

Метод модового базиса во временной области для волновода с поперечно неоднородным многосвязным сечением. 1. Общая теория метода

А. Ю. Бутрым, Б. А. Кочетов

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: abutrym@ua.ru, bkochetov@bk.ru*

Статья поступила в редакцию 25 февраля 2009 г.

Предложено развитие метода модового базиса для анализа во временной области геометрически регулярного, поперечно неоднородного волновода с многосвязным поперечным сечением. В частности, полученное обобщение метода позволяет рассматривать задачи распространения нестационарных электромагнитных волн в квази-ТЕМ-линиях с поперечной магнитодиэлектрической неоднородностью.

1. Введение

Для анализа нестационарных полей в однородных многосвязных волноводах с идеально проводящими стенками в работе [1] был предложен метод разложения по волноводным модам во временной области. Позднее в [2-4] этот подход был формализован в рамках метода эволюционных волноводных уравнений. В работах [1, 2] для разложения полей использовался модовый базис для пустого волновода, который идентичен известным модам в частотной области. При этом учет зависимости диэлектрической и магнитной проницаемостей от поперечных координат волновода осуществляется при помощи вторичных источников (индуцированных токов и зарядов), зависящих от поля. Недостатком такого подхода к анализу поперечно неоднородных волноводов является медленная сходимость модового разложения, так как каждая мода в отдельности не удовлетворяет необходимым условиям на границах неоднородности. В последующих работах [3, 4] было предложено осуществлять включение мате-

риальных параметров поперечной неоднородности в задачу получения модового базиса. Диэлектрическая и магнитная проницаемости при этом имеют факторизованную зависимость от поперечных координат, от продольной координаты и времени и определяются в виде: $\epsilon(\vec{r}, t) = \epsilon_{\perp}(\vec{r}_{\perp})\epsilon_{\parallel}(z, t)$, $\mu(\vec{r}, t) = \mu_{\perp}(\vec{r}_{\perp})\mu_{\parallel}(z, t)$, где $\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{z}_0 z$, \vec{r} – радиус-вектор, z – продольная координата, t – время. Однако в [3, 4] рассмотрены только односвязные волноводы. В настоящей статье проведено дальнейшее обобщение работ [3, 4] на случай волноводов с многосвязным сечением, в которых возможно существование квази-ТЕМ мод.

В первой части статьи приводится вывод основных уравнений. Вторая будет посвящена численной реализации метода и сравнению результатов расчета распространения импульсного сигнала в простейшей поперечно неоднородной ТЕМ-линии с численными результатами, которые получены методом конечных разностей во временной области (FDTD). На рассмотренном численном примере будет показана быстрая сходимость предложенного модового разложения.

2. Модовый базис для поперечно неоднородных многосвязных волноводов

2.1. Уравнения Максвелла и материальные уравнения

Рассмотрим волновод с многосвязным поперечным сечением, ограниченным идеально проводящими стенками, с неоднородным и нестационарным магнитоэлектрическим заполнением (рис. 1). Электромагнитное поле в рассматриваемой структуре описывается следующей системой уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}} = \partial_t \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{J}}_\sigma + \vec{\mathcal{J}}_0, \quad -\operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} = \partial_t \vec{\mathcal{B}}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{D}} = \rho_\sigma + \rho_0, \quad \operatorname{div} \vec{\mathcal{B}} = 0.$$

Здесь $\vec{\mathcal{J}}_\sigma$ и $\vec{\mathcal{J}}_0$ определяют плотности токов проводимости и сторонних токов соответственно, а ρ_σ и ρ_0 – плотности зарядов проводимости и сторонних зарядов.

Материальные уравнения записываются в следующем виде:

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathcal{E}}) = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}(\vec{\mathcal{E}}) = \epsilon_0 \epsilon \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}'(\vec{\mathcal{E}}),$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}(\vec{\mathcal{E}}) &= \epsilon_0 \alpha \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}'(\vec{\mathcal{E}}), \\ \epsilon &= 1 + \alpha; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}}(\vec{\mathcal{H}}) &= \mu_0 (\vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{M}}(\vec{\mathcal{H}})) = \mu_0 \mu \vec{\mathcal{H}} + \mu_0 \vec{\mathcal{M}}'(\vec{\mathcal{H}}), \\ \vec{\mathcal{M}}(\vec{\mathcal{H}}) &= \chi \vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{M}}'(\vec{\mathcal{H}}), \\ \mu &= 1 + \chi. \end{aligned}$$

Здесь ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. В материальных уравнениях выделены линейные части диэлектрической и магнитной проницаемостей среды, которые представляются в виде факторизованных функций координат и времени:

$$\epsilon(\vec{r}, t) = \epsilon_\perp(\vec{r}_\perp) \epsilon_\parallel(z, t), \quad (3)$$

$$\mu(\vec{r}, t) = \mu_\perp(\vec{r}_\perp) \mu_\parallel(z, t).$$

Учет нелинейности и неоднородности более общего вида может быть осуществлен с помощью индуцированных токов, зависящих от полного поля (слагаемые со штрихами в (2)). Введем обозначение для полных токов и зарядов (электрических и магнитных):

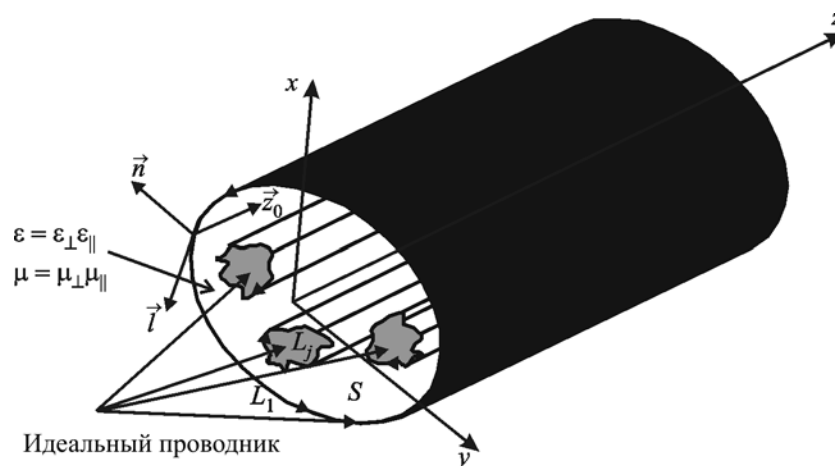


Рис. 1. Геометрия задачи

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}} &= \partial_t \vec{\mathcal{P}}' + \vec{\mathcal{J}}_\sigma + \vec{\mathcal{J}}_0, & \rho &= -\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}' + \rho_\sigma + \rho_0, \\ \operatorname{div} \vec{\mathcal{J}} + \partial_t \rho &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \hat{\vec{\mathcal{J}}} &= \mu_0 \partial_t \vec{\mathcal{M}}', & \hat{\rho} &= -\mu_0 \operatorname{div} \vec{\mathcal{M}}', \\ \operatorname{div} \hat{\vec{\mathcal{J}}} + \partial_t \hat{\rho} &= 0. \end{aligned}$$

Используя материальные уравнения (2) с учетом (3) и обозначений для полных токов (4), получим систему уравнений Максвелла в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}} = \partial_t (\epsilon_0 \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} \vec{\mathcal{E}}) + \vec{\mathcal{J}}, \quad (5)$$

$$-\operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} = \partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} \vec{\mathcal{H}}) + \hat{\vec{\mathcal{J}}},$$

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} \vec{\mathcal{E}}) = \rho, \quad \operatorname{div} (\mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} \vec{\mathcal{H}}) = \hat{\rho}. \quad (6)$$

На стенках контуров, ограничивающих поперечное сечение волновода, выполняются граничные условия, соответствующие идеальному электрическому проводнику:

$$\vec{l} \cdot \vec{\mathcal{E}}|_L = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}|_L = 0, \quad \vec{z}_0 \cdot \vec{\mathcal{E}}|_L = 0, \quad (7)$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности волновода, \vec{l} – касательный орт контура L , \vec{z}_0 – орт оси волновода.

2.2. Нормально-тангенциальная форма уравнений Максвелла

Для дальнейшего рассмотрения введем нормально-тангенциальное разложение для всех используемых векторов и оператора Гамильтона:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + \vec{z}_0 E_z, \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{H} + \vec{z}_0 H_z, \quad (8)$$

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{J} + \vec{z}_0 J_z, \quad \hat{\vec{\mathcal{J}}} = \hat{J} + \vec{z}_0 \hat{J}_z, \quad \nabla = \nabla_{\perp} + \vec{z}_0 \partial_z.$$

В дальнейших выкладках будет также использован следующий векторный оператор:

$$\begin{aligned} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{A} &= -[\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{A} = \\ &= -\nabla_{\perp} \cdot [\vec{z}_0 \times \vec{A}] = \nabla_{\perp} \cdot [\vec{A} \times \vec{z}_0]. \end{aligned} \quad (9)$$

Запишем уравнения (6) в нормально-тангенциальной форме:

$$\partial_z (\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} E_z) = -\nabla_{\perp} \cdot (\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} \vec{E}) + \epsilon_0^{-1} \rho, \quad (10)$$

$$\partial_z (\mu_{\parallel} \mu_{\perp} H_z) = -\nabla_{\perp} \cdot (\mu_{\parallel} \mu_{\perp} \vec{H}) + \mu_0^{-1} \hat{\rho}.$$

Проекция уравнений (5) на ось волновода дает:

$$\partial_t (\epsilon_0 \epsilon_{\parallel} E_z) = -[\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H} - J_z, \quad (11)$$

$$\partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} H_z) = [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{E} - \hat{J}_z.$$

Проецируя уравнения (5) на поперечное направление и исключая продольные компоненты полей с помощью (10) и (11), получаем из исходных уравнений первого порядка следующие уравнения второго порядка относительно поперечных компонент полей:

$$\begin{aligned} [\vec{z}_0 \times \epsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1}] \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \vec{H} &= \\ &= \mu_{\parallel}^{-1} \partial_z \mu_{\parallel} \left\{ \partial_t (\epsilon_0 \epsilon_{\parallel} \vec{E}) + \partial_z \epsilon_{\perp}^{-1} [\vec{H} \times \vec{z}_0] \right\} + \\ &+ \epsilon_{\perp}^{-1} \mu_{\parallel}^{-1} \left\{ \partial_z \mu_{\parallel} \vec{J} + [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \mu_0^{-1} \hat{\rho}] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} [\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \epsilon_{\perp}^{-1} \times \vec{z}_0] \nabla_{\perp} \cdot \epsilon_{\perp} \vec{E} &= \\ &= \epsilon_{\parallel}^{-1} \partial_z \epsilon_{\parallel} \left\{ \partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \vec{H}) + \partial_z \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \vec{E}] \right\} + \\ &+ \mu_{\perp}^{-1} \epsilon_{\parallel}^{-1} \left\{ \partial_z \epsilon_{\parallel} \hat{J} + [\nabla_{\perp} \epsilon_{\perp}^{-1} \epsilon_0^{-1} \rho \times \vec{z}_0] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E} = \\ & = -\partial_t \mu_{\parallel} \left\{ \mu_0 \partial_z \vec{H} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} [\vec{z}_0 \times \vec{E}]) \right\} - \\ & - \left\{ \mu_0 \partial_t \mu_{\parallel} [\vec{z}_0 \times \vec{J}] + \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \hat{J}_z \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H} = \\ & = -\partial_t \varepsilon_{\parallel} \left\{ \varepsilon_0 \partial_z \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t (\mu_{\parallel} \mu_{\perp} [\vec{H} \times \vec{z}_0]) \right\} - \\ & - \left\{ \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} J_z + \varepsilon_0 \partial_t \varepsilon_{\parallel} [\hat{J} \times \vec{z}_0] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Граничные условия (7), записанные в нормально-тангенциальной форме, с учетом (10), (11)

и дополнительным ограничением, состоящим в отсутствии сторонних зарядов и сторонних продольных электрических токов на стенках волновода, приводят к следующим условиям:

$$\vec{l} \cdot \vec{E}|_L = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}|_L = 0, \quad (16)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot (\varepsilon_{\perp} \vec{E})|_L = 0, \quad \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H} \times \vec{z}_0]|_L = 0.$$

2.3. Выделение линейных операторов для постановки граничной задачи

Уравнения (12), (14) и (13), (15) объединим попарно, выделив операции дифференцирования по поперечным координатам:

$$W_H X = \left(\begin{array}{l} \mu_{\parallel}^{-1} \partial_z \mu_{\parallel} \left\{ \partial_t (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \vec{E}) + \partial_z \varepsilon_{\perp}^{-1} [\vec{H} \times \vec{z}_0] \right\} + \varepsilon_{\perp}^{-1} \mu_{\parallel}^{-1} \left\{ \partial_z \mu_{\parallel} \vec{J} + [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \mu_0^{-1} \hat{\rho}] \right\} \\ -\partial_t \mu_{\parallel} \left\{ \mu_0 \partial_z \vec{H} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} [\vec{z}_0 \times \vec{E}]) \right\} - \left\{ \mu_0 \partial_t \mu_{\parallel} [\vec{z}_0 \times \vec{J}] + \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \hat{J}_z \right\} \end{array} \right), \quad (17)$$

$$W_E X = \left(\begin{array}{l} -\partial_t \varepsilon_{\parallel} \left\{ \varepsilon_0 \partial_z \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t (\mu_{\parallel} \mu_{\perp} [\vec{H} \times \vec{z}_0]) \right\} - \left\{ \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} J_z + \varepsilon_0 \partial_t (\varepsilon_{\parallel} [\hat{J} \times \vec{z}_0]) \right\} \\ \varepsilon_{\parallel}^{-1} \partial_z \varepsilon_{\parallel} \left\{ \partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \vec{H}) + \partial_z \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \vec{E}] \right\} + \mu_{\perp}^{-1} \varepsilon_{\parallel}^{-1} \left\{ \partial_z \varepsilon_{\parallel} \hat{J} + [\nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \varepsilon_0^{-1} \rho \times \vec{z}_0] \right\} \end{array} \right). \quad (18)$$

Здесь введено обозначение $X = \text{col}(\vec{E}, \vec{H})$ для четырехмерного вектора, составленного из поперечных компонент электрического и магнитного полей. Операторы дифференцирования по поперечным координатам W_H и W_E определены следующим образом:

$$\begin{aligned} W_H X &= \\ &= \left(\begin{array}{cc} 0 & [\vec{z}_0 \times \varepsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1}] \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \\ \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{c} [\vec{z}_0 \times \varepsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1}] \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \vec{H} \\ \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E} \end{array} \right), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} W_E X &= \\ &= \left(\begin{array}{cc} 0 & \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \\ [\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \times \vec{z}_0] \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\begin{array}{c} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H} \\ [\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \times \vec{z}_0] \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} \vec{E} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Введенные линейные операторы W_H, W_E определены на множестве четырехмерных вещественных векторов, у которых двухмерные компоненты \vec{E} и \vec{H} удовлетворяют граничным условиям (16). Вводя в этом линейном пространстве скалярное произведение по правилу

$$(X_1, X_2) = \frac{1}{2S} \int_S (\varepsilon_{\perp} \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \mu_{\perp} \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) dS, \quad (21)$$

получим Гильбертово пространство $L_2^4(S, \gamma)$ четырехмерных векторных функций, определенных на S , удовлетворяющих граничным условиям (16) и квадратично интегрируемых с весом $\gamma = \{\varepsilon_{\perp}, \mu_{\perp}\}$. С помощью аналога формулы Грина:

$$\begin{aligned} & \int_S (\vec{A} \cdot \nabla_{\perp} f \nabla_{\perp} \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla_{\perp} f \nabla_{\perp} \vec{A}) dS = \\ & = \oint_L [(\vec{n} \cdot \vec{A})(\nabla_{\perp} \cdot \vec{B}) - (\vec{n} \cdot \vec{B})(\nabla_{\perp} \cdot \vec{A})] f dl, \end{aligned} \quad (22)$$

и граничных условий (16) можно показать симметричность операторов W_H, W_E относительно введенного скалярного произведения (21), т. е. для любых X_1, X_2 из $L_2^4(S, \gamma)$

$$(W_H X_1, X_2) = (X_1, W_H X_2), \quad (23)$$

$$(W_E X_1, X_2) = (X_1, W_E X_2).$$

Дальнейшие рассуждения описывают разбиение пространства решений на H -, E - и T -волны и метод построения базиса для них. Такое рассмотрение не претендует на полноту и строгость, так как мы предполагаем бесконечную дифференцируемость используемых функций и не вводим в рассмотрение обобщенные функции, считая при этом, что введенные операторы действуют из $L_2^4(S, \gamma)$ в $L_2^4(S, \gamma)$.

Обозначим область значений оператора W_H как L^H , ортогональным дополнением

к этому линейному подпространству в L_2^4 будет служить ядро оператора W_H , т. е. получаем разбиение $L_2^4 = L^H \oplus \text{Ker} W_H$. Аналогично для оператора W_E получаем $L_2^4 = L^E \oplus \text{Ker} W_E$, где L^E – область значений W_E . Несложно показать, что $L^H \subset \text{Ker} W^E$ и $L^E \subset \text{Ker} W^H$. Тогда пространство $L_2^4(S, \gamma)$ может быть разложено в прямую сумму трех ортогональных подпространств: $L_2^4(S, \gamma) = L^H \oplus L^E \oplus L^T$. Здесь введено подпространство L^T , являющееся пересечением ядер рассматриваемых операторов $L^T = \text{Ker} W^H \cap \text{Ker} W^E$. В дальнейшем будет показано, что введенные подпространства соответствуют полям волн H -, E - и T -типа соответственно.

2.4. Построение модового базиса

Собственные функции оператора W_H , в силу его симметричности, будут образовывать ортогональный базис в его области значений L^H . Из-за блочной структуры оператора с нолями на диагонали его собственные значения будут симметричны относительно ноля, т. е. если p_m^2 является собственным значением, соответствующим собственному вектору $X_m = \text{col}(\vec{E}_m, \vec{H}_m)$, то и $-p_m^2$ будет собственным значением, причем ему будет соответствовать собственный вектор $X_{-m} = \text{col}(\vec{E}_m, -\vec{H}_m)$. В конечном итоге нас интересует разложение полей \vec{E} и \vec{H} по модам. Так как собственные функции для \vec{E} и \vec{H} , соответствующие положительной и отрицательной части спектра, очевидно, линейно зависимы, то в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только положительной части спектра. Отсюда и запись собственных значений в виде квадратов (p_m^2).

Итак, задача на собственные значения для оператора W_H приводит к следующей векторной граничной задаче:

$$W_H X_m^H = p_m^2 X_m^H, \quad (24)$$

$$X_m^H = \begin{pmatrix} \vec{E}_m^H \\ \vec{H}_m^H \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} [\vec{z}_0 \times \varepsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1}] \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_m^H = p_m^2 \vec{E}_m^H, \\ \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_m^H = p_m^2 \vec{H}_m^H, \\ \vec{l} \cdot \vec{E}_m^H|_L = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_m^H|_L = 0, \end{cases}$$

где X_m^H – собственная функция оператора W_H , а p_m^2 – соответствующее ей собственное число. Задачу можно привести к скалярной, введя скалярные потенциалы Φ_m^H , Ψ_m^H следующим образом:

$$\vec{E}_m^H = p_m^{-1} \epsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \Phi_m^H \times \vec{z}_0], \quad \vec{H}_m^H = p_m^{-1} \nabla_{\perp} \Psi_m^H. \quad (25)$$

Подстановка (25) в (24), сводит исходную векторную задачу к следующей скалярной граничной задаче на собственные значения с условиями Неймана на границе S :

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \nabla_{\perp} \Psi_m^H + p_m^2 \mu_{\perp} \Psi_m^H = 0, \\ \nabla_{\perp} \cdot \epsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \Phi_m^H + p_m^2 \epsilon_{\perp}^{-1} \Phi_m^H = 0, \\ \left. \frac{\partial \Phi_m^H}{\partial \vec{n}} \right|_L = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_m^H}{\partial \vec{n}} \right|_L = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Подставив выражения для собственных функций в виде (25) или (24) в (10) и (11), можно убедиться, что для поля с поперечными компонентами \vec{E}_m^H , \vec{H}_m^H продольная компонента электрического поля в отсутствие источников оказывается нулевой, $E_z^H \equiv 0$. Таким образом, поперечные компоненты полей из L^H следует отождествлять с H -волнами.

Аналогичным образом строится базис и в L^E подпространстве. Векторная задача на собственные значения для оператора W_E имеет вид:

$$W_E X_n^E = q_n^2 X_n^E, \quad (27)$$

$$X_n^E = \begin{pmatrix} \vec{E}_n^E \\ \vec{H}_n^E \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \nabla_{\perp} \epsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H}_n^E = q_n^2 \vec{E}_n^E, \\ [\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \epsilon_{\perp}^{-1} \times \vec{z}_0] \nabla_{\perp} \cdot \epsilon_{\perp} \vec{E}_n^E = q_n^2 \vec{H}_n^E, \\ \vec{l} \cdot \vec{E}_n^E|_L = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_n^E|_L = 0. \end{cases}$$

Введение скалярных потенциалов Ψ_n^E , Φ_n^E ,

$$\vec{E}_n^E = q_n^{-1} \nabla_{\perp} \Psi_n^E, \quad \vec{H}_n^E = q_n^{-1} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \Phi_n^E], \quad (28)$$

сводит (27) к скалярной граничной задаче на собственные значения с условиями Дирихле на границе S :

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \Phi_n^E + q_n^2 \epsilon_{\perp} \Psi_n^E = 0, \\ \nabla_{\perp} \cdot \epsilon_{\perp} \nabla_{\perp} \Psi_n^E + q_n^2 \mu_{\perp}^{-1} \Phi_n^E = 0, \\ \Psi_n^E|_L = 0, \quad \Phi_n^E|_L = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Подставив выражения для этих собственных функций в виде (27) или (28) в (10) и (11), можно убедиться, что для таких поперечных компонент продольная компонента магнитного поля в отсутствие источников оказывается нулевой, $H_z^E \equiv 0$. Поэтому поперечные компоненты полей из L^E следует отождествлять с E -волнами.

Для построения базиса в подпространстве L^T рассмотрим совместно задачи (24) и (27) при нулевом собственном значении (соответствующем ядру оператора):

$$\begin{cases} W_H X_k^T = 0, \\ W_E X_k^T = 0, \end{cases} \quad (30)$$

$$X_k^T = \begin{pmatrix} \vec{E}_k^T \\ 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{H}_k^T \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \epsilon_{\perp}^{-1} \times \vec{z}_0] \nabla_{\perp} \cdot \epsilon_{\perp} \vec{E}_k^T = 0, \\ \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_k^T = 0, \\ \vec{l} \cdot \vec{E}_k^T|_L = 0; \\ [\vec{z}_0 \times \epsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1}] \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_k^T = 0, \\ \nabla_{\perp} \epsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H}_k^T = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{H}_k^T|_L = 0. \end{cases}$$

Проведя рассуждения аналогичные изложенным в [2], можно показать, что каждая из подсистем (30) имеет ровно $N - 1$ линейно независимых решений, где N – количество контуров, ограничивающих S . Для получения этих решений введем скалярные потенциалы Φ_k^T и Ψ_k^T :

$$\vec{E}_k^T = \nabla_{\perp} \Phi_k^T, \quad \vec{H}_k^T = \left[\vec{z}_0 \times \mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \Psi_k^T \right]. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (30), получим две неоднородные граничные задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} \nabla_{\perp} \Phi_k^T = 0, \\ \Phi_k^T|_{L_j} = c_k^j; \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \Psi_k^T = 0, \\ \Psi_k^T|_{L_j} = d_k^j; \end{cases} \quad (32)$$

где c_k^j и d_k^j – произвольные константы на j -м контуре L . Для получения $N - 1$ линейно независимых решений удобно взять $c_k^N = 0$, $c_k^j = \delta_{kj}$ для $k, j = 1, N - 1$ и аналогично для d_k^j .

Подставив выражения для поперечных компонент в виде (31) в (10) и (11), с учетом (32) несложно убедиться, что полученные базисные функции для L^T соответствуют нулевым продольным компонентам полей и могут быть отождествлены с T -волнами, а также с электростатическим и магнитостатическим решением для рассматриваемого волновода с многосвязным сечением (статические решения могут быть представлены суперпозицией встречных T -волн).

2.5. Условия ортогональности

В силу отмеченной симметричности спектров операторов, т. е. благодаря тому что и $X_m = \text{col}(\vec{E}_m, \vec{H}_m)$ и $X_{-m} = \text{col}(\vec{E}_m, -\vec{H}_m)$ являются элементами базиса, вместо разложения четырехмерных векторов X можно проводить разложения \vec{E} и \vec{H} по отдельности, т. е. рассматривать $L_2^4(S, \gamma)$ как внешнее произведение подпространств для \vec{E} и \vec{H} полей: $L_2^4(S, \gamma) = L_2^2(S, \varepsilon) \otimes L_2^2(S, \mu)$. Из скалярного произведения (21) в $L_2^4(S, \gamma)$ выделим скалярное произведение в пространстве $L_2^2(S, \varepsilon)$ “электрических” векторных функций, удовлет-

воряющих граничным условиям для \vec{E} в (16), с весом ε_{\perp} :

$$(\vec{E}_1, \vec{E}_2)_e = \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dS. \quad (33)$$

И аналогично для пространства $L_2^2(S, \mu)$ “магнитных” векторов, удовлетворяющих граничным условиям для \vec{H} в (16), с весом μ_{\perp} :

$$(\vec{H}_1, \vec{H}_2)_h = \frac{1}{S} \int_S \mu_{\perp} \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 dS. \quad (34)$$

Собственные функции задач (24), (27) и (30) в силу симметричности рассматриваемых операторов, а также ввиду того что $L^H \subset \text{Ker } W_E$, $L^E \subset \text{Ker } W_H$, $L^T = \text{Ker } W_E \cap \text{Ker } W_H$ удовлетворяют следующим условиям ортогональности в $L_2^2(S, \mu)$ и $L_2^2(S, \varepsilon)$:

$$(\vec{E}_m^A, \vec{E}_n^B)_e = \delta_{mn} \delta_{AB}, \quad (\vec{H}_m^A, \vec{H}_n^B)_h = \delta_{mn} \delta_{AB}, \quad (35)$$

$$A, B \in \{H, E, T\}.$$

Подставляя в эти условия ортогональности представление базисных функций через скалярные потенциалы (25), можно получить следующие условия биортогональности для Φ_m^H , Ψ_m^H в пространстве $L_2(S, \mu)$ скалярных функций, удовлетворяющих условию Неймана на границе области S :

$$(\Psi_m^H, \Phi_n^H)_h = \frac{1}{S} \int_S \mu_{\perp} \Psi_m^H \Phi_n^H dS = \delta_{mn}. \quad (36)$$

Можно показать, что эта система функций образует биортогональный базис в $L_2(S, \mu)$.

Аналогично скалярные функции Φ_n^E , Ψ_n^E образуют биортогональный базис в пространстве $L_2(S, \varepsilon)$ скалярных функций, удовлетворяющих условию Дирихле на границе области S :

$$(\Psi_m^E, \Phi_n^E)_e = \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \Psi_m^E \Phi_n^E dS = \delta_{mn}. \quad (37)$$

2.6. Разложение полей и источников по базису

Построив базисы для каждого из подпространств, мы располагаем полным базисом в Гильбертовом пространстве L_2^4 , которому принадлежат как искомые поля, так и функции источников. Таким образом, поперечные компоненты полей можно представить в виде разложения по полученному модовому базису:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{1/2} \vec{E}(\vec{r}_\perp, z, t) &= \\ &= \sum_m e_m^H(z, t) \vec{E}_m^H(\vec{r}_\perp) + \sum_n e_n^E(z, t) \vec{E}_n^E(\vec{r}_\perp) + \\ &+ \sum_k e_k^T(z, t) \vec{E}_k^T(\vec{r}_\perp) = \sum_{A \in \{H, E, T\}} \sum_m e_m^A(z, t) \vec{E}_m^A(\vec{r}_\perp), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \mu_0^{1/2} \vec{H}(\vec{r}_\perp, z, t) &= \\ &= \sum_m h_m^H(z, t) \vec{H}_m^H(\vec{r}_\perp) + \sum_n h_n^E(z, t) \vec{H}_n^E(\vec{r}_\perp) + \\ &+ \sum_k h_k^T(z, t) \vec{H}_k^T(\vec{r}_\perp) = \sum_{A \in \{H, E, T\}} \sum_m h_m^A(z, t) \vec{H}_m^A(\vec{r}_\perp). \end{aligned} \quad (39)$$

Продольная компонента E_z является скалярной функцией, удовлетворяющей условию Дирихле на границе S , и, следовательно, принадлежит $L_2(S, \varepsilon)$. Поэтому для разложения E_z можно использовать систему функций $\{\Phi_n^E\}$:

$$\varepsilon_0^{1/2} E_z(\vec{r}_\perp, z, t) = \sum_n e_n^z(z, t) q_n \Phi_n^E(\vec{r}_\perp). \quad (40)$$

Здесь собственные числа q_n в виде коэффициентов добавлены с целью получить более компактные выражения в дальнейших выкладках. Аналогично можно представить H_z в $L_2(S, \mu)$ в виде разложения по $\{\Phi_m^H\}$:

$$\mu_0^{1/2} H_z(\vec{r}_\perp, z, t) = \sum_m h_m^z(z, t) p_m \Phi_m^H(\vec{r}_\perp). \quad (41)$$

В разложениях (38)-(41) коэффициенты разложения $e_m^H, e_n^E, e_k^T, h_m^H, h_n^E, h_k^T, e_n^z, h_m^z$

являются функциями продольной координаты и времени, они описывают эволюцию волноводных мод при распространении. В дальнейшем будем называть их модовыми амплитудами (поперечными или продольными для определенности). Подставляя полученные разложения полей в уравнения Максвелла в нормально-тангенциальной форме (10)-(15) и проецируя их на элементы базиса, можно получить систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют модовые амплитуды.

3. Система эволюционных волноводных уравнений

Для получения системы эволюционных волноводных уравнений (СЭВУ) подставим разложения поперечных компонент искомых полей (38), (39) в уравнения (12)-(15). Полученные уравнения спроецируем в соответствующем скалярном произведении (33) или (34) на базисные функции, используя при этом условия ортогональности (35). В результате получим бесконечную систему дифференциальных уравнений для поперечных модовых амплитуд:

$$\begin{aligned} \partial_z \mu_\parallel \left\{ \partial_\tau (\varepsilon_\parallel e_m^H) + \sum_{A \in \{H, E, T\}} \sum_{m'} L_{mm'}^{HA} \partial_z h_{m'}^A \right\} - \mu_\parallel p_m^2 h_m^H &= \\ = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_m^H dS, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \partial_z \varepsilon_\parallel \left\{ \partial_\tau (\mu_\parallel h_n^E) + \sum_{A \in \{H, E, T\}} \sum_{n'} L_{nn'}^{AE} \partial_z e_{n'}^A \right\} - \varepsilon_\parallel q_n^2 e_n^E &= \\ = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_2(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}_n^E dS, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} p_m^2 e_m^H + \partial_\tau \mu_\parallel \left\{ \partial_z h_m^H + \sum_{A \in \{H, E, T\}} \sum_{m'} K_{mm'}^{AH} \partial_\tau (\varepsilon_\parallel e_{m'}^A) \right\} &= \\ = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_3(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}_m^H dS, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} q_n^2 h_n^E + \partial_\tau \varepsilon_{\parallel} \left\{ \partial_z e_n^E + \sum_{A \in \{H, E, T\}} \sum_{n'} K_{nn'}^{EA} \partial_\tau (\mu_{\parallel} h_{n'}^A) \right\} = \\ = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_4(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_n^E dS, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \partial_z \mu_{\parallel} \left\{ \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} e_k^T) + \sum_{A \in \{H, E, T\}} \sum_{k'} L_{kk'}^{TA} \partial_z h_{k'}^A \right\} = \\ = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_k^T dS, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \partial_z \varepsilon_{\parallel} \left\{ \partial_\tau (\mu_{\parallel} h_k^T) + \sum_{A \in \{H, E, T\}} \sum_{k'} L_{kk'}^{AT} \partial_z e_{k'}^A \right\} = \\ = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_2(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}_k^T dS, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mu_{\parallel} \left\{ \partial_z h_k^T + \sum_{A \in \{H, E, T\}} \sum_{k'} K_{kk'}^{AT} \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} e_{k'}^A) \right\} = \\ = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_3(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}_k^T dS, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \varepsilon_{\parallel} \left\{ \partial_z e_k^T + \sum_{A \in \{H, E, T\}} \sum_{k'} K_{kk'}^{TA} \partial_\tau (\mu_{\parallel} h_{k'}^A) \right\} = \\ = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_4(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_k^T dS. \end{aligned} \quad (49)$$

Далее воспользуемся уравнениями (10), (11). Исключая из них продольные компоненты полей, получим два скалярных дифференциальных уравнения. Подставим в них разложения полей (38), (39). Выражая базисные функции через скалярные потенциалы (25), (28), (31), проецируя уравнения на те же скалярные функции, воспользовавшись условиями биортогональности (36), (37), получим еще четыре эволюционных уравнения:

$$\sum_{m'} L_{m'm}^{HH} \partial_z e_{m'}^H + \partial_\tau (\mu_{\parallel} h_m^H) = \frac{1}{S} \int_S (\nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_0^{1/2} \hat{J}) p_m^{-1} \Psi_m^H dS, \quad (50)$$

$$\partial_z e_m^H + \sum_{m'} K_{mm'}^{HH} \partial_\tau (\mu_{\parallel} h_{m'}^H) = \frac{1}{S} \int_S (\nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_0^{1/2} \hat{J}) p_m^{-1} \Phi_m^H dS, \quad (51)$$

$$\sum_{n'} L_{nn'}^{EE} \partial_z h_{n'}^E + \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} e_n^E) = \frac{1}{S} \int_S (\nabla_{\perp} \cdot \mu_0^{1/2} \vec{J}) q_n^{-1} \Psi_n^E dS, \quad (52)$$

$$\partial_z h_n^E + \sum_{n'} K_{nn'}^{EE} \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} e_{n'}^E) = \frac{1}{S} \int_S (\nabla_{\perp} \cdot \mu_0^{1/2} \vec{J}) q_n^{-1} \Phi_n^E dS. \quad (53)$$

Здесь $\tau = ct$, c – скорость света в вакууме. Функции источников в правых частях уравнений определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{f}_1(\vec{r}, t) &= [\nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \mu_0^{-1/2} \hat{\rho} \times \vec{z}_0] - \partial_z (\mu_{\parallel} \mu_0^{1/2} \vec{J}), \\ \vec{f}_2(\vec{r}, t) &= [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \varepsilon_0^{-1/2} \rho] - \partial_z (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_0^{1/2} \vec{J}), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \vec{f}_3(\vec{r}, t) &= \partial_\tau (\mu_{\parallel} \mu_{\perp} [\mu_0^{1/2} \vec{J} \times \vec{z}_0]) - \mu_{\perp} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \varepsilon_0^{1/2} \hat{J}_z, \\ \vec{f}_4(\vec{r}, t) &= \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} [\vec{z}_0 \times \varepsilon_0^{1/2} \hat{J}]) - \varepsilon_{\perp} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \mu_0^{1/2} J_z. \end{aligned}$$

Бесконечные постоянные матрицы коэффициентов СЭВУ L и K описывают межмодовую связь. Они вычисляются по формулам:

$$L_{mn}^{AB} = \frac{1}{S} \int_S \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}_m^A \times \vec{H}_n^B] dS, \quad (55)$$

$$K_{mn}^{AB} = \frac{1}{S} \int_S \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}_m^A \times \vec{H}_n^B] \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} dS,$$

$$A, B \in \{H, E, T\}.$$

В СЭВУ использована сокращенная запись сумм, аналогичная (38), (39). Например:

$$\sum_{A \in \{H, E, T\}} \sum_{m'} L_{mm'}^{HA} \partial_z h_{m'}^A = \sum_{m'} L_{mm'}^{HH} \partial_z h_{m'}^H + \sum_{m'} L_{mm'}^{HE} \partial_z h_{m'}^E + \sum_{m'} L_{mm'}^{HT} \partial_z h_{m'}^T. \quad (56)$$

В дальнейшем мы также будем использовать сокращенную матричную запись для сумм

$$\mathbf{L}^{HE} \partial_z \mathbf{h}^E = \sum_{m'} L_{mm'}^{HE} \partial_z h_{m'}^E, \quad (57)$$

$$\mathbf{L}^{HT'} \partial_z \mathbf{e}^H = \sum_{k'} L_{k'k}^{HT} \partial_z e_{k'}^H,$$

где штрих обозначает транспонирование. При этом следует отметить, что 6 из 18 возможных матриц коэффициентов (55) оказываются равны нулю:

$$\mathbf{L}^{ET} = \mathbf{L}^{TH} = \mathbf{L}^{EH} = \mathbf{K}^{TE} = \mathbf{K}^{HT} = \mathbf{K}^{HE} = \mathbf{0}. \quad (58)$$

Для матриц коэффициентов можно доказать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_A \mathbf{K}^{BA} \mathbf{L}^{CA'} &= \sum_A \mathbf{L}^{AB'} \mathbf{K}^{AC} = \sum_A \mathbf{K}^{AB'} \mathbf{L}^{AC} = \\ &= \sum_A \mathbf{L}^{BA} \mathbf{K}^{CA'} = \begin{cases} \mathbf{0}, & B \neq C, \\ \mathbf{I}, & B = C, \end{cases} \end{aligned} \quad (59)$$

$$A, B, C \in \{H, E, T\}.$$

Здесь $\mathbf{0}$ – нулевая матрица, \mathbf{I} – единичная матрица. Из (59) с учетом (58) также следует:

$$\mathbf{L}^{AA} \mathbf{K}^{AA'} = \mathbf{K}^{AA} \mathbf{L}^{AA'} = \mathbf{K}^{AA'} \mathbf{L}^{AA} = \mathbf{L}^{AA'} \mathbf{K}^{AA} = \mathbf{I}, \quad (60)$$

$$A \in \{H, E, T\}.$$

Формулы (59) можно расписать в полном виде, например, следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_A \mathbf{L}^{BA} \mathbf{K}^{CA'} &= \delta_{BC} \Rightarrow \sum_n L_{mn}^{HE} K_{kn}^{EE} + \\ &+ \sum_n L_{mn}^{HH} K_{kn}^{EH} + \sum_n L_{mn}^{HT} K_{kn}^{ET} = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Система уравнений (42)-(53) является переопределенной, часть из уравнений линейно зависимы. Например, используя (60), можно показать, что уравнения (50) и (51) суть одно и то же, аналогично линейно зависимы (52) и (53). С помощью полученной системы эволюционных уравнений можно найти поперечные модовые амплитуды.

Для продольных модовых амплитуд можно получить систему уравнений, если в (10), (11) подставить разложения как поперечных компонент полей (38) и (39), так и продольных (40), (41), выразить все модовые функции через скалярные потенциалы (25), (28), (31) и затем спроецировать уравнения на те же скалярные функции, воспользовавшись условиями биортогональности (36), (37). В результате получим уравнения, проинтегрировав которые, можно по известным поперечным модовым амплитудам найти продольные:

$$\partial_z (\epsilon_{\parallel} e_n^z) = \epsilon_{\parallel} e_n^E + \frac{1}{S} \int_S \epsilon_0^{-1/2} \rho q_n^{-1} \Psi_n^E dS, \quad (62)$$

$$\partial_z (\mu_{\parallel} h_m^z) = \mu_{\parallel} h_m^H + \frac{1}{S} \int_S \mu_0^{-1/2} \hat{\rho} p_m^{-1} \Psi_m^H dS,$$

$$\partial_{\tau} (\epsilon_{\parallel} e_n^z) = - \sum_{n'} L_{nn'}^{EE} h_{n'}^E - \frac{1}{S} \int_S \mu_0^{1/2} J_z q_n^{-1} \Psi_n^E dS, \quad (63)$$

$$\partial_{\tau} (\mu_{\parallel} h_m^z) = - \sum_{m'} L_{m'm}^{HH} e_{m'}^H - \frac{1}{S} \int_S \epsilon_0^{1/2} \hat{J}_z p_m^{-1} \Psi_m^H dS.$$

Использование свойств матриц коэффициентов (58)-(60) позволяет упростить СЭВУ при решении конкретных задач.

4. Общая схема применения метода модового базиса во временной области

Анализ распространения импульсного сигнала в волноводе с помощью предложенного метода модового базиса во временной области сводится к следующей схеме.

– Решаются скалярные задачи на собственные значения (26), (29) и (32).

– По полученным скалярным базисным функциям строятся векторные базисные функции (25), (28) и (31).

– С помощью полученных базисных функций находятся матрицы коэффициентов СЭВУ по формулам (55).

– Осуществляется проецирование функций источников на базисные функции и вычисление интегралов в правых частях уравнений (42)-(53) и (62), (63).

– Решаются СЭВУ для поперечных модовых амплитуд (42)-(53).

– Полученные поперечные модовые амплитуды подставляются в уравнения (62), (63) и, интегрированием, находятся продольные модовые амплитуды.

– Полученные зависимости поперечных и продольных модовых амплитуд от времени и продольной координаты подставляются в разложения (38)-(41) и получаются формулы, по которым вычисляются искомые поля для произвольных координат и времени.

5. Заключение

В работе предложено обобщение метода модового базиса для анализа многосвязных поперечно неоднородных волноводов во временной области. Полученные результаты для частных случаев полностью согласуются с ранее известными. Исключив из рассмотрения поперечную неоднородность диэлектрической и магнитной проницаемостей, приходим к результатам работы [2], а предположив, что волноведущая структура является односвязной, получаем полное согласие с результатами работы [3].

Во второй части статьи мы рассмотрим применение изложенного метода на конкрет-

ном примере и проведем сравнение его эффективности с одним из наиболее распространенных методов во временной области – методом конечных разностей (FDTD). Отметим, что для большого класса нестационарных волноводных задач модовый базис удастся построить аналитически, в случае более сложного поперечного заполнения модовый базис может быть найден с использованием универсальных вычислительных методов, таких, как метод моментов, метод конечных элементов и т. п.

Использование полученных матричных свойств коэффициентов СЭВУ позволяет аналитически исследовать свойства дисперсионных характеристик и межмодовых преобразований.

Основное преимущество метода заключается в снижении размерности задачи: от четырехмерной задачи (как в FDTD) осуществляется переход к одной двумерной задаче для уравнения эллиптического типа (определение базисных функций) и одной двумерной задаче для уравнения гиперболического типа (эволюция модовых амплитуд), каждую из которых решать существенно легче, чем исходную.

Кроме того, использование разложения по модам, не зависящим от частоты, позволяет выделять в поведении полей определенные собственные характеристики, присущие волноводной системе (связанные собственные волны).

Литература

1. Кисунько Г. В. Электродинамика полых систем. – Л.: Издание ВКАС, 1949. – 426 с.
2. Третьяков О. А. Эволюционные волноводные уравнения // РиЭ. – 1989. – Т. 34, №5. – С. 917-926.
3. Бутрым А. Ю., Третьяков О. А. Модификация метода эволюционных волноводных уравнений для случая поперечно неоднородных волноводов // Вестник Харьковского национального университета. Радиофизика и электроника. – 2002. – №544, вып. 1. – С. 71-74.
4. Бутрым А. Ю., Третьяков О. А. Применение метода эволюционных волноводных уравнений для анализа неоднородных волноводов в частотной области // Вестник Харьковского национального университета. Радиофизика и электроника. – 2002. – №570, вып. 2. – С. 284-286.

Метод модового базису у часовій області для хвилеводу з поперечно неоднорідним багатозв'язним перерізом. 1. Загальна теорія методу

О. Ю. Бутрим, Б. А. Кочетов

Пропонується схема метода модового базису для аналізу в часовій області геометрично регулярного, поперечно неоднорідного хвилеводу з багатозв'язним перерізом. Зокрема, отримане узагальнення методу дозволяє розглядати задачі поширення електромагнітних хвиль в квазі-*ТЕМ*-лініях з поперечною магнітодіелектричною неоднорідністю.

Time Domain Mode Basis Method for a Waveguide with Transverse Inhomogeneous Multi-Connected Cross-Section.

1. The General Theory of Method

A. Yu. Butrym and B. A. Kochetov

A scheme of mode basis method for time domain analysis of a regular, transverse inhomogeneous waveguide with multi-connected cross-section is proposed. Particularly, the proposed approach allows considering propagation of transient electromagnetic waves in a quasi-*TEM* line with transverse inhomogeneous permittivity and permeability.