

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІНИ ПЛАСТОВОГО ТИСКУ НЕПРЯМИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Обґрунтовано ефективність використання непрямого методу граничних елементів для побудови чисельно-аналітичного розв'язку задачі про неусталений рух стисливої рідини в пружному пористому замкненому пласті з урахуванням дебіту свердловини, гідронепроникності зовнішньої криволінійної межі та довільних початкових умов. Здійснено низку обчислювальних експериментів для оцінки впливу характеристик середовища на зміну пластового та вибійного тисків.

Ключові слова: нестационарний процес зміни пластового тиску; непрямий метод граничних елементів.

Розглянуто однорідний за параметрами пласт, змодельований опуклою областю Ω з довільною криволінійною межею Γ_z , що містить свердловину з контуром Γ_c . Для розрахунку зміни тиску в часі у кожній точці пласта розв'язано диференціальне рівняння, що описує неусталений (нестационарний) рух пружної (стисливої) рідини в пружному пористому середовищі [Бойко та ін., 2007]:

$$\mathbf{P}_{0t}(p(\mathbf{x}, t)) = \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbf{T}, \quad (1)$$

у допущенні, що треба визначити зміну пластового і вибійного тисків у замкненому покладі за таких граничних і початкових умов

$$-\varepsilon \frac{\partial p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = 0, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_z \times \mathbf{T}, \quad (2)$$

$$-\varepsilon \frac{\partial p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^c(\mathbf{x})} = q(\mathbf{x}, \tau), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_c \times \mathbf{T}, \quad (3)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4)$$

Тут $p(\mathbf{x}, \tau)$ – тиск; $\kappa = k / (\mu \beta^*)$ – коефіцієнт п'єзопровідності; k – коефіцієнт проникності пласта; μ – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини; β^* – коефіцієнт пружної ємності насиченого пласта; $e = kh / m$ – коефіцієнт гідропровідності; $\mathbf{T} = \{\tau : 0 < \tau < \infty\}$; h – товщина пласта; $p_0(\mathbf{x})$ – початковий пластовий тиск у покладі; $\oint_{\Gamma_c} q(\mathbf{x}, \tau) d\Gamma(\mathbf{x}) = q_\Gamma(\tau)$ – дебіт свердловини;

$\mathbf{n}^c(\mathbf{x}) = (n_1^c(\mathbf{x}), n_2^c(\mathbf{x}))$ – однозначно визначена внутрішня нормаль до контуру Γ_c свердловини; $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x}))$ – однозначно визначена зовнішня нормаль до зовнішньої непроникної межі покладу Γ_z .

Згідно основних положень непрямого методу граничних елементів (НМГЕ) [Бенерджи и др., 1984] на зовнішній межі пласта й на контурі свердловини введено функції $\varphi_z(\mathbf{x}, \tau)$, $\varphi_c(\mathbf{x}, \tau)$,

які описують розподіл невідомих фіктивних джерел тиску. Записано інтегральне зображення розв'язку рівняння (1) та його похідних за нормальми з урахуванням початкового розподілу (4):

$$p(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau, U) + b_\tau(\mathbf{x}, \tau, U), \quad (5)$$

$$-\varepsilon \frac{\partial p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q) + b_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q), \quad (6)$$

$$-\varepsilon \frac{\partial p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^c(\mathbf{x})} = \mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q^c) + b_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q^c), \quad (7)$$

де $(\mathbf{x}, \tau) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}$, $U(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4)$, $Q(\mathbf{x}, \tau, \xi, x_4)$, $Q^c(\mathbf{x}, \tau, \xi, x_4)$ – відповідно фундаментальний розв'язок оператора $\mathbf{P}_{0t}(p(\mathbf{x}, \tau))$ та похідні від нього по нормальх $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{n}^c(\mathbf{x})$.

Здійснено просторово-часову дискретизацію за допомогою таких кроків. Зовнішню межу і контур свердловини розбито відповідно на V_z та V_c граничних елементів Γ_{zv}, Γ_{cv} , причому $\cup_{v=1}^{V_z} \Gamma_{zv} = \Gamma_z$, $\cup_{v=1}^{V_c} \Gamma_{cv} = \Gamma_c$, граничні елементи між собою не перетинаються. Невідомі функції, які описують розподіл фіктивних джерел тиску в межах граничних елементів Γ_{zv}, Γ_{cv} позначено через $\varphi_{zv}(\mathbf{x}, \tau)$, $\varphi_{cv}(\mathbf{x}, \tau)$. Область Ω дискретизовано на криволінійні елементи другого порядку з 8-ма вузлами Ω_q ($q = 1, \dots, Q$). Для зручності опису залежності $\varphi_{zv}(\mathbf{x}, \tau)$, $\varphi_{cv}(\mathbf{x}, \tau)$ від часу часовий промінь \mathbf{T} розбито на однакові інтервали $\mathbf{T}_k = [\tau_{k-1}, \tau_k]$ ($k = 1, 2, \dots, \tau_0 = 0$) і в межах кожного \mathbf{T}_k ($k = 1, \dots, K$, $K > 1$) ці функції апроксимовано постійними d_{zv}^m, d_{cv}^m . Дискретно-континуальну модель побудовано для покрокової часової схеми – схеми послідовності початкових умов (СППУ) [Бенерджи и др., 1984; Журавчак та ін., 1996]. Кожний крок за часом \mathbf{T}_k розглянуто як нову задачу, тобто уведено локальний час $\tilde{\tau} = \tau - (k-1)\Delta\tau$ ($\Delta\tau$ – величина часового приросту) і обчислені в кінці $(k-1)$ -го часового інтервалу значення $p(\mathbf{x}, (k-1)\Delta\tau)$ у внутрішніх

точках використано як початкові для наступного k -го кроку.

Для задоволення граничних умов використано колокаційну методику. Точки колокації вибрано у кінцевий момент часу $\Delta\tau$ у середині кожного граничного елемента $\Gamma_{zw}, w=1, \dots, V_z, \Gamma_{vw}, w=1, \dots, V_c$. Граничні інтегральні рівняння, використовуючи (6), (7), записано у вигляді СЛАР:

$$-\frac{1}{2}d_{zw}^K d_{vw} + \sum_{v=1}^{V_z} A_{tv}^z(x^w, \Delta t, Q_t) d_{zv}^P + \sum_{v=1}^{V_c} A_{tv}^c(x^w, \Delta\tau, Q_\tau^c) d_{cv}^K = -b_t^K(x^w, \Delta\tau, Q),$$

$$x^w \in \Gamma_{zw} \subset \Gamma_z, w=1, \dots, V_z, \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2}d_{cw}^K \delta_{vw} + \sum_{v=1}^{V_z} A_{tv}^c(x^{cw}, \Delta\tau, Q_\tau) d_{zv}^K + \sum_{v=1}^{V_c} A_{tv}^c(x^{cw}, \Delta\tau, Q_\tau^c) d_{cv}^K =$$

$$q(x^{cw}, \tau) - b_t^K(x^{jw}, \Delta\tau, Q^c),$$

$$x^{cw} \in \Gamma_{cw} \subset \Gamma_c, w=1, \dots, V_c. \quad (9)$$

Перед побудовою системи (8), (9) здійснено аналітичне інтегрування за часом інтегралів, що після просторово-часової дискретизації входять у ліву частину СЛАР.

Знайшовши з (8), (9) невідомі d_{zv}^K, d_{cv}^K , використано формулу, аналогічну (5), для обчислення шуканого тиску у вузлах, що описують внутрішні елементи Ω_q , в момент часу

$\Delta\tau$:

$$p^{(K)}(x^{ql}, \Delta t) = \sum_{v=1}^{V_z} A_{tv}^z(x^{ql}, \Delta t, U_t) d_{zv}^K + \sum_{v=1}^{V_c} A_{tv}^c(x^{ql}, \Delta t, U_t) d_{cv}^K + b_t^K(x, \Delta t, U),$$

$$x^{ql} \in \Omega_q, l=1, \dots, 8. \quad (10)$$

Знайдені за формулою (10) значення тиску використано для формування правої частини матриці СЛАР на наступних часових кроках.

Чисельні дослідження проведено для області Ω , вибраної у вигляді еліпса з півосями $a=800$ м, $b=600$ м, в центрі якого розміщена кругла свердловина радіуса $R=1$ м. Фізичні характеристики пласта вибирали такими:

$$\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \quad h=18\text{м}; \quad q_\Gamma(\tau)=30$$

$$\text{м}^3/\text{день} = 0.347 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}.$$

Оскільки похибки, що виникають під час застосування непрямого методу граничних елементів, зумовлені тільки процедурами

апроксимації, дискретизації та числового інтегрування, досліджено точність задоволення граничних умов на зовнішній межі та на контурі свердловини в різні моменти часу.

Зовнішню межу рівномірно розбито на 16 граничних елементів, а контур свердловини – на 8, тобто СЛАР (8), (9) складалась з 24 рівнянь. Кількість внутрішніх елементів, на які дискретизували область Ω , дорівнювала 32 (зрозуміло, що вона ніяк не впливала на розмірність матриці, оскільки інтеграл від початкової умови входить у праву частину вказаної СЛАР). Часовий інтервал $T = \{\tau : 0 < \tau < 1728000\}$ с рівномірно розбивали на 5 проміжків. Проведено дослідження для різних функцій, якими моделювали початковий розподіл тиску у пласті, зокрема, для постійного: $p_0(x) = C = 20 \cdot 10^6$ Па та у вигляді функції:

$$p_0(x) = \frac{q_\Gamma(\tau)}{4\pi R \varepsilon (R - r_{el})^2} + C, \quad (11)$$

де r, r_{el} – відстані в полярних координатах до точки x та до відповідної їй на межі еліпса. Остання функція побудована з детальнішим урахуванням узгодженості початкової та граничних умов. Відзначимо, що її використання дозволило отримати точніші значення тиску в точках поблизу контуру свердловини, але майже не вплинуло на значення у точках, розміщених ближче до зовнішньої межі. На наведених далі графіках подано розподіл тиску для початкової умови, заданої формулою (11).

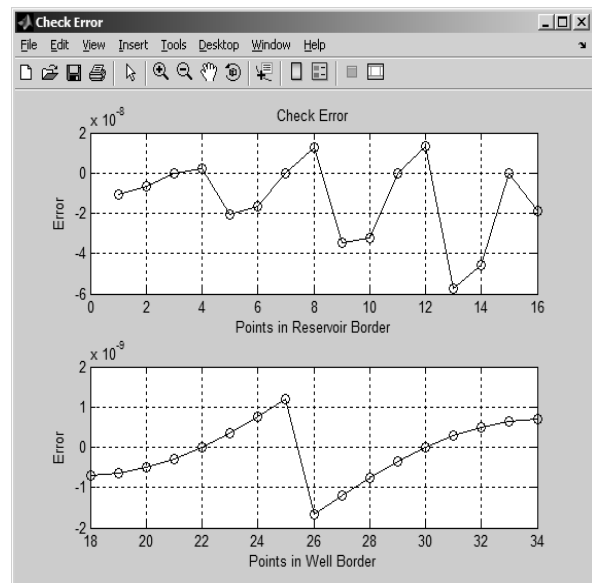


Рис. 1. Точність задоволення граничних умов на зовнішній межі та на контурі свердловини

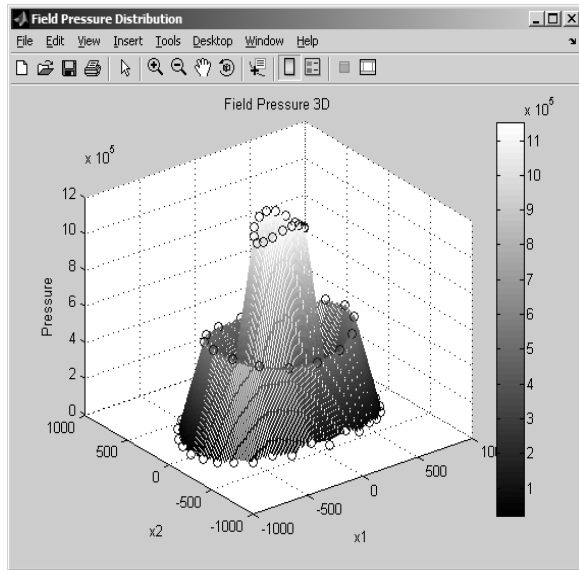


Рис. 2. Розподіл тиску через 4 дні

На рис. 1 подано абсолютну похибку задоволення граничних умов на частинах зовнішньої межі та контуру свердловини в момент часу $\tau=345600$ с (4 доби) для $k=1.1 \cdot 10^{-13}$ м³. Внаслідок симетрії задачі похибку подано лише на четвертій

частині меж. Проведено дослідження впливу зміни коефіцієнта проникності на значення пластового та вибійного тисків, які показали, що зростання коефіцієнта проникності пласта спричиняє підвищення тиску у внутрішніх точках пласта, однак на зовнішній гідронепроникливій межі ця залежність спостерігається не завжди.

На рис.2 подано розподіл тиску в пласті через 4 дні для $k=1.1 \cdot 10^{-13}$ м³.

Розроблена методика може бути легко розширена для врахування інших типів граничних умов, заданих на зовнішній межі та контурі свердловини, а також для розгляду впливу кількох свердловин.

Література

- Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
- Бойко В.С., Бойко Р.В. Підземна гідрогазомеханіка. – Львів: Априорі. – 2007. – 452 с.
- Журавчак Л.М., Грицько Є.Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996.– 220 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПЛАСТОВОГО ДАВЛЕНИЯ НЕПРЯМЫМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Л.М. Журавчак, А.Е. Струк

Показано эффективность использования непрямого метода граничных элементов для построения численно-аналитического решения задачи о неустоявшемся движении жидкости в упругом пористом пласте с учетом дебита скважины, гидронепроницаемости внешней криволинейной границы и произвольных начальных условий. Проведено ряд вычислительных экспериментов для оценки влияния характеристик среды на изменение пластового и выбойного давлений.

Ключевые слова: нестационарный процесс изменения пластового давления; не прямой метод граничных элементов.

MATHEMATICAL MODELING OF RESERVOIR PRESSURE CHANGE USING INDIRECT BOUNDARY ELEMENT TECHNIQUE

L. Zhuravchak, A. Struk

The efficiency of using the indirect boundary element technique for the construction of numerical-analytical solution of the problem of unsettled motion of compressible fluid in porous, elastic, closed reservoir, including well production, was proved. Series of computational experiments were carried out to assess the influence of characteristics of environment on reservoir pressure and well pressure change.

Key words: non-stationary process of reservoir pressure change; indirect boundary element technique.