состоящее в том, что одномоментное распределение вероятности n -го шага усеченного полета Леви совпадает с распределением вероятности, полученным из исходного усеченного распределения Леви изменением пространственного масштаба распределения Леви на величину $\gamma_{eff} = \gamma n^{1/\alpha}$, при сохранении пространственного масштаба деформирующей функции l .

Литература

- Rudnick J. A. and Gaspari G. D. Elements of the Random Walk: an Introduction for Advanced Students and Researchers. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 348 p.
- Mazo R. M. Brownian Motion: Fluctuations, Dynamics and Applications. – Oxford: Oxford University Press, 2002. – 304 p.
- Chechkin A. V., Gonchar V. Y., Klafter J. and Metzler R. Fundamentals of Lévy Flight Processes // Advances in Chemical Physics. – 2006. – Vol. 133B. – P. 439-496.
- Mantegna R. N. and Stanley H. E. An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance. – Cambridge: University Press, 2000. – 158 p.
Русский перевод: Мантенья Р. Н., Стенли Г. Ю. Введение в эконофизику. Корреляция и сложность в финансах. – М.: Либроком, 2009. – 192 с.
- Bouchaud J.-P. and Potters M. Theory of Financial Risk and Derivative Pricing. – Cambridge: University Press, 2000. – 400 p.
- Mantegna R. N. and Stanley H. E. Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: The Truncated Levy Flight // Phys. Rev. Lett. – 1994. – Vol. 73, No. 22. – P. 2946-2949.
- Koronen I. Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Levy Flights Towards the Gaussian Stochastic Process // Phys. Rev. E. – 1995. – Vol. 52, No. 1. – P. 1197-1199.
- Gupta H. M. and Campanha J. R. The Gradually Truncated Levy Flight: Stochastic Process for Complex Systems // Physica A. – 2000. – Vol. 275, Issue 3-4. – P. 531-543.
- Gupta H. M. and Campanha J. R. Tsallis statistics and gradually truncated Lévy flight–distribution of an economical index // Physica A. – 2002. – Vol. 309, Issue 3-4. – P. 381-387.
- Matsushita R., Rathie P. and Da Silva S. Exponentially Damped Levy Flights // Physica A. – 2003. – Vol. 326, Issue 3-4. – P. 544-555.
- Bruno R., Sorriso-Valvo L., Carbone V. and Bavasano B. A Possible Truncated Levy Flight Statistic Recovered from Interplanetary Solar Wind Velocity and Magnetic Field Fluctuations // Europhys. Lett. – 2004. – Vol. 66, No. 1. – P. 146-152.
- Gwinn C. R. Observations and Levy Statistics in Interstellar Scattering // Astron. Astrophys. Trans. – 2007. – Vol. 26, No. 6. – P. 525-533.
- Posnansky O., Huang R. and Shah N. J. The Truncated Levy Flight Process: Application to the Random Spin Phase Change in Non-linear Magnetic Fields // Physica A. – 2006. – Vol. 370, Issue 2. – P. 553-564.
- Hong S., Rhee I., Kim S. J., Lee K. and Chong S. Routing Performance Analysis of Human-Driven Delay Tolerant Networks Using the Truncated Levy Walk Model // Proc. 1st ACM SIGMOBILE Workshop on Mobility Models. – Hong Kong, Hong Kong (China). – 2008. – P. 25-32.
- Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. Радио, 1978. – 376 с.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. – М.: Мир, 1967. – 752 с.
- Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. – М.: Фазис, 1998. – 512 с.
- Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983 – 304с.
- Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. – М.: Наука, 1966 – 588 с.
- Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1977 – 832 с.
- Найфэ А. Метод возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
- Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: ГИФМЛ, 1959 – 470 с.

Кумулянтний опис довільним чином зрізаного польоту Леві

Д. В. Виноградов

Методом кумулянтного аналізу досліджено властивості довільним чином зрізаного польоту Леві. Знайдено послідовність кумулянтів, котра характеризує довільним чином зрізаний розподіл Леві, та визначено їх залежність від форми зрізання. Досліджено вплив форми зрізання на властивості гаусівського та Леві режимів процесу.

Cumulant Description of Arbitrarily Truncated Levy Flight

D. V. Vinogradov

Properties of arbitrary truncated Levy flight are investigated by the method of cumulant approach. The set of cumulants that characterizes an arbitrary truncated Levy distribution is found, their truncation shape dependence determined. The influence of truncation shape on the properties of Gaussian and Levy regimes of the process is investigated.