Доповіді
національної
академії наук
України

9 • 2008

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.3.(758)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О сингуларисном эффективном значении тока в электроцепи переменного тока с управляемыми диодами и индуктивной нагрузкой

By using the singularis expansion of a jump-like function, the formula for the effective current in an electrocurcuit with controlled diodes and inductance load is deduced.

Известно множество работ, например [1–3] и библиография к ним, в которых описываются процессы в электроцепях с управляемыми диодами при различных видах нагрузки. Управляемые диоды — это тиристоры и симисторы. В цепи переменного тока и в цепи выпрямленного переменного тока управление тиристорами осуществляется по углу их открывания φ (см. рис. 1).

На рис. 1 изображено управляемое напряжение U_H на нагрузке (переменный ток); φ — угол открывания тиристора; ω — круговая частота цепи переменного тока ($\omega = 2\pi f$, f — частота, Гц); t — время. Переменное напряжение в электроцепи $U = U_m \sin \omega t$. В момент открывания тиристора на сопротивлении нагрузки прикладывается напряжение $U_m \sin\varphi$, являющееся скачкообразным, и поэтому может быть выражено в виде $U_m 1(t) \sin\varphi$, где U_m — амплитуда напряжения; φ — угол открывания тиристора; $1(t)$ — единичная скачкообразная функция $1(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{при} & t \geqslant 0 \\ 0 & \text{при} & t < 0 \end{array} \right\}$.

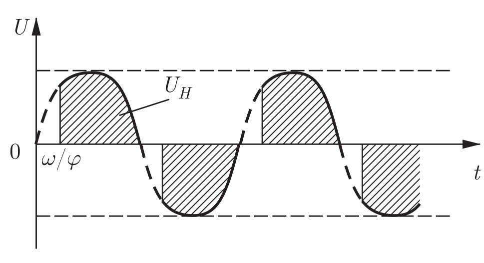

Рис. 1

Согласно работе [4], функция переменного напряжения $U(t) = U_m \sin(\omega t \pm \varphi)$ может быть представлена в виде особого (сингуларисного) разложения

$$U_1(t) = U_m \sin(\omega t \pm \varphi) =$$
$$= U_m \ell^{-\alpha t} \sin(\pm\varphi) + U_m(1 - \ell^{-\alpha t}) \sin(\omega t \pm \varphi) + |U_m| \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{n} U_{mk} \sin_k t, \tag{1}$$

$$U_2(t) = U_m(1 - \ell^{-\alpha t}) \sin(\omega t \pm \varphi) + |U_m| \ell^{-\alpha t} \sin(\pm\varphi) \sum_{k=1}^{n} U_{mk} \cos \omega_k t, \tag{2}$$

$$U_{m1} = \frac{1}{\pi}; \qquad U_{mk} = \frac{U_m}{k}; \qquad k = \frac{\omega_k}{\omega_1}.$$

Эти разложения эквивалентны. При $t = 0$ $U_1(t = 0) = U_m \sin(\pm\varphi)$, $U_2(t = 0) = |U_m| \times \times \sin(\pm\varphi) \sum\limits_{k=1}^{n} U_{mk} = U_m \sin(\pm\varphi)$, при $t = \infty$ $U_1(t) = U_m \sin(\omega t \pm \varphi)$, $U_2(t) = U_m \sin(\omega t \pm \varphi)$. При $\alpha = \infty$ $U_1(t) = U_2(t) = U_m \sin(\omega t \pm \varphi)$. То есть при принятых условиях разложения (1), (2) соответствуют напряжению $U_m \sin(\omega t \pm \varphi)$. Если обратить внимание на рис. 1 и учесть, что сопротивление нагрузки индуктивное, например, обмотка электродвигателя, то в последней возникает переходный процесс тока $i(t)$. Причем возможно, что при каждом импульсе U_H переходный процесс начинается снова. В этом случае можно принять за начало переходного процесса $i(t)$ в этой цепи момент $t = 0$, т. е. при $+\varphi/\omega = t = 0$, а напряжение U_H, приложенное к нагрузке (последовательное соединение резистора R и индуктивность L) имеет вид (1) или (2). В нашем случае возьмем разложение (2) как менее громоздкое, причем в данной работе исследование будет углублять работу [4] в определении эффективного значения тока $I_{\text{эф}}$ электроцепи.

Известно [5], что

$$I_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_m \sin(\omega t \pm \varphi)]^2 dt}, \tag{3}$$

где $T = 2T/\omega$ — период изменения тока $i(t)$.

Как видно из (3), для определения $I_{\text{эф}}$ необходимо определить мгновенное значение тока $i(t)$. Для этого составим дифференциальное уравнение рассматриваемой электроцепи в виде

$$U_m(1 - \ell^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \varphi) + |U_m| \ell^{-\alpha t} \sin\varphi \sum_{k=1}^{n} U_{mk} \cos \omega_k t = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}. \tag{4}$$

Находить $i(t)$ будем с помощью операционного исчисления по методу Карсона [6]. Будем считать, что электроцепь с R и L элементами линейная. Тогда к (4) можно применить принцип суперпозиции [5]

$$i(t) = i_1(t) + \sum_{k=1}^{n} i_k(t). \tag{5}$$

В соответствии с (5) уравнение (4) представим суммой уравнений

$$U_m(1-\ell^{-\alpha t})\sin(\omega t+\varphi)=Ri_1(t)+L\frac{di_1(t)}{dt}, \tag{6}$$

$$|U_m|\ell^{-\alpha t}\sin\varphi\sum_{k=1}^{n}U_{mk}\cos\omega_k t=\sum_{k=1}^{n}\left[Ri_k(t)+L\frac{di_k(t)}{dt}\right]. \tag{7}$$

В изображениях Карсона уравнение (6) имеет вид

$$U_m\left[\frac{p^2\sin\varphi+\omega p\cos\varphi}{p^2+\omega^2}-\frac{p(p+\alpha)\sin\varphi+\omega p\cos\varphi}{(p+\alpha)^2+\omega^2}\right]=i_1(p)L(\delta+p),$$

откуда

$$i_1(p)=\frac{U_m}{L}\left\{\frac{p^2\sin\varphi+\omega p\cos\varphi}{(\delta+p)(p^2+\omega^2)}-\frac{p(p+\alpha)\sin\varphi+\omega p\cos\varphi}{(\delta+p)[(p+\alpha)^2+\omega^2]}\right\}, \tag{8}$$

где $\delta=R/L$ — коэффициент затухания в RL цепи.

Из (8) видно, что

$$i_1(p)=\sum_{l=1}^{n}i_{1l}(p). \tag{9}$$

В (9) изображения токов $i_{1l}(p)$, $l=\overline{1,4}$, — это отдельные слагаемые (со своим знаком) в (8). Оригиналы этих токов следующие (определяли по таблицам [6]):

$$i_{11}(t)=\frac{U_m\sin\varphi}{L}\left[\frac{1}{(\delta^2+\omega^2)}(\delta\cos\omega t+\omega\sin\omega t-\delta\ell^{-\delta t})\right], \tag{10}$$

$$i_{12}(t)=\frac{U_m\omega\cos\varphi}{L}\left[\frac{1}{(\delta^2+\omega^2)}\left(\frac{\delta}{\omega}\sin\omega t-\cos\omega t+\ell^{-\delta t}\right)\right], \tag{11}$$

$$i_{13}(t)=-\frac{U_m\sin\varphi}{L}\left\langle\frac{1}{(\alpha-\delta)^2+\omega^2}\{(\alpha-\delta)\ell^{-\delta t}-\ell^{-\alpha t}[(\alpha-\delta)\cos\omega t-\omega\sin\omega t]\}\right\rangle, \tag{12}$$

$$i_{14}(t)=-\frac{U_m\omega\cos\varphi}{L}\frac{1}{(\alpha-\delta)^2+\omega^2}\left\{\ell^{-\delta t}-\frac{\ell^{-\alpha t}}{\omega}[\omega\cos\omega t-(\alpha-\delta)\sin\omega t]\right\}. \tag{13}$$

Для определения тока $\sum\limits_{k=1}^{n}i_k(t)$ найдем ток $i_k(t)$, $k=\overline{1,n}$. Изображение Карсона тока $i_k(p)$ на основании (7) имеет вид

$$i_k(p)=-\frac{|U_m|U_{mk}\sin\varphi}{L}\frac{p(p+\alpha)}{(\delta+p)[(p+\alpha)^2+\omega^2]}. \tag{14}$$

Оригинал тока $i_k(t)$, соответствующий изображению (14), записывается соотношением

$$i_k(t)=\frac{|U_m|U_{mk}\sin\varphi}{L[(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2]}\{(\alpha-\delta)\ell^{-\delta t}-\ell^{-\alpha t}[(\alpha-\delta)\cos\omega_k t-\omega_k\sin\omega_k t]\},\qquad k=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Таким образом, мгновенное значение тока в исследуемой электроцепи имеет вид

$$i(t) = (10) + (11) + (12) + (13) + \sum_{k=1}^{n}(15). \tag{16}$$

Далее, используя (3), определим эффективное значение тока $I_{\text{эф}}$ в RL цепи. В нашем случае (3) запишем в виде

$$I_{\text{эф}} = \left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{l=1}^{4} i_{1l}(t) + \sum_{k=1}^{n} i_k(t)\right]^2 dt\right\}^{1/2} = \left\langle \frac{1}{T}\int_0^T \left\{\sum_{l=1}^{4} i_{1l}^2(t) + \sum_{k=1}^{n} i_k^2(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\sum_{\substack{l=1\\ s=1\\ l\neq s}}^{C_4^2} i_{1l}(t) i_{1s}(t) + 2\sum_{\substack{k=1\\ r=1\\ k\neq r}}^{C_n^2} i_k(t) i_r(t) + 2\left[\sum_{k=1}^{n} i_k(t)\right]\sum_{l=1}^{n} i_{1l}(t)\right\} dt\right\rangle^{1/2}. \tag{17}$$

Вначале определим отдельные составляющие подынтегрального выражения в (17). Вследствие того, что вычисление (17) с учетом (16) громоздкое, будем представлять только конечные результаты

$$\frac{1}{T}\int_0^T i_{11}^2(t)\,dt = \left[\frac{U_m \sin\varphi}{L(\delta^2+\omega^2)}\right]^2 \times$$

$$\times \left[\frac{\delta^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\delta\omega}{4\pi}(1-\ell^{-4\delta\pi/\omega}) - \frac{\delta\omega^3}{\pi(\delta^2+\omega^2)}(1+\delta)(1-\ell^{-2\delta\pi/\omega})\right], \tag{18}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T i_{12}^2(t)\,dt = \left[\frac{U_m\omega \cos\varphi}{L(\omega^2+\delta^2)}\right]^2 \left\{\frac{\omega}{2\pi\delta}(1-\ell^{-4\delta\pi/\omega}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega^2}{\pi(\omega^2+\delta^2)}(1-\ell^{-2\delta\pi/\omega}) - \frac{\delta\omega^2}{\pi(\omega^2+\delta^2)}(1+\delta)(1-\ell^{-2\delta\pi/\omega})\right\}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T i_{13}^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\left\{\frac{U_m \sin\varphi}{L[(\alpha-\delta)^2+\omega^2]}\right\}^2 \left\{\frac{\alpha}{2(\alpha^2+\omega^2)}[(\alpha-\delta)^2+\omega^2](1-\ell^{-2\alpha T}) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\alpha(\alpha-\delta)}{\alpha^2+\omega^2}(1-\ell^{-\alpha T}) + \frac{2\omega^2(\alpha-\delta)}{\omega^2+(\alpha+\delta)^2}(1+\alpha-\delta)[1-\ell^{-(\alpha+\delta)T}]\right\}, \tag{20}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T i_{14}^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\left\{\frac{U_m\omega \cos\varphi}{L[(\alpha-\delta)^2+\omega^2]}\right\}\frac{1}{2\delta}(1-\ell^{-2\delta T}) + \left[\frac{1}{4\alpha} + \frac{(\alpha-\delta)^2}{4\alpha\omega^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\alpha+\omega^2}{2(\alpha^2+\omega^2)} + \frac{\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}(1-\ell^{-2\alpha T}) - 2\frac{\omega+\alpha-\delta}{\omega^2+(\alpha+\delta)^2}[1-\ell^{-(\alpha+\delta)T}]\right]. \tag{21}$$

Таким образом, составляющая в (17)

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T\sum_0^4 i_{1l}(t)\,dt = (18)+(19)+(20)+(21) = (22). \tag{22}$$

Теперь будем определять

$$\frac{1}{T_k}\int\limits_0^T\sum_0^4 i_k^2(t)\,dt. \tag{23}$$

Как видно из (15), ток

$$i_k(t) = \sum_{s=1}^{8} i_{ks}(t)\,dt,$$

где

$$i_{k1} = B_k(\alpha-\delta)\ell^{-\delta t}, \qquad i_{k2} = B_k(\alpha-\delta)\ell^{-\alpha t}\cos\omega_k t, \qquad i_{k3} = -B_k\omega_k\ell^{-\alpha t}\sin\omega_k t,$$

$$B_k = \frac{A_k}{(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2}, \qquad A_k = |U_m|U_{mk}\sin\varphi.$$

Тогда (23) запишется в виде

$$\frac{1}{m_kT_k}\int\limits_0^{m_kT_k}[i_{k1}^2+i_{k2}^2+i_{k3}^2+2(i_{k1}i_{k2}-i_{k1}i_{k3}-i_{k2}i_{k3})\,dt], \qquad m_k = \frac{T}{T_k}. \tag{24}$$

Вычислим интегралы отдельных составляющих

$$\frac{1}{m_kT_k}\int\limits_0^{m_kT_k} i_{k1}^2 dt = \frac{B_k^2(\alpha-\delta)^2}{2\delta T_k m_k}(1-\ell^{-2\delta T_k m_k}), \tag{25}$$

$$\frac{1}{m_kT_k}\int\limits_0^{m_kT_k} i_{k2}^2 dt = \frac{B_k^2(\alpha-\delta)^2}{4\alpha T_k m_k}\left(1-\frac{\alpha\omega_k}{\alpha^2+\omega_k^2}\right)(1-\ell^{-2\alpha T_k m_k}), \tag{26}$$

$$\frac{1}{m_kT_k}\int\limits_0^{m_kT_k} i_{k3}^2 dt = \frac{(B_k\omega_k)^2}{4\alpha T_k m_k}\left(1-\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega_k^2}\right)(1-\ell^{-2\alpha T_k m_k}), \tag{27}$$

$$\frac{2}{m_kT_k}\int\limits_0^{m_kT_k} i_{k1}(t)i_{k2}(t)\,dt = \frac{2[B_k(\alpha-\delta)]^2(\alpha+\delta)}{m_kT_k[(\alpha+\delta)^2+\omega_k^2]}(1-\ell^{-(\alpha+\delta)T_k m_k}), \tag{28}$$

$$-\frac{2}{m_kT_k}\int\limits_0^{m_kT_k} i_{k1}(t)i_{k3}(t)\,dt = \frac{-2B_k^2(\alpha-\delta)\omega_k^2}{m_kT_k[(\alpha+\delta)^2+\omega_k^2]}(1-\ell^{-(\alpha+\delta)T_k m_k}). \tag{29}$$

$$-\frac{2}{m_kT_k}\int\limits_0^{m_kT_k} i_{k2}(t)i_{k3}(t)\,dt = \frac{-2B_k^2(\alpha-\delta)\omega_k^3}{m_kT_k[\alpha^2+\omega_k^2]}(1-\ell^{-2\alpha T_k m_k}). \tag{30}$$

Таким образом, из (17)

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \sum_{k=1}^n i_k^2(t) = \sum_{k=1}^n\left\{\left[\sum_{l=5}^9(2l)\right]+(30)\right\} = (31). \tag{31}$$

Далее будем определять

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T i_{11}(t)i_{12}(t)\,dt = \frac{A_{12}}{T}\left[\frac{\omega^2-\delta^2+2\delta\omega}{\omega^2+\delta^2}(1-\ell^{-\delta T})-\frac{1}{2}(1-\ell^{-2\delta T})\right], \tag{32}$$

где $A_{12} = \dfrac{U_m^2\omega\sin 2\varphi}{L^2(\delta^2+\omega^2)}$,

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T i_{11}(t)i_{13}(t)\,dt = \frac{A_{13}}{T}\left\{\frac{(\alpha-\delta)\omega^2}{\alpha^2+\delta^2}(1+\omega)(1-\ell^{-\delta T})+\frac{\omega^2}{4\omega^2+\alpha^2}\left(4+\frac{\delta}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)\times\right.$$
$$\left.\times(1-\ell^{-\alpha T})-\frac{\delta}{(\alpha+\delta)^2+\omega^2}[\delta(\alpha+\delta)+\omega^2(1+\omega)][1-\ell^{-(\alpha+\delta)T}]\right\}, \tag{33}$$

где $A_{13} = \dfrac{-2U_m^2\sin^2\varphi}{L^2(\delta^2+\omega^2)[(\alpha-\delta)^2+\omega^2]}$,

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T i_{11}(t)i_{14}(t)\,dt = \frac{A_{14}}{T}\left\{\frac{\omega(\delta+\omega)}{\delta^2+\omega^2}(1-\ell^{-\delta T})+\frac{1}{2}(1-\ell^{-2\delta T})+\frac{2\delta^2}{\omega^2+(\alpha+\delta)^2}\times\right.$$
$$\left.\times[1-\ell^{-(\alpha+\delta)T}]+\left[\frac{(\alpha-\delta)(\omega+\delta)+\omega(1-\omega)}{\alpha^2+4\omega^2}+\frac{\alpha-\delta}{2\alpha}\right](1-\ell^{-\alpha T})\right\}, \tag{34}$$

где $A_{14} = -\dfrac{U_m^2\omega\sin 2\varphi}{L^2(\delta^2+\omega^2)}$,

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T i_{12}(t)i_{13}(t)\,dt = \frac{A_{23}}{T}\left\langle\frac{\alpha-\delta}{2\delta}(1-\ell^{-2\delta T})+(1-\ell^{-\delta T})\frac{\omega^2}{\omega^2+\delta^2}\left(\frac{\delta}{\omega}-\alpha+\delta\right)+\right.$$
$$+(1-\ell^{-\alpha T})\left\{\frac{1}{2\alpha}(\alpha-\delta+1)+\frac{2\omega^2}{\alpha^2+4\omega^2}\left[\alpha-\delta-(\alpha-\delta)\frac{\delta}{\omega}-1-\omega\right]\right\}+$$
$$\left.+[1-\ell^{-(\alpha+\delta)T}]\frac{\omega^2}{(\alpha+\delta)^2+\omega^2}(\omega-1)\right\rangle, \tag{35}$$

где $A_{23} = \dfrac{-U_m^2\omega\sin 2\varphi}{L^2(\delta^2+\omega^2)[(\alpha-\delta)^2+\omega^2]}$,

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T i_{12}(t)i_{14}(t)\,dt = \frac{A_{24}}{T}\left\langle \frac{1}{2\delta}(1-\ell^{-2\delta T}) + (1-\ell^{-\delta T})\frac{\omega^2}{\omega^2+\delta^2}\left(1+\frac{\delta}{\omega}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\ell^{-\alpha T})\left\{\delta\frac{4\omega}{\alpha^2+\omega^2}[(\delta-\alpha)(1+\omega)-1] + \frac{[\alpha-\delta]\delta}{\omega\alpha}\right\} +$$

$$\left. + [1-\ell^{-(\alpha+\delta)T}]\frac{\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}\left(\alpha-\delta-\frac{1}{\omega}\right)\right\rangle, \tag{36}$$

где $A_{24} = \dfrac{-2U_m^2\omega^2\cos^2\varphi}{L^2(\delta^2+\omega^2)[(\alpha-\delta)^2+\omega^2]}$,

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T i_{13}(t)i_{14}(t)\,dt = \frac{A_{34}}{T}\left\langle \frac{\alpha-\delta}{2\delta}(1-\ell^{-2\delta T}) + \frac{\omega^2}{(\alpha+\delta)^2+\omega^2}[1-\ell^{-(\alpha+\delta)T}] \times \right.$$

$$\left. \times [(\alpha-\delta)\omega+(\alpha-\delta)^2-1+\omega] + \frac{1}{2}(1-\ell^{-\alpha T})\left\{\frac{(\alpha-\delta)\omega}{\alpha} + \frac{4\omega^2}{\alpha^2+4\omega^2}[\alpha-\delta-\omega^2]\right\}\right\rangle, \tag{37}$$

где $A_{34} = \dfrac{U_m^2\omega\sin 2\varphi}{L^2[(\alpha-\delta)^2+\omega^2]^2}$,

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T i_k(t)i_r(t)\,dt = \frac{A_{kr}}{T}\left\langle \frac{\alpha-\delta}{\alpha\delta}(1-\ell^{-2\delta T}) - (\alpha-\delta) \times \right.$$

$$\left. \times \left\{\frac{\omega_k^3}{\omega_k^2+(\alpha+\delta)^2}[1-\ell^{-(\alpha+\delta)m_kT_k}] + \frac{\omega_r^3}{\omega_r^2+(\alpha+\delta)^2}[1-\ell^{-(\alpha+\delta)m_rT_r}]\right\}\right\rangle +$$

$$+ \frac{A_{kr}}{T}\left\{\frac{1}{4\alpha^2+(\omega_k-\omega_r)^2}\left[\frac{4\alpha^3(\alpha-\delta)}{(\omega_k-\omega_r)^2} - \frac{(\alpha-\delta)}{2}(\omega_r-\omega_k)^2 + \omega_r\omega_k\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\alpha^2+(\omega_k-\omega_r)^2}\left[\frac{4\alpha^3(\alpha-\delta)}{(\omega_k+\omega_r)^2} - \frac{(\alpha-\delta)}{2}(\omega_r+\omega_k)^2 + \omega_k\omega_r\right]\right\}, \tag{38}$$

где $A_{kr} = \dfrac{2|U_m|^2U_{mk}U_{mr}\sin^2\varphi}{L^2[(\alpha+\delta)^2+\omega_k^2][(\alpha+\delta)^2+\omega_r^2]}$.

Как видно из (17), число составляющих (38) равно числу сочетаний C_n^2, т. е.

$$\sum_{k=1}^{C_n^2}(38) = (39). \tag{39}$$

Перейдем к вычислению составляющей в (17), $\dfrac{2}{T}\int\limits_0^T\left[i_k(t)\sum\limits_{l=1}^4 i_{1l}(t)\right]dt$, а затем этот результат возведем в $2\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T\left[i_k(t)\sum\limits_{l=1}^4 i_{1l}(t)\right]dt$, сложим его с основными составляющими в (17) и извлечем квадратный корень из общей суммы, т. е. вычислим (17) $= I_{\text{эф}}$

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T i_k(t)i_{11}(t)\,dt = \frac{1}{T}A_{k11}\left\langle\left\{\frac{\delta(\alpha-\delta)}{\omega^2+\delta^2}(\omega+\delta)(1-\ell^{-\delta T}) - \frac{\alpha-\delta}{2}(1-\ell^{-2\delta T}) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\delta\omega_k^2}{\omega_k^2+(\alpha+\delta)^2}(\alpha-\delta-1)[1-\ell^{-(\alpha+\delta)T}]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\ell^{-\alpha T})\left\{\frac{\omega-\omega_k}{(\omega-\omega_k)+\alpha^2}[\delta(\delta-\alpha)-\delta\omega_k+\omega(\alpha-\delta)+\omega\omega_k] + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\omega+\omega_k}{(\omega+\omega_k)+\delta^2}[\delta(\delta-\alpha)+\delta\omega_k+\omega(\alpha-\delta)+\omega\omega_k]\right\}\right\rangle, \qquad (40)$$

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T i_k(t)i_{12}(t)\,dt = \frac{1}{T}A_{k12}\left\{\frac{\alpha-\delta}{2\delta}(1-\ell^{-2\delta T}) + \right.$$

$$+\frac{\alpha-\delta}{\delta^2+\omega^2}\left[\frac{\delta}{\omega}+\omega^2(\alpha-\delta)\right](1-\ell^{-\alpha T}) + \frac{\omega_k^2(\omega_k-\alpha+\delta)}{(\alpha+\delta)^2+\omega_k^2}[1-\ell^{-(\alpha+\delta)T}] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{(\omega-\omega_k)^2}{\alpha^2+(\omega-\omega_k)^2} + \frac{(\omega+\omega_k)^2}{\alpha^2+(\omega+\omega_k)^2}\right](\alpha-\delta)\left(1-\frac{\delta}{\omega}\right) +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\frac{(\omega-\omega_k)^2}{\alpha^2+(\omega-\omega_k)^2} - \frac{(\omega+\omega_k)^2}{\alpha^2+(\omega+\omega_k)^2}\right]\omega_k\left(1+\frac{\delta}{\omega}\right)\right\}, \qquad (41)$$

где $A_{k12} = \dfrac{|U_m|U_mU_{mk}\omega\sin 2\varphi}{L^2[(\delta^2+\omega^2)][(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2]}$, $T_k = \dfrac{T}{m_k}$,

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T i_k(t)i_{13}(t)\,dt = \frac{2}{T}A_{k13}\left\langle\frac{(\alpha-\delta)^2}{2\delta}(1-\ell^{-2\delta T}) + \right.$$

$$+ [1-\ell^{-(\alpha+\delta)T}]\left\{\frac{(\alpha-\delta)\omega[1-\omega(\alpha-\delta)]}{(\alpha+\delta)^2+\omega^2} + \frac{(\alpha-\delta)\omega_k[1-\omega_k(\alpha-\delta)]}{(\alpha+\delta)^2+\omega_k^2}\right\} +$$

$$+(1-\ell^{-2\alpha T})\left\{\left[\frac{(\omega-\omega_k)^2}{4\alpha^2+(\omega-\omega_k)^2} + \frac{(\omega+\omega_k)^2}{4\alpha^2+(\omega+\omega_k)^2}\right]\frac{1}{2}[(\alpha-\delta)^2+(\alpha-\delta)(\omega-\omega_k)] + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\omega\omega_k\left[\frac{(\omega-\omega_k)^2}{4\alpha^2+(\omega-\omega_k)^2} - \frac{(\omega+\omega_k)^2}{4\alpha^2+(\omega+\omega_k)^2}\right]\right\}\right\rangle, \qquad (42)$$

где $A_{k13} = \dfrac{-|U_m|U_mU_{mk}\omega\sin^2\varphi}{L^2[(\alpha-\delta)^2+\omega^2][(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2]}$,

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T i_k(t)i_{14}(t)\,dt = -\frac{1}{T}A_{k14}\left\langle\frac{\alpha-\delta}{2\delta}(1-\ell^{-2\delta T}) + \right.$$

$$+ [1-\ell^{-(\alpha+\delta)T}]\left\{\frac{(\alpha-\delta)\omega[(\alpha-\delta-\omega)]}{(\alpha+\delta)^2+\omega^2} + \frac{\omega_k^2[\omega+\delta-\alpha]}{(\alpha+\delta)+\omega_k^2}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}(1-\ell^{-2\alpha T})\left\{\left[\frac{(\omega_k-\omega)^2}{4\alpha^2+(\omega-\omega_k)^2}+\frac{(\omega_k+\omega)^2}{4\alpha^2+(\omega+\omega_k)^2}\right]\frac{1}{\omega}[(\alpha-\delta)\omega-\alpha+\delta-\omega]+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega_k}{\omega}(\alpha-\delta)\left[\frac{(\omega-\omega_k)^2}{4\alpha^2+(\omega-\omega_k)^2}-\frac{(\omega+\omega_k)^2}{4\alpha^2+(\omega+\omega_k)^2}\right]\right\}\Bigg\rangle, \tag{43}$$

где $A_{k14} = \dfrac{U_m|U_m|U_{mk}\sin 2\varphi}{[(\alpha-\delta)^2+\omega^2][(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2]L^2}$.

Итак, последняя составляющая в (17) выражается соотношением

$$2\sum_{k=1}^{n}(40)+(41)+(42)+(43)=(44), \tag{44}$$

и выражение (17) через полученные соотношения отдельных составляющих запишем в виде (используются номера формул)

$$I_{\text{эф}} = \left[\sum_{s=8}^{9}(1s)+(31)+\sum_{l=3}^{6}(3l)+(38)+(44)\right]^{1/2}. \tag{45}$$

Общая формула (45) громоздкая, но она точно учитывает происходящие процессы в цепи с учетом сингуларисного разложения скачков напряжения U_H на индуктивной нагрузке при включении тиристора в электроцепи. Видимая громоздкость полученных формул упрощается при использовании компьютера. Заметим, что при $\varphi = 0$ и $\alpha = \infty$ из (45) эффективное значение тока в исследуемой электроцепи будет равно выражению

$$I_{\text{эф}} = I_a\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sin\Psi}{T}\left[\frac{\tau}{2}\sin\Psi(1-\ell^{-2/\tau})+\frac{2(\tau\omega)^2}{(\tau\omega)^2+1}(1-\ell^{-T/\tau})\right]\right\}^{1/2},$$

где $\tau = 1/\delta = L/R$; $I_a = U_a/\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$; $\Psi = \operatorname{arctg}(\omega L/R)$; $T = 2\pi/\omega$.

При активной нагрузке ($L = 0$) $\Psi = 0$ и $I_{\text{эф}} = I_a/\sqrt{2}$, т. е. эффективное значение тока $I_{\text{эф}}$ выражается известной формулой [5].

1. *Брухман С. С., Трофимов Н. А.* Тиристорные переключатели переменного тока. – Москва: Энергия, 1969. – 64 с.
2. *Евсеев Ю. А., Крылов С. С.* Симисторы и их применение в бытовой электроаппаратуре. – Москва: Энергоатомиздат, 1999. – 120 с.
3. *Энергетическая* электроника: Справ. пособие / Под ред. В. А. Лабунцова. – Москва: Энергоатомиздат, 1987. – 461 с.
4. *Божко А. Е.* О новой трактовке переходных процессов в электрических цепях переменного тока // Доп. НАН України. – 2005. – № 4. – С. 81–86.
5. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
6. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 23.07.2007