

## **Фокусировка излучения квазара в гравитационном поле микролинзы-звезды, находящейся в макролинзе-галактике.**

### **1. Построение решения на основе формулы Соболева**

Л. А. Бердина, А. А. Минаков

*Радиоастрономический институт НАН Украины,  
ул. Краснознаменная, 4, г. Харьков, 61002, Украина  
E-mail: laberdina@gmail.com*

*Статья поступила в редакцию 17 февраля 2010 г.*

Исследование эффекта микролинзирования является одним из актуальных направлений в решении задачи поиска темной материи во Вселенной. В первой части работы построено решение задачи анализа фокусировки излучения квазара, возникающего в гравитационном поле микролинзы-звезды, которая находится внутри макролинзы-галактики. Анализ эффекта проведен в рамках метода Соболева, который позволяет исследовать изменение фокусирующих свойств поля тяготения микролинзы в зависимости от ее положения в галактике.

#### **1. Введение**

В последнее время проблема поиска скрытой материи и темной энергии Вселенной приобрела чрезвычайную актуальность. Это связано с тем, что примерно 96 % всей материи Вселенной согласно современным представлениям находится в невидимой форме. Несмотря на то что скрытая материя практически не излучает во всем регистрируемом с поверхности Земли и с использованием космических аппаратов диапазоне длин волн электромагнитного излучения, ее можно выявить с помощью гравитационно-линзового эффекта. Действительно, скрытая материя обладает массой, которая создает вокруг себе поле тяготения. Согласно теории параметры электромагнитных и гравитационных волн, при их распространении в поле тяготения, претерпевают искажения. Меняются фаза (частота), амплитуда и поляризация волны. Изучение вносимых полем тяготения искажений позволяет сделать соответствующие выводы о присутствии тяготеющих масс на трассах распространения волн. В литературе влияние поля тяготения на проходящее сквозь него излучение источ-

ника получило название эффекта гравитационной линзы, или ГЛ эффекта (см., например, монографии [1, 2] и ссылки в них).

История наблюдений ГЛ началась в 1979 г., когда Д. Волш, Р. Карсвелл и Р. Вейман экспериментально обнаружили первую ГЛ – двойной квазар Q0957+561 А,В [3]. После обнаружения первой ГЛ широкое обсуждение получил вопрос об использовании эффекта фокусировки для поиска скрытой массы и изучения глобальной структуры Вселенной [4]. В конце 80-х гг. прошлого столетия Б. Пачинский предложил оригинальную схему эксперимента по наблюдению эффекта микролинзирования (ЭМЛ), возникающего в полях тяготения компактных небесных объектов Галактики [5]. В последствии на основе идеи Б. Пачинского были приняты и реализованы несколько международных программ по поиску темного вещества. Среди них можно указать на такие, как OGLE, MACHO, EROS и др. [6]. За продолжительное время наблюдений уже обнаружено достаточно большое количество событий ЭМЛ. Анализ полученных данных и проведенные оценки позволили предположить, что ЭМЛ в галактиках создают преимуществен-

но объекты с массами намного меньшими солнечной, например, такие, как коричневые, белые карлики, звезды на ранних стадиях формирования, а также маломассивные черные дыры [6].

Анализ ЭМЛ в далеко отстоящих от нас галактиках проводят, как правило, в приближении бесконечно тонкого плоского фазового корректора (экрана). Суммарное действие полей тяготения микролинзы-звезды и всей галактики в целом на проходящее сквозь них электромагнитное излучение далекого источника учитывается введением двух независимых фазовых корректоров (экранов). Первый экран совмещен с микролинзой-звездой, а второй – с плоскостью, проходящей через центр масс макролинзы-галактики. При этом часто, для упрощения вычислений, считается, что два корректора можно совместить в один, который совпадает с плоскостью, проходящей через центр масс галактики [1, 2]. В данном приближении, однако, абсолютно не учитывается эффект влияния глобальной структуры системы лучей, возникающей в поле тяготения макролинзы-галактики, на “локальную” фокусировку излучения в поле тяготения микролинзы-звезды. Наличие разномасштабности в фокусирующих свойствах систем с кардинально различающимися пространственными размерами может приводить к эффектам, которые не удастся отследить в приближении совмещенных фазовых экранов.

В настоящей работе рассматривается эффект фокусировки, возникающий в гравитационном поле микролинзы-звезды, произвольно расположенной в макролинзе-галактике. В предлагаемой первой части работы на основе метода Соболева [7] в приближении параксиальной оптики построено решение для определения энергетических характеристик поля электромагнитной волны в точке наблюдения, при нахождении микролинзы-звезды на участке трассы между источником излучения – квазаром, и макролинзой-галактикой. Полученные результаты обобщают известное в радиоастрономии и теории ГЛ приближение многослойного фазового экрана [2, 8] на случай, когда между экранами имеются еще и неоднородности среды.

## 2. Метод фазового экрана

Вначале кратко опишем стандартный метод анализа эффекта гравитационной фокусировки в поле тяготения, затем укажем на его недостатки применительно к рассматриваемой задаче и, наконец, проведем обобщение полученных формул на случай неоднородностей среды с кардинально отличающимися пространственными масштабами. Анализ эффекта фокусировки в поле тяготения изолированной массы, как правило, проводят, используя некоторые упрощения и приближения [1, 2], среди которых в первую очередь можно отметить следующие. Учитывая, что в слабых гравитационных полях, создаваемых реальными космическими объектами, углы рефракции лучей чрезвычайно малы ( $\sim 1''$ ), линзовый эффект рассматривают в приближении параксиальной оптики. Кроме того, если источник, линза и наблюдатель находятся в пределах “небольшой” по космологическим масштабам области, то пространство-время можно приближенно считать локально плоским. Заметим, что обобщение задачи на случай космологических расстояний осуществляется формальной заменой обычных расстояний на расстояния, измеряемые по угловому диаметру [2].

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в поле тяготения скопления, состоящего из микролинз-звезд. Условиям наблюдения более всего удовлетворяет система отсчета, представленная на рис. 1. Ось  $Oz$  соединяет точку наблюдения  $P$  с центром масс галактики-линзы  $O$ , с которым совмещено начало декартовой системы координат  $x, y, z$ . Направления осей  $Ox$  и  $Oy$  выбраны произвольно. Источник излучения  $S$  находится на удалении  $z = -Z_s$ , позади гравитирующей галактики. Распространение электромагнитных волн в поле тяготения с произвольной метрикой формально можно записать в виде стандартных уравнений Максвелла в плоском пространстве-времени, но в присутствии некоторой эффективной макроскопической “среды”. Для слабого поля тяготения, создаваемого медленно вращающимся изолированным телом, показатель преломления среды  $n_{ef}$  в произвольной точке пространства

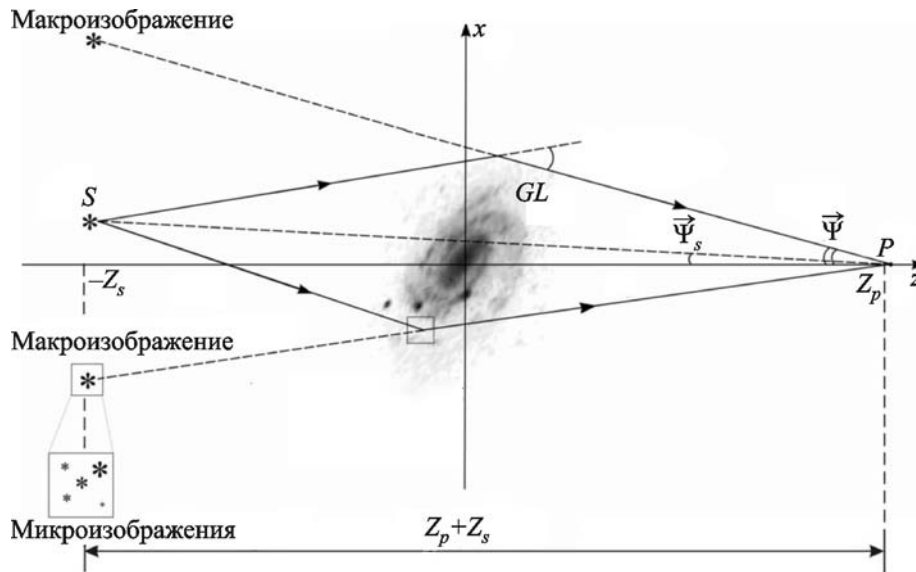


Рис. 1. Гравитационно-линзовая система

$\vec{R} = (x, y, z)$  приближенно представляется так [1]:  $n_{ef}(\vec{R}) = 1 - 2\Phi(\vec{R})/c^2$ . Данное представление справедливо в приближении слабого потенциала тяготения  $\Phi$  ( $|\Phi|/c^2 \ll 1$ ,  $c$  – скорость света в свободном пространстве) и пренебрежении эффектом Лензе–Тирринга, связанного с увлечением окружающего пространства-времени во вращение [1]. Для гармонического колебания с частотой  $\omega$ , когда зависимость от времени  $t$  искомого поля  $U$  может быть представлена в виде  $U(\vec{R}, t) = U(\vec{R})e^{i\omega t}$ , величина  $U(\vec{R})$  находится из решения уравнения Гельмгольца:

$$\Delta_{\vec{R}} U(\vec{R}) + k^2 n_{ef}^2(\vec{R}) U(\vec{R}) = F_s(\vec{R}). \quad (1)$$

Здесь  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина электромагнитной волны в вакууме, а функция  $F_s(\vec{R})$  описывает поле источников. В дальнейшем при описании поля  $U(\vec{R})$  удобней пользоваться цилиндрическими координатами  $\vec{R} = (z, \vec{p})$ , где  $\vec{p} = (x, y)$ . При анализе уравнения (1) пользуются различными приближенными решениями. Среди них наибольшее распространение получил метод фазового экрана (МФЭ) [1, 2], суть которого заключается в следующем. Пусть в плос-

кости  $z = -Z_s$  задано распределение поля  $U_s(\vec{p}_s)$  протяженного источника излучения  $S$ . Считается, что в промежутке между источником и экраном ( $-Z_s \leq z < 0$ ) волна распространяется в свободном пространстве. После прохождения фазового корректора  $\Sigma$ , совмещенного с плоскостью  $z = 0$ , волна приобретает дополнительный набег фазы  $k\phi_\Sigma$ , после чего снова распространяется в правое свободное пространство ( $z > 0$ ). Согласно принципу Гюйгенса–Френеля [9] искомое поле  $U_p(Z_p, \vec{p}_p)$  в точке наблюдения  $P = (z = Z_p, \vec{p}_p)$  определяется как суперпозиция волн от всех элементов поверхностей источника излучения  $\Sigma_s$  и фазового экрана  $\Sigma$  [1]:

$$U_p(Z_p, \vec{p}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_s} d\vec{p}_s U_s(\vec{p}_s) \times \int_{\Sigma} \frac{d\vec{p}}{R_s(\vec{p}_s, \vec{p}) R_p(\vec{p}, \vec{p}_p)} \times \exp\left\{ik \left[ R_s(\vec{p}_s, \vec{p}) + R_p(\vec{p}, \vec{p}_p) + \phi_\Sigma \right]\right\}. \quad (2)$$

Здесь  $R_{p,s}(\vec{p}_{p,s}, \vec{p}) = \sqrt{Z_{p,s}^2 + (\vec{p} - \vec{p}_{p,s})^2}$  – расстояния между точкой наблюдения

$P(z = Z_p, \vec{p} = \vec{p}_p)$ , элементом поверхности  $d\vec{p}_s$  источника излучения  $S$ , расположенного в точке  $(z = -Z_s, \vec{p} = \vec{p}_s)$ , и произвольной точкой экрана  $(z = 0, \vec{p})$  соответственно. В приближениях параксиальной оптики и достаточно коротких длин волн наибольший вклад в величину  $U_p(Z_p, \vec{p}_p)$  дают лишь небольшие участки плоскостей  $z = -Z_s$  и  $z = 0$ , удовлетворяющие неравенству  $(\vec{p} - \vec{p}_s)^2 / Z_{p,s}^2 \ll 1$ . С учетом этого, с одной стороны, можно воспользоваться приближенными представлениями  $R_{p,s}(\vec{p}_{p,s}, \vec{p}) \approx Z_{p,s} + (\vec{p} - \vec{p}_{p,s})^2 / 2Z_{p,s}$ , а с другой – дополнительный набег фазы на экране  $k\varphi_\Sigma$ , возникающий при распространении волны в поле тяготения изолированного тела, вычислять путем интегрирования малой добавки  $-2\Phi(\vec{R})/c^2$  в функции  $n_{ef}(\vec{R})$  вдоль прямолинейных лучей, параллельных оси  $Oz$  [1]:

$$k\varphi_\Sigma = k\varphi_\Sigma(\vec{p}) = -\frac{2k}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \Phi(z, \vec{p}). \quad (3)$$

После проделанных упрощений формула (2) принимает вид

$$U_p(Z_p, \vec{p}_p) \approx \frac{ke^{ik(Z_s+Z_p)}}{2\pi i Z_s Z_p} \int_{\Sigma_s} d\vec{p}_s U_s(\vec{p}_s) \times \int_{\Sigma} d\vec{p} \exp \left\{ ik \left[ \frac{(\vec{p}_s - \vec{p})^2}{2Z_s} + \frac{(\vec{p}_p - \vec{p})^2}{2Z_p} + \varphi_\Sigma(\vec{p}) \right] \right\}. \quad (4)$$

С помощью интегрального представления (4) для изолированного в пространстве тела в достаточно простой форме удастся провести анализ эффекта гравитационной фокусировки в широком диапазоне длин волн с учетом влияния различных как регулярных, так и случайных факторов. Основным требованием применения МФЭ является условие: в пределах неоднородностей среды, заменяемых на бесконечно тонкий фазовый корректор  $\Sigma$ , не должно быть пересечений лучей. К сожалению, при рассмотрении такой сложной системы, как компактная микролинза-звезда, расположенная

внутри протяженной макролинзы-галактики, требование отсутствия пересечений лучей для совокупной “неоднородности” в общем случае не выполняется. Действительно, характерный размер области фокусировки микролинзы-звезды, подобной Солнцу, можно оценить как  $10^{-2}$  пк, в то время как линейный размер самой макролинзы-галактики приближенно равен  $10^2$  кпк. Это означает, что внутри “большой” линзы вдоль луча зрения может находиться достаточно большое количество “маленьких” линз и необходимо учитывать кардинальные различия пространственных масштабов областей фокусировок неоднородностей.

Если для каждой из линз по отдельности МФЭ применим, то при описании их совокупного действия возникает ряд трудностей. Для решения задачи в этом случае часто прибегают к всевозможным дополнительным упрощениям. Например, принцип суперпозиции для слабых полей тяготения ( $\Phi_\Sigma(\vec{R}) = \sum \Phi_j(\vec{R})$ , где  $\Phi_j(\vec{R})$  – гравитационное поле, создаваемое  $j$ -м телом) согласно формуле (3) переносят и на суммарную фазу волны ( $k\varphi_\Sigma(\vec{p}) = k \sum \varphi_{\Sigma_j}(\vec{p})$ ), прошедшей через галактику [1, 2]. После этого анализ формально проводят по формуле (4) с дополнительной фазой на экране в виде  $k\varphi_\Sigma(\vec{p}) = k \sum \varphi_{\Sigma_j}(\vec{p})$ . В принципе для не очень плотных звездных областей в галактике решение задачи можно было бы строить подобным образом, т. е. совместив все “микроэкраны” в один, плоскость которого совпадает с плоскостью макроэкрана ( $z = 0$ ). Однако, для “густонаселенных” областей звезд данное приближение приводит к ошибкам, так как остаются невыясненными вопросы о взаимодействии линз с разными масштабами фокусировки.

Существует еще один, но более трудоемкий, способ вычисления, когда учитывается пространственный разнос “микроэкранов”. В этом приближении для каждой микролинзы, расположенной в плоскости  $z = Z_j$ , согласно (3) вычисляется свой набег фазы  $k\varphi_{\Sigma_j}(Z_j, \vec{p}_j)$ . После этого, используя интегральное представление (4), последовательно переносят решение с экрана на экран. Эта процедура часто используется и в радиофизи-

ке, где получила название многослойного экрана [8]. Построение решения в рамках такого подхода, однако, также наталкивается на вычислительные трудности, связанные с учетом влияния крупномасштабного поля тяготения всей галактики. Для анализа эффекта фокусировки в линзовых системах с разными пространственными масштабами мы использовали метод Соболева [7], с помощью которого удалось построить “обобщенный” вариант МФЭ.

### 3. Формула Соболева

Вначале кратко опишем основной алгоритм получения формулы Соболева, а затем применим ее к решению поставленной задачи. Рассмотрим однородное волновое уравнение, записанное для неизменяющейся во времени среды с показателем преломления  $n(\vec{R})$ :

$$\Delta_{\vec{R}} U(\vec{R}, t) - \frac{n^2(\vec{R})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\vec{R}, t) = 0. \quad (5)$$

Выберем произвольную точку пространства  $\vec{R} = (z, y, z)$  и окружим ее замкнутой поверхностью  $\Xi$ . Для построения решения Соболев вводит в рассмотрение две вспомогательные функции  $\varphi(\vec{R}', \vec{R})$  и  $\sigma(\vec{R}', \vec{R})$ , которые находятся из решений системы двух уравнений:

$$\left[ \nabla_{\vec{R}} \varphi(\vec{R}, \vec{R}') \right]^2 = n^2(\vec{R}), \quad (6a)$$

$$2 \nabla_{\vec{R}} \sigma(\vec{R}, \vec{R}') \nabla_{\vec{R}} \varphi(\vec{R}, \vec{R}') + \sigma(\vec{R}, \vec{R}') \Delta_{\vec{R}} \varphi(\vec{R}, \vec{R}') = 0. \quad (6b)$$

По своей сути введенные функции являются не чем иным, как эйконалом  $\varphi(\vec{R}', \vec{R})$  и амплитудой  $\sigma(\vec{R}', \vec{R})$ , получаемым из хорошо известного приближения геометрической оптики [10]. С помощью найденных из (6)  $\varphi$  и  $\sigma$  волновое уравнение (5) может быть преобразовано в следующее интегральное уравнение [7]:

$$U(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Xi} \left\{ \sigma \left[ \frac{\partial U}{\partial N} \right] - [U] \frac{\partial \sigma}{\partial N} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial N} \left[ \frac{\partial U}{\partial t} \right] \right\} d\vec{R}' + \frac{1}{4\pi} \int_V [U] \Delta_{\vec{R}} \sigma d\vec{R}'. \quad (7)$$

Здесь в объемном интеграле в зависимости  $\Delta_{\vec{R}} \sigma$  исключается из рассмотрения точка  $\vec{R}' = \vec{R}$ , а через  $[U]$ ,  $[\partial U / \partial t]$  и  $[\partial U / \partial N]$  обозначены запаздывающие значения соответствующих функций и их производных ( $N$  – внешняя нормаль к поверхности  $\Xi$ ), например,  $[U(\vec{R}, t)] = U(\vec{R}, t - \varphi/c)$ . Для гармонического колебания, когда  $U(\vec{R}, t) = U(\vec{R}) e^{i\omega t}$ , формула Соболева (7) упрощается и принимает вид

$$U(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Xi} \left\{ \sigma(\vec{R}, \vec{R}') \frac{\partial U(\vec{R}')}{\partial N} - U(\vec{R}') \left[ \frac{\partial \sigma(\vec{R}, \vec{R}')}{\partial N} - ik \sigma(\vec{R}, \vec{R}') \frac{\partial \varphi(\vec{R}, \vec{R}')}{\partial N} \right] \right\} \times e^{ik\varphi(\vec{R}, \vec{R}')} d\vec{R}' + \frac{1}{4\pi} \int_V U(\vec{R}') e^{ik\varphi(\vec{R}, \vec{R}')} \Delta_{\vec{R}} \sigma(\vec{R}, \vec{R}') d\vec{R}'.$$

Если в данном выражении ввести обозначение

$$G(\vec{R}, \vec{R}') = \sigma(\vec{R}, \vec{R}') e^{ik\varphi(\vec{R}, \vec{R}')}, \quad (8)$$

то интеграл по замкнутой поверхности записывается в компактном виде, и мы получаем следующее интегральное представление для искомого поля:

$$U(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \times \oint_{\Xi} \left\{ G(\vec{R}, \vec{R}') \frac{\partial U(\vec{R}')}{\partial N} - U(\vec{R}') \frac{\partial G(\vec{R}, \vec{R}')}{\partial N} \right\} d\vec{R}' + \frac{1}{4\pi} \int_V U(\vec{R}') e^{ik\varphi(\vec{R}, \vec{R}')} \Delta_{\vec{R}} \sigma(\vec{R}', \vec{R}) d\vec{R}'. \quad (9)$$

Заметим, что введенную выше функцию  $G(\vec{R}, \vec{R}')$  можно условно рассматривать как функцию Грина для уравнения (5). Сравним теперь формулу Соболева (9) с известным решением Кирхгофа [7] для однородной среды. Видно, что так же, как и в формуле Кирхгофа, поле  $U$  в произвольной точке  $\vec{R}$  внутри замкнутого объема  $V$  определяется своими значениями  $U$  и  $\partial U/\partial N$  на замкнутой поверхности  $\Xi$ . Однако в (9), кроме поверхностного интеграла, имеется еще и интеграл по объему  $V$ , которого нет в формуле Кирхгофа. Этот факт говорит о том, что в случае неоднородной среды поле  $U(\vec{R})$  определяется не только значениями  $U$  и  $\partial U/\partial N$ , задаваемыми на поверхности  $\Xi$ , но и полями, приходящими от всех внутренних точек объема  $V$ . Уравнение (9) в этом случае необходимо рассматривать как требующее своего решения интегральное уравнение.

#### 4. Приближенное нахождение функций $\varphi$ и $\sigma$

Известно, что эйконал  $\varphi$  и амплитуда  $\sigma$  могут быть вычислены, если известны характеристики-лучи  $\vec{R}(s)$  уравнения типа Гамильтона–Якоби (6а), на которых функционал  $\int n(\vec{R})ds$  принимает минимальные значения (принцип Ферма) [10]. Здесь  $s$  – длина пути, отсчитываемая вдоль луча, соединяющего точки  $\vec{R}$  и  $\vec{R}'$ . Если нам удастся для заданного распределения показателя преломления  $n(\vec{R})$  найти характеристики  $\vec{R}(s)$ , то уравнения (6) могут быть проинтегрированы в явном виде [10]:

$$\varphi(\vec{R}, \vec{R}') = \int_{\vec{R}}^{\vec{R}'} n ds, \quad (10a)$$

$$\sigma(\vec{R}, \vec{R}') = \tilde{\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\vec{R}}^{\vec{R}'} \frac{\Delta \varphi}{n} ds \right\}. \quad (10б)$$

Интегрирование в данных формулах ведется вдоль криволинейного луча  $\vec{R}(s)$ , соединяю-

щего точки  $\vec{R}$  и  $\vec{R}'$ , а через  $\tilde{\sigma}$  обозначено значение амплитуды волны в точке  $\vec{R}' = \vec{R}$ .

С помощью введенных определений несложно показать, что для однородной среды из формулы Соболева (9) легко получается решение Кирхгофа. Действительно, для среды с  $n = \text{const}$ , характеристики-лучи представляют собой прямые, соединяющие точки  $\vec{R}$  и  $\vec{R}'$ . При этом согласно (10) получаем  $\varphi = n|\vec{R} - \vec{R}'|$ ,  $\Delta_{\vec{R}}\varphi = 2n/|\vec{R} - \vec{R}'|$ ,  $\sigma(\vec{R}, \vec{R}') = \sigma_0(\vec{R}, \vec{R}') = \tilde{\sigma}/|\vec{R} - \vec{R}'|$ . В результате, с учетом исключения из рассмотрения точки  $\vec{R} = \vec{R}'$ , имеем  $\Delta_{\vec{R}}\sigma_0(\vec{R}, \vec{R}') = 0$ , интеграл по объему  $V$  в формуле (9) исчезает и получается классическая формула Кирхгофа.

Прежде чем проводить дальнейшие вычисления, следует отметить, что, несмотря на некоторое обобщение результатов, формула Соболева имеет один существенный недостаток. Он связан с тем, что в найденных представлениях эйконала и амплитуды (10) не допускаются случаи, когда две произвольные точки пространства  $\vec{R}$  и  $\vec{R}'$  внутри объема соединяются несколькими характеристиками-лучами. При наличии многолучевости возникает неопределенность в определениях значений  $\varphi$  и  $\sigma$ .

Применим теперь представление (9) к решению поставленной задачи. Вначале, воспользовавшись отмеченными выше свойствами исследуемых объектов, упростим выражение для функции Грина. С учетом малости углов рефракции эйконал в (10а) может быть вычислен в линейном приближении геометрической оптики [10], т. е. путем интегрирования показателя преломления  $n(\vec{R})$  вдоль невозмущенного прямолинейного луча  $\vec{R}(s) \approx \vec{R}_0(s)$ , соединяющего точки  $\vec{R}$  и  $\vec{R}'$ . Кроме этого, можно также считать, что в пределах небольшой области пространства структура лучевых трубок, исходящих из точки “наблюдения”  $\vec{R}$  мало отличается от той, которая наблюдалась бы в свободном пространстве. Это означает, что амплитуда  $\sigma(\vec{R}, \vec{R}')$  в (10б) приближенно может быть определена как  $\sigma(\vec{R}, \vec{R}') \approx \sigma_0(\vec{R}, \vec{R}') = \tilde{\sigma}/|\vec{R} - \vec{R}'|$ . В рамках данного упрощения имеем  $\Delta_{\vec{R}}\sigma(\vec{R}, \vec{R}') \approx \Delta_{\vec{R}}\sigma_0(\vec{R}, \vec{R}') \equiv 0$ , объемный интеграл в (9) исчезает, а функция Грина (8) принимает вид

$$G(\vec{R}, \vec{R}') \approx G_0(\vec{R}, \vec{R}') = \tilde{\sigma} e^{ik\varphi(\vec{R}, \vec{R}')}/|\vec{R} - \vec{R}'|. \quad (11)$$

По поводу найденных приближенных формул заметим следующее. С одной стороны, в задачах рассеяния частиц в квантовой механике представление (11) известно как малугловое квазиклассическое приближение функции Грина. Оно справедливо при условии, что энергия падающей частицы намного превосходит потенциал рассеяния [11, 12]. С другой – при слабой рефракции лучей отличие амплитуды  $\sigma(\vec{R}, \vec{R}')$  от  $\sigma_0(\vec{R}, \vec{R}')$  приводит к незначительной поправке к величине объемного интеграла в (9) [13], которой практически можно пренебречь. Несложно также показать, что найденную функцию  $G_0(\vec{R}, \vec{R}')$  можно рассматривать как некую модификацию функции Грина на случай неоднородной среды, приближенно удовлетворяющей уравнению

$$\Delta_{\vec{R}} G_0(\vec{R}, \vec{R}') + k^2 n^2(\vec{R}) G_0(\vec{R}, \vec{R}') = -4\pi\delta(\vec{R} - \vec{R}').$$

Подводя итог выполненным преобразованиям и упрощениям, запишем формулу Соболева (9) в окончательном виде:

$$U(\vec{R}) \approx \frac{1}{4\pi} \oint_{\Xi} \left\{ G_0(\vec{R}, \vec{R}') \frac{\partial U(\vec{R}')}{\partial N} - U(\vec{R}') \frac{\partial G_0(\vec{R}, \vec{R}')}{\partial N} \right\} d\vec{R}'. \quad (12)$$

Формула (12) позволяет нам связать поле  $U(\vec{R}')$  и его нормальную производную  $\partial U(\vec{R}')/\partial N$ , заданные на замкнутой поверхности  $\Xi$ , с искомым полем  $U(\vec{R})$  в точке наблюдения. Для дальнейших вычислений, однако, удобнее провести в (12) еще одно упрощающее преобразование. Следуя стандартной процедуре построения решения в виде принципа Гюйгенса–Френеля [9], охватывающую наблюдателя поверхность  $\Xi$  представим в виде суммы части плоскости  $\Sigma$  (экрана)

и замыкающей объем полусферы  $\Sigma_a$  большого радиуса  $a$ . Затем, устремляя  $a \rightarrow \infty$  и используя принцип излучения на бесконечности, после несложных преобразований можно получить следующее приближенное решение задачи:

$$U(\vec{R}) \approx \frac{k\tilde{\sigma}}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{d\vec{R}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} U(\vec{R}') \exp\{ik\varphi(\vec{R}, \vec{R}')\}. \quad (13)$$

Согласно (13) искомое поле  $U(\vec{R})$  так же, как и в классическом варианте принципа Гюйгенса–Френеля, представляет собой суперпозицию почти сферических волн, приходящих в точку наблюдения от всех точек плоского экрана  $\Sigma$ . Однако с учетом того, что между экраном и точкой наблюдения находится среда, волны собираются с фазами, равными  $k\varphi(\vec{R}, \vec{R}')$ , а не  $k|\vec{R} - \vec{R}'|$ , как для свободного пространства. Заметим также, что по своей структуре (13) совпадает с известным в радиофизике как “обобщенный принцип Гюйгенса–Френеля” приближением [14].

## 5. Функция взаимной когерентности

Рассмотрим вопрос о нахождении характеристик электромагнитного излучения в точке наблюдения  $P$  после прохождения волны через сложную систему макро- плюс микролинзы при условии, что микролинза расположена в промежутке между макролинзой и источником излучения (рис. 2). Всю трассу распространения сигнала разобьем на отдельные участки, заключенные между плоскостями:  $z = -Z_s$  (плоскость источника),  $z = -Z_m$  (плоскость микролинзы),  $z = 0$  (плоскость макролинзы) и  $z = Z_p$  (плоскость наблюдения). Несложно показать, что при таком разбиении произвольные точка (“источник”) в одной плоскости и точка (“наблюдатель”) в другой могут быть соединены между собой лишь одной единственной характеристикой-лучом. Другими словами, на участках трассы, лежащих между соседними плоскостями, не возникает эффекта многолуче-

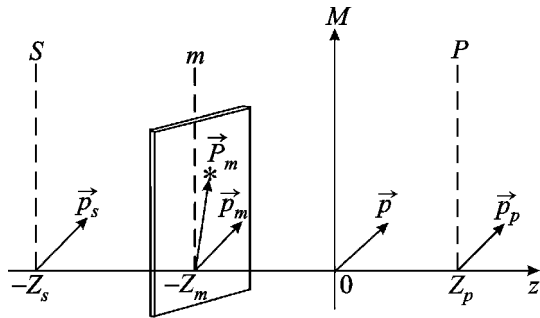


Рис. 2. Схема разбиения пространства между источником излучения и наблюдателем

ности, и можно пользоваться формулой (13). При этом искомые характеристики излучения в точке наблюдения можно получить, последовательно перенося решения с плоскости на плоскость. Следует, однако, заметить, что удобней переносить с плоскости на плоскость не поле волны  $U(Z, \vec{p})$ , а так называемую функцию взаимной когерентности (ФВК), которая по определению равна средней по ансамблю реализаций величине произведения полей в разнесенных точках одной и той же плоскости [10]:  $\Gamma(Z; \vec{p}', \vec{p}'') = \langle U(Z, \vec{p}') U^*(Z, \vec{p}'') \rangle$  (здесь  $\langle \rangle$  означает операцию усреднения).

Пусть в плоскости  $z = Z_1$  задано распределение поля  $U_1(Z_1, \vec{p}_1)$  (см. рис. 3). Необходимо определить значение  $U_2(Z_2, \vec{p}_2)$  в произвольной точке плоскости  $z = Z_2$ . При построении решения считаем, что точки  $(Z_1, \vec{p}_1)$

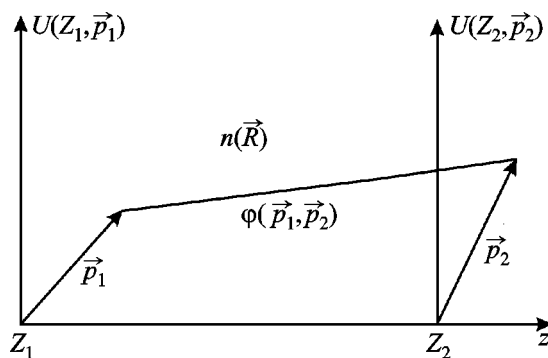


Рис. 3. Перенос решения с плоскости на плоскость

и  $(Z_2, \vec{p}_2)$  соединяются одной-единственной характеристикой-лучом и рефракция лучей мала. Согласно формуле (13) в приближении параксиальной оптики получаем выражение

$$U_2(Z_2, \vec{p}_2) = \frac{k}{2\pi i(Z_2 - Z_1)} \times \int U_1(Z_1, \vec{p}_1) \exp\{ik\phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2)\} d\vec{p}_1. \quad (14)$$

С помощью (14) построим ФВК в плоскости  $z = Z_2$ :

$$\Gamma(Z_2; \vec{p}'_2, \vec{p}''_2) = \langle U_2(Z_2, \vec{p}'_2) U_2^*(Z_2, \vec{p}''_2) \rangle \approx \frac{k^2}{4\pi^2(Z_2 - Z_1)^2} \iint d\vec{p}'_1 d\vec{p}''_1 \Gamma(Z_1; \vec{p}'_1, \vec{p}''_1) \times \exp\{ik[\phi(\vec{p}'_1, \vec{p}'_2) - \phi(\vec{p}''_1, \vec{p}''_2)]\}. \quad (15)$$

Здесь через  $\Gamma(Z_1; \vec{p}'_1, \vec{p}''_1) = \langle U_1(Z_1, \vec{p}'_1) U_1^*(Z_1, \vec{p}''_1) \rangle$ , обозначена ФВК в плоскости  $z = Z_1$ . По поводу (15) заметим следующее. Во-первых, в рассматриваемой задаче считается, что поля тяготения галактики и микролинзы заданы. Поэтому эйконалы являются функциями регулярными и усреднению не подлежат. Во-вторых, согласно определению в совмещенных точках ФВК совпадает со средней интенсивностью  $\langle I(Z; \vec{p}) \rangle = \langle U(Z, \vec{p}) U^*(Z, \vec{p}) \rangle$ . В-третьих, с учетом малости улов рефракции лучей вычисление эйконала  $\phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$  можно провести в линейном приближении геометрической оптики [10], т. е. интегрируя показатель преломления среды  $n(\vec{R})$  в (10а) вдоль невозмущенного прямолинейного луча. Записав его уравнение в виде  $\vec{p}(z) = \vec{p}_1 + (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)(z - Z_1)/(Z_2 - Z_1)$ , находим

$$\phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \int_{Z_1}^{Z_2} n[z, \vec{p}(z)] \sqrt{1 + (d\vec{p}(z)/dz)^2} dz. \quad (16)$$



## 6. Участок трассы $-Z_s \leq z \leq -Z_m$

Для первого участка трассы в формулах (15), (16) согласно рис. 2 мы должны положить  $Z_1 = -Z_s$ ,  $\vec{p}_1 = \vec{p}_s$  и  $Z_2 = -Z_m$ ,  $\vec{p}_2 = \vec{p}_m$ . При этом в качестве исходной выступает ФВК в плоскости источника излучения  $\Gamma(Z_1; \vec{p}'_1, \vec{p}''_1) = \Gamma(-Z_s; \vec{p}'_s, \vec{p}''_s) = \langle U_s(-Z_s, \vec{p}'_s) U_s^*(-Z_s, \vec{p}''_s) \rangle$ . При нахождении эйконала  $\varphi(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$  в формуле (16) мы должны определить эффективный показатель преломления  $n_{ef}(\vec{R})$  в промежутке между плоскостями  $z = -Z_s$  и  $z = -Z_m$ . Строго говоря, мы могли бы, используя принцип суперпозиции потенциалов тяготения галактики  $\Phi_G(\vec{R})$  и микролинзы  $\Phi_m(\vec{R})$ , записать выражение для суммарного показателя преломления как  $n_{ef}(\vec{R}) = 1 - 2\Phi_G(\vec{R})/c^2 - 2\Phi_m(\vec{R})/c^2$  и далее проводить вычисления  $\varphi(\vec{p}_s, \vec{p}_m)$  по формуле (16). Однако с учетом различий в размерах областей фокусировки макро- и микролинз можно воспользоваться еще одним вполне допустимым упрощением. При расчете  $\varphi(\vec{p}_s, \vec{p}_m)$  можно ограничиться рассмотрением только поля тяготения массивной галактики, т. е. считать, что

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{p}_s, \vec{p}_m) &\approx \varphi_G(\vec{p}_s, \vec{p}_m) = \\ &= \int_{-Z_s}^{-Z_m} \left[ 1 - \frac{1}{2c^2} \Phi_G \left( z, \vec{p}_s + \frac{\vec{p}_m - \vec{p}_s}{Z_s - Z_m} (z + Z_s) \right) \right] \times \\ &\times \sqrt{1 + (\vec{p}_m - \vec{p}_s)^2 / (Z_s - Z_m)^2} dz. \end{aligned} \quad (17)$$

В результате на “входе” экрана с микролинзой,  $z = -Z_m$  ( $z = -Z_m - 0$ ), имеем следующее распределение ФВК:

$$\begin{aligned} \Gamma(-Z_m - 0; \vec{p}'_m, \vec{p}''_m) &= \frac{k^2}{4\pi^2 (Z_s - Z_m)^2} \times \\ &\times \iint d\vec{p}'_s d\vec{p}''_s \Gamma(-Z_s; \vec{p}'_s, \vec{p}''_s) \times \\ &\times \exp\{ik[\varphi_G(\vec{p}'_s, \vec{p}'_m) - \varphi_G(\vec{p}''_s, \vec{p}''_m)]\}. \end{aligned}$$

Фокусирующее действие гравитационного поля микролинзы в данном рассмотрении учтем в приближении “тонкого” фазового кор-

ректора (“микрокорректора”), совмещенного с плоскостью  $z = -Z_m$  (см. рис. 2). При этом на выходе из “микрокорректора” ФВК представляется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(-Z_m + 0; \vec{p}'_m, \vec{p}''_m) &= \\ &= \Gamma(-Z_m - 0; \vec{p}'_m, \vec{p}''_m) f_m(\vec{p}'_m, \vec{p}''_m), \end{aligned} \quad (18)$$

где через  $f_m(\vec{p}'_m, \vec{p}''_m)$  обозначена функция пропускания “микрокорректора”.

Прежде чем переходить к следующему этапу вычислений, несколько слов скажем о модельных представлениях источника излучения, микролинзы-звезды и макролинзы-галактики. Для облегчения анализа и получения конкретных количественных оценок будем задавать модели в максимально упрощенном виде.

### Модельные представления

Источник, как правило, задают в виде некогерентно излучающих элементов его поверхности. В этом случае ФВК в плоскости  $z = -Z_s$  представляется так:  $\Gamma(-Z_s; \vec{p}'_s, \vec{p}''_s) = a I_s(\vec{p}'_s) \delta(\vec{p}'_s - \vec{p}''_s)$ , где  $I_s(\vec{p}_s)$  – детерминированный модельный закон распределения средней интенсивности излучения,  $a$  – нормирующий размерный множитель, значение которого будет определено ниже. В дальнейших расчетах будем рассматривать гауссов закон:

$$I_s(\vec{p}_s) = \frac{I_0}{2\pi R_s^2} \exp\left\{-\frac{(\vec{p}_s - \vec{P}_s)^2}{2R_s^2}\right\}, \quad (19)$$

где  $I_0$  – интегральная интенсивность излучения,  $\vec{P}_s$  – величина смещения центра яркости, а  $R_s$  – эффективный радиус источника.

Функцию пропускания микроэкрана  $f_m(\vec{p}'_m, \vec{p}''_m)$  определим из следующих простых рассуждений. Будем считать, что микролинза образована полем тяготения сферической массы  $M_m$  (модель “точечной” массы), центр которой смещен в плоскости  $z = -Z_m$  от оси  $OZ$  на незначительное расстояние  $\vec{P}_m$  ( $P_m/(Z_s - Z_m) \ll 1$ ). Учитывая далее, что влияние поля тяготения микролинзы-звезды происходит в пределах небольшой, по сравнению

с размерами галактики, области пространства, функцию пропускания можно представить так:  $f_m(\vec{p}'_m, \vec{p}''_m) \approx \exp\{ik[\varphi_m(\vec{p}'_m) - \varphi_m(\vec{p}''_m)]\}$ , где эйконал  $\varphi_m(\vec{p}_m)$  определяется для "среды" с показателем преломления  $n_m(\vec{R}) = n_m(z, \vec{p}) = 1 + r_g / \sqrt{(z + Z_m)^2 + (\vec{p} - \vec{P}_m)^2}$ , ( $r_g = 2GM_m/c^2$  – гравитационный радиус микролинзы). В приближении параксиальной оптики интегрирование в (16) можно проводить вдоль прямых лучей, параллельных оси  $Oz$ . В результате, после несложных вычислений получаем, что  $\varphi_m(\vec{P}_m) = -2r_g \ln(|\vec{p}_m - \vec{P}_m|/p_0)$ , где  $p_0$  произвольный прицельный параметр луча [1]. Функция пропускания "микрокорректора" при этом равна

$$f_m(\vec{p}'_m, \vec{p}''_m) = \exp\left\{-2ikr_g \ln \left| \frac{\vec{p}'_m - \vec{P}_m}{\vec{p}''_m - \vec{P}_m} \right| \right\}.$$

Будем также считать, что и макролинзу можно приближенно аппроксимировать моделью достаточно компактного сферически симметричного распределения, имеющего полную массу  $M_G \gg M_m$ . Внешнее поле тяготения галактики для данной модели будет иметь такой же вид, как и для "точечной" массы  $M_G$ , а показатель преломления галактической "среды"  $n_G(\vec{R})$  в цилиндрических координатах  $\vec{R} = (z, \vec{p})$  равен  $n_G(\vec{R}) = 1 + r_G / \sqrt{z^2 + p^2}$ , где  $r_G = 2GM_G/c^2$  – гравитационный радиус всей галактики. Для заданного распределения  $n_G(\vec{R})$  по формуле (16) вычислим  $\varphi_G(\vec{R}, \vec{R}')$  для участка трассы, заключенного между плоскостями  $z = Z_1$  и  $z = Z_2$  (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} \varphi_G(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= \int_{z_1}^{z_2} \left\{ 1 + \frac{r_G}{\sqrt{z^2 + p^2(z)}} \right\} \times \\ &\times \sqrt{1 + (d\vec{p}(z)/dz)^2} dz = Z_2 - Z_1 + \frac{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2}{2(Z_2 - Z_1)} + \\ &+ r_G \ln \frac{\sqrt{Z_2^2 + 2Z_2\vec{a}\vec{b} + a^2} + Z_2 + \vec{a}\vec{b}}{\sqrt{Z_1^2 + 2Z_1\vec{a}\vec{b} + a^2} + Z_1 + \vec{a}\vec{b}}. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \vec{a} &= \frac{Z_2}{Z_2 - Z_1} \vec{p}_1 - \frac{Z_1}{Z_2 - Z_1} \vec{p}_2, \quad \vec{b} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{Z_2 - Z_1} \\ \vec{a}\vec{b} &= \frac{1}{(Z_2 - Z_1)^2} \left[ \vec{p}_1 \vec{p}_2 (Z_2 + Z_1) - Z_2 p_1^2 - Z_1 p_2^2 \right]. \end{aligned}$$

После проделанных упрощений и вычислений вернемся к задаче определения ФВК на выходе из микрокорректора. Для рассматриваемого участка трассы в формуле (20) мы должны положить  $Z_1 = -Z_s$ ,  $Z_2 = -Z_m$  и  $\vec{p}_1 = \vec{p}_s$ ,  $\vec{p}_2 = \vec{p}_m$ . В результате находим

$$\varphi_G(\vec{p}_s, \vec{p}_m) = Z_s - Z_m + \frac{(\vec{p}_m - \vec{p}_s)^2}{2(Z_s - Z_m)} + r_G F_{s-m}(p_m),$$

$$F_{s-m}(p_m) = \ln \frac{2(Z_s - Z_m)^2}{Z_s p_m} + \ln \frac{\sqrt{Z_m^2 + p_m^2} - Z_m}{p_m}.$$

Дальнейший анализ удобнее проводить в суммарных,  $\vec{p}_s = (\vec{p}'_s + \vec{p}''_s)/2$ ,  $\vec{p}_m = (\vec{p}'_m + \vec{p}''_m)/2$ , и разностных,  $\vec{\rho}_s = \vec{p}'_s - \vec{p}''_s$ ,  $\vec{\rho}_m = \vec{p}'_m - \vec{p}''_m$ , координатах, в которых получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(-Z_m + 0; \vec{p}_m, \vec{\rho}_m) &\approx \frac{k^2 a}{4\pi^2 (Z_s - Z_m)^2} \frac{I_0}{2\pi R_s^2} \times \\ &\times \exp\left\{-2ikr_g \ln \left| \frac{\vec{p}_m - \vec{P}_m + \vec{\rho}_m/2}{\vec{p}_m - \vec{P}_m - \vec{\rho}_m/2} \right| \right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}_s \exp\left\{-\frac{(\vec{p}_s - \vec{P}_s)^2}{2R_s^2} + ik \left[ \frac{(\vec{p}_m - \vec{p}_s)\vec{\rho}_m}{(Z_s - Z_m)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + r_G [F_{s-m}(\vec{p}_m + \vec{\rho}_m/2) - F_{s-m}(\vec{p}_m - \vec{\rho}_m/2)] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Несложно показать, что функция  $\Gamma(-Z_m + 0; \vec{p}_m, \vec{\rho}_m)$  достаточно "острая", быстро убывающая до нуля с ростом разностной переменной  $\rho_m$ . Действительно, выполнив в (21) интегрирование, получаем выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}_s \exp\left\{-\frac{(\vec{p}_s - \vec{P}_s)^2}{2R_s^2} + ik \left[ \frac{(\vec{p}_m - \vec{p}_s)\vec{\rho}_m}{(Z_s - Z_m)} \right] \right\} =$$

$$= 2\pi R_s^2 \exp \left\{ -\frac{k^2 R_s^2}{2(Z_s - Z_m)^2} \rho_m^2 + ik \left[ \frac{(\vec{p}_m - \vec{P}_s)\vec{p}_m}{Z_s - Z_m} \right] \right\},$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{(Z_m^2 + p_m^2)} \left[ \sqrt{(Z_m^2 + p_m^2)} - Z_m \right]} - \frac{2}{p_m^2} \right\}.$$

из которого видно, что эффективный вклад в ФВК вносят лишь участки плоскости с эффективными размерами  $\rho_m < \rho_{ef}$ , где  $\rho_{ef}$  оценивается из условия  $k^2 R_s^2 \rho_{ef}^2 / (2(Z_s - Z_m)^2) \approx 1$ . Физический смысл параметра  $\rho_{ef}$  легко прослеживается из известной теоремы Ван Циттерта – Цернике [15]. Согласно последней линейный масштаб когерентности поля  $\rho_{ef}$  в плоскости наблюдения может быть оценен как отношение длины электромагнитной волны  $\lambda$  к угловому размеру источника излучения,  $R_s / (Z_s - Z_m)$ . С учетом малости величины  $\rho_m$  функции в показателях степени экспонент в (211) можно упростить, произведя их линеаризацию:

$$\ln \frac{|\vec{p}_m - \vec{P}_m + \vec{p}_m/2|}{|\vec{p}_m - \vec{P}_m - \vec{p}_m/2|} \approx \frac{(\vec{p}_m - \vec{P}_m)}{(\vec{p}_m - \vec{P}_m)^2} \vec{p}_m,$$

$$F_{s-m}(\vec{p}_m + \vec{p}_m/2) - F_{sm}(\vec{p}_m - \vec{p}_m/2) \approx$$

$$\approx \left( \frac{1}{\sqrt{p_m^2 + Z_m^2} (\sqrt{p_m^2 + Z_m^2} - Z_m)} - \frac{1}{p_m^2} \right) \vec{p}_m \vec{p}_m.$$

После выполненных упрощений получаем окончательное выражение для ФВК на выходе из микрокорректора:

$$\Gamma(-Z_m + 0; \vec{p}_m, \vec{p}_m) \approx \frac{k^2 a I_0}{4\pi^2 (Z_s - Z_m)^2} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{k^2 R_s^2}{2(Z_s - Z_m)^2} \rho_m^2 + ik \vec{p}_m \left[ \frac{\vec{p}_m - \vec{P}_s}{Z_s - Z_m} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2r_g \frac{\vec{p}_m - \vec{P}_m}{(\vec{p}_m - \vec{P}_m)^2} + r_G \vec{p}_m \right] \right\}$$

Если в данном выражении выбрать величину нормирующего множителя равной  $a = 4\pi^2 / k^2$ , то при  $\vec{p}_m = 0$  мы получаем стандартное выражение для средней интенсивности, создаваемой “точечным” источником в плоскости микролинзы:  $\langle I(-Z_m, \vec{p}_m) \rangle = \Gamma(-Z_m + 0; \vec{p}_m, \vec{p}_m = 0) = I_0 / (Z_s - Z_m)^2$ .

### 7. Участок трассы $-Z_m \leq z \leq 0$

Аналогичным образом строится ФВК и в плоскости макролинзы ( $z = 0$ ). Так, согласно (15) в суммарных и разностных координатах имеем

$$\Gamma(0; \vec{p}, \vec{p}) \approx \frac{k^2}{4\pi^2 Z_m^2} \iint d\vec{p}_m d\vec{p}_m \Gamma(-Z_m + 0; \vec{p}_m, \vec{p}_m) \times$$

$$\times \exp \left\{ ik \left[ \Phi_G \left( \vec{p}_m + \frac{\vec{p}_m}{2}, \vec{p} + \frac{\vec{p}}{2} \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \Phi_G \left( \vec{p}_m - \frac{\vec{p}_m}{2}, \vec{p} - \frac{\vec{p}}{2} \right) \right] \right\}. \quad (22)$$

Через  $\Phi_G(\vec{p}_m, \vec{p})$  здесь обозначен эйконал макролинзы, рассчитанный по формуле (20) вдоль прямой, соединяющей точки с координатами  $(Z_1 = -Z_m, \vec{p}_1 = \vec{p}_m)$  и  $(Z_2 = 0, \vec{p}_2 = \vec{p})$ :

$$\Phi_G(\vec{p}_m, \vec{p}) = Z_m + \frac{(\vec{p} - \vec{p}_m)^2}{2Z_m} + r_G \ln \frac{p}{\sqrt{Z_m^2 + p_m^2} - Z_m}.$$

Несложно показать, что “острота” функции  $\Gamma(-Z_m + 0; \vec{p}_m, \vec{p}_m)$  по переменной  $\vec{p}_m$ , в свою очередь, приводит и к остроте  $\Gamma(0; \vec{p}, \vec{p})$  по разностной переменной  $\vec{p}$ . В данной зависимости нет ничего необычного. Это снова есть проявление теоремы Ван Циттерта – Цер-

нике. Учитывая быстрое убывание до нуля  $\Gamma(0; \bar{p}, \bar{\rho})$  с ростом координаты  $\bar{\rho}$ , можно снова провести линеаризацию выражения, стоящего в показателе степени экспоненты в (22):

$$\begin{aligned} & \Phi_G \left( \bar{p}_m + \frac{\bar{\rho}_m}{2}, \bar{p} + \frac{\bar{\rho}}{2} \right) - \Phi_G \left( \bar{p}_m - \frac{\bar{\rho}_m}{2}, \bar{p} - \frac{\bar{\rho}}{2} \right) \approx \\ & \approx \frac{(\bar{p} - \bar{p}_m)(\bar{\rho} - \bar{\rho}_m)}{Z_m} + r_G \frac{\bar{p}\bar{\rho}}{\bar{p}^2} - \\ & - r_G \frac{\bar{p}_m \bar{\rho}_m}{\sqrt{(Z_m^2 + \bar{p}_m^2)} \left[ \sqrt{(Z_m^2 + \bar{p}_m^2)} - Z_m \right]}. \end{aligned}$$

После выполненных упрощений получаем следующее представление ФВК в плоскости макролинзы:

$$\begin{aligned} \Gamma(0; \bar{p}, \bar{\rho}) &= \frac{k^2 I_0}{4\pi^2 Z_m^2 (Z_s - Z_m)^2} \times \\ & \times \iint d\bar{p}_m d\bar{\rho}_m \exp \left\{ -\frac{k^2 R_s^2 \bar{\rho}_m^2}{2(Z_s - Z_m)^2} + ik\bar{p}_m \left[ \frac{\bar{p}_m - \bar{p}_s}{Z_s - Z_m} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2r_s \frac{(\bar{p}_m - \bar{p}_m)}{(\bar{p}_m - \bar{p}_m)^2} \right] \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ ik \left[ \frac{\bar{p} - \bar{p}_m}{Z_m} (\bar{\rho} - \bar{\rho}_m) + r_G \frac{\bar{p}\bar{\rho}}{p^2} - 2r_G \frac{\bar{p}_m \bar{\rho}_m}{p_m^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

## 8. Участок трассы $0 \leq z \leq Z_p$

Перейдем теперь к рассмотрению последнего участка трассы, расположенного между плоскостями макролинзы ( $M$ ) и наблюдателя ( $P$ ). Согласно правилу переноса ФВК в суммарных и разностных координатах в общем виде получаем

$$\Gamma(Z_p; \bar{p}_p, \bar{\rho}_p) = \frac{k^2}{4\pi^2 Z_p^2} \iint d\bar{p} d\bar{\rho} \Gamma(0; \bar{p}, \bar{\rho}) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left\{ ik \left[ \Phi_G \left( \bar{p} + \frac{1}{2}\bar{\rho}, \bar{p}_p + \frac{1}{2}\bar{\rho}_p \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \Phi_G \left( \bar{p} - \frac{1}{2}\bar{\rho}, \bar{p}_p - \frac{1}{2}\bar{\rho}_p \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где эйконал  $\Phi_G$  определяется согласно (20) при условии, что  $Z_1 = 0$ ,  $\bar{p}_1 = \bar{p}$  и  $Z_2 = Z_p$ ,  $\bar{p}_2 = \bar{p}_p$ :

$$\Phi_G(\bar{p}, \bar{p}_p) = Z_p + \frac{(\bar{p}_p - \bar{p})^2}{2Z_p} + r_G \ln \frac{2Z_p}{p}.$$

Прежде чем проводить дальнейшие преобразования, заметим следующее. Как уже отмечалось ранее, условиям наблюдения более всего соответствует система координат, в которой ось  $Oz$  соединяет точку наблюдения  $P$  с центром масс макролинзы  $O$  (см. рис. 1). Однако для построения ФВК в плоскости наблюдения ( $z = Z_p$ ) необходимы небольшие поперечные разности точек регистрации полей. Для того чтобы удовлетворить двум “взаимоисключающим” требованиям, поступают так. Вначале в плоскости наблюдения рассматривают поля в разнесенных точках  $(Z_p, \bar{p}'_p)$  и  $(Z_p, \bar{p}''_p)$ . Затем, согласно стандартной процедуре, строят ФВК,  $\Gamma(Z_p; \bar{p}'_p, \bar{p}''_p) = \langle U(Z_p; \bar{p}'_p) U^*(Z_p; \bar{p}''_p) \rangle$ , вводят суммарные,  $\bar{p}_p = (\bar{p}'_p + \bar{p}''_p)/2$ , и разностные,  $\bar{\rho}_p = \bar{p}'_p - \bar{p}''_p$ , координаты, после чего полагают  $\bar{p}_p = 0$ . Следуя этому правилу, согласно (20) находим разность эйконалов в разнесенных точках,  $\Delta\Phi_G = \Phi_G(\bar{p} + \bar{\rho}/2, \bar{p}_p + \bar{\rho}_p/2) - \Phi_G(\bar{p} - \bar{\rho}/2, \bar{p}_p - \bar{\rho}_p/2)$ , затем полагаем  $\bar{p}_p = 0$  и, наконец, линеаризуем  $\Delta\Phi_G$  по разностным переменным  $\bar{\rho}$  и  $\bar{\rho}_p$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_G(\bar{p}, \bar{\rho}, \bar{\rho}_p) &= \\ & = \frac{\bar{p}(\bar{\rho} - \bar{\rho}_p)}{Z_p} - r_G \ln \left| \frac{\bar{p} + \bar{\rho}/2}{\bar{p} - \bar{\rho}/2} \right| \approx \frac{\bar{p}(\bar{\rho} - \bar{\rho}_p)}{Z_p} - r_G \frac{\bar{p}}{p^2} \bar{\rho}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение для ФВК в плоскости наблюдения в окончательном виде представляется так:

$$\Gamma(Z_p, \vec{\rho}_p) = \frac{k^2}{4\pi^2 Z_p^2} \iint d\vec{\rho} d\vec{\rho} \Gamma(0, \vec{\rho}, \vec{\rho}) \times \exp \left\{ ik \left[ \frac{\vec{\rho}\vec{\rho}}{Z_p} - \frac{\vec{\rho}\vec{\rho}_p}{Z_p} - r_G \frac{\vec{\rho}\vec{\rho}}{\vec{\rho}^2} \right] \right\}, \quad (24)$$

где  $\Gamma(0, \vec{\rho}, \vec{\rho})$  определяется по формуле (23).

С помощью найденного значения ФВК в плоскости наблюдения можно определить две важные характеристики принимаемого излучения. С одной стороны, средняя интенсивность  $\langle I(Z_p) \rangle$  в точке наблюдения  $P$  легко определяется, если в (24) положить  $\vec{\rho}_p = 0$ . С другой стороны, наблюдаемое в точке  $P$  распределение излучения по углам наблюдения  $\vec{\psi}$  (лучевая интенсивность или яркость изображения) определяется как фурье-преобразование функции  $\Gamma(Z_p, \vec{\rho}_p)$  по разностной переменной  $\vec{\rho}_p$  [10]:

$$I_p(\vec{\psi}) = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho}_p \Gamma(Z_p, \vec{\rho}_p) \exp\{ik\vec{\psi}\vec{\rho}_p\}.$$

Подставляя сюда найденные ранее определения ФВК, после несложных, но громоздких вычислений получаем следующее выражение для лучевой интенсивности:

$$I_p(\vec{\psi}) = \frac{I_0}{(Z_p + Z_s)^2} \frac{1}{2\pi\Psi_0^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Psi_0^2} \left[ \vec{\psi} - \vec{\psi}_s - \Psi_G^2 \frac{(1 - Z_m/Z_s)}{(1 + Z_m/Z_p)} \frac{\vec{\psi}}{\Psi^2} - \Psi_g^2 \frac{(\vec{\psi} - \vec{\psi}_m)}{(\vec{\psi} - \vec{\psi}_m)^2} \right]^2 \right\}.$$

Здесь через  $\Psi_G^2 = 2r_G Z_s / ((Z_p + Z_s)Z_p)$  и  $\Psi_g^2 = 2r_g (Z_s - Z_m) / ((Z_p + Z_s)(Z_p + Z_m))$  обозначены квадраты угловых радиусов кольцевых изображений Эйнштейна-Хвольсона [1, 2] для макролинзы-галактики и микролинзы-звезды, а  $\Psi_0 = R_s / (Z_s + Z_p)$  и  $\vec{\psi}_s = \vec{P}_s / (Z_s + Z_p)$  – уг-

ловой размер источника излучения и угловая координата максимума его яркости соответственно.

Для количественной оценки влияния микролинзы на излучение далекого источника определим еще и такую интегральную по углам характеристику, как коэффициент усиления блеска изображения:

$$q(\vec{\psi}_s, \vec{\psi}_m) = I_0^{-1} (Z_p + Z_s)^2 \int_{-\infty}^{\infty} I_p(\vec{\psi}) d\vec{\psi} = \frac{1}{2\pi\Psi_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\psi} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Psi_0^2} \left[ \vec{\psi} - \vec{\psi}_s - \Psi_G^2 \frac{(1 - Z_m/Z_s)}{(1 + Z_m/Z_p)} \frac{\vec{\psi}}{\Psi^2} - \Psi_g^2 \frac{(\vec{\psi} - \vec{\psi}_m)}{(\vec{\psi} - \vec{\psi}_m)^2} \right]^2 \right\}.$$

Анализ полученных выражений удобнее проводить в относительных единицах. Введя в рассмотрение новые нормированные переменные и параметры:  $\vec{\xi} = \vec{\psi} / \Psi_G$ ,  $\vec{\xi}_m = \vec{\psi}_m / \Psi_G$ ,  $\vec{\xi}_s = \vec{\psi}_s / \Psi_G$ ,  $\Gamma_0 = \Psi_0 / \Psi_G$ ,  $\Gamma_g = \Psi_g / \Psi_G$ , – находим следующее выражение для коэффициента усиления:

$$q(\vec{\xi}_s, \vec{\xi}_m) = \frac{1}{2\pi\Gamma_0^2} \int d\vec{\xi} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Gamma_0^2} \left[ \vec{\xi} - \vec{\xi}_s - \frac{(1 - Z_m/Z_s)}{(1 + Z_m/Z_p)} \frac{\vec{\xi}}{\xi^2} - \Gamma_g^2 \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}_m)}{(\vec{\xi} - \vec{\xi}_m)^2} \right]^2 \right\}.$$

Во второй части статьи будут представлены расчетные формулы ФВК для случая, когда микролинза находится в промежутке между макролинзой и наблюдателем ( $0 \leq Z_m \leq Z_p$ ), а также результаты численного моделирования изофот видимого изображения и коэффициента усиления его блеска.

Авторы выражают благодарность А. С. Брюховецкому за полезные советы и замечания.

## Литература

1. Блиох П. В., Минаков А. А. Гравитационные линзы. – Киев: Наукова думка, 1989. – 238 с.
2. Schneider P., Ehlers J., and Falco E. Gravitational Lenses. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. – 560 p.
3. Walsh D., Carswell R., and Weymann R. 0957+561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens? // Nature. – 1979. – Vol. 279, No. 5712. – P. 381-384.
4. Impact of Gravitational Lensing on Cosmology // Proc. of the 225<sup>th</sup> symposium of the International Astronomical Union. – Lausanne (Switzerland). – 2004. – 470 p.
5. Paczynski B. Gravitational microlensing at large optical depth // Astrophys. J. – 1986. – Vol. 304. – P. 1-5.
6. Черепашук А. М. Гравитационное микролинзирование и проблема скрытой массы // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №3. – С. 92-99.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. – М.: Наука, 1981. – 550 с.
8. Шишов В. И., Шишова Т. Д. Влияние размеров источников на спектры межпланетных мерцаний. Теория // Астрономический Журнал. – 1978. – Т. 55, вып. 2. – С. 411-418.
9. Зоммерфельд А. Оптика. – М.: Издательство иностранной литературы, 1953. – 403 с.
10. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Т. 2. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
11. Гольдман И. И., Мигдал А. Б. Теория рассеяния в квазиклассическом приближении // ЖЭТФ. – 1955, Т. 28, вып. 4. – С. 394-400.
12. Shiff L. I. Approximation Method for High-Energy Potential Scattering // Phys. Rev. – 1956. – Vol. 103, No. 2. – P. 443-448.
13. Герман В. Л., Брюховецкий А. С. К теории рассеяния волн неоднородной средой // Вестник Харьковского университета. Серия механико-математическая. – 1970. – Вып. 34. – С. 116-123.
14. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Том 2. Многократное рассеяние, турбулентность, шероховатые поверхности и дистанционное зондирование. – М.: Мир, 1981. – 318 с.
15. Вольф Э., Борн М. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 855 с.

## Фокусування випромінювання квазара в гравітаційному полі мікролінзи-зірки, що знаходиться в макролінзі-галактиці.

### 1. Побудова розв'язку з використанням формули Соболева

Л. А. Бердина, А. О. Минаков

Дослідження ефекту мікролінзування є одним з актуальних напрямків у розв'язку задачі пошуку темної матерії у Всесвіті. У першій частині роботи побудовано розв'язок задачі аналізу фокусування випромінювання квазара, що виникає в гравітаційному полі мікролінзи-зірки, яка знаходиться усередині макролінзи-галактики. Аналіз ефекту виконано в рамках методу Соболева, який дозволяє досліджувати зміну фокусуєчих властивостей поля тяжіння зірки залежно від її положення у галактиці.

### Focusing of Quasar Radiation in the Gravitational Field of a Microlens-Star Situated inside a Macrolens-Galaxy. 1. Solution Construction Using Sobolev Formula

L. A. Berdina and A. A. Minakov

Studying of microlensing phenomenon is one of the approaches of current importance to solving the problem of searching for the dark matter in the Universe. In the first part of the work, a solution of analysis problem of the quasar radiation focusing arising in the gravitational field of a microlens-star located inside the galaxy was obtained. The effect was analyzed within the Sobolev method which allows studying the change of focusing properties of gravitational field of a star depending on its position in the galaxy.