УДК 532.517.4

В.А. Прусов, Т.А. Сологуб

МОДЕЛЬ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТОВПА ГОРИЗОНТАЛЬНО ОДНОРІДНОЇ АТМОСФЕРИ

Запропоновано математичну модель вертикального стовпа атмосфери, у якій основна увага приділяється процесам турбулентного обміну, вимушеним конвективним рухам, що згенеровані неоднорідним рельєфом підстильної поверхні за наявності горизонтального руху повітря, та вільним конвективним рухам, що обумовлені піднімальною архімедовою силою у разі термічної неоднорідності підстильної поверхні. Проведено чисельні експерименти розв'язання задачі відновлення вертикальних профілів метеорологічних величин на обчислювальній сітці з обмеженою вхідною інформацією за даними радіозондування.

Ключові слова: математична модель, вертикальні профілі метеорологічних величин, турбулентний обмін, вимушена конвекція, вільна конвекція, чисельні експерименти.

Вступ

Взаємодія атмосфери з підстильною поверхнею відбувається через примежовий шар атмосфери (ПША). Відносно атмосферних процесів він є «стоком» кількості руху і «джерелом» тепла і вологи. У разі моделювання процесів в ПША необхідно враховувати цей вплив та особливості, що пов'язані з топографією, термічною неоднорідністю підстильної поверхні, просторовою мінливістю приземних турбулентних потоків.

Дійсна картина турбулентних потоків імпульсу, тепла і вологи у примежовому шарі, фазових та радіаційних процесів у реальній атмосфері досить складна. Вона залежить від геометричних та оптичних характеристик підстильної поверхні, вертикальних градієнтів тепла і вологи, конвективних рухів у шарах з вологоадіабатичною нестійкістю та в інверсних шарах, від структури хмар, великої кількості газоподібних та дрібнодисперсних складових повітря з різними спектральними властивостями поглинання, випромінювання й розсіяння та ін.

Математичні моделі атмосфери нині не можуть адекватно відтворювати усю цю багатопараметричну стохастичну картину турбулентних, фазових та радіаційних процесів. З урахуванням цих особливостей проблема створення напівемпіричних (параметричних) моделей процесів підсіткового масштабу була і залишається актуальною.

Для спрощення гідродинамічної моделі візьмемо умову статичної збалансованості та горизонтальної однорідності метеорологічних полів у вільній атмосфері, тобто вище примежового шару. Основними факторами, що впливають на взаємодію атмосфери і підстильної поверхні, приймемо турбулентний обмін, вимушені конвективні рухи, згенеровані неоднорідним рельєфом підстильної поверхні за наявності горизонтального руху повітря, і вільні конвективні рухи, обумовлені піднімальною силою Архімеда у разі термічної неоднорідності підстильної поверхні.

Математична модель

Уведемо невироджене перетворення координат, які пов’язані з геометрією області розв’язку задачі:

$$x = x_1,\ y = x_2,\ \sigma = H\left[x_3 - F(x_1, x_2)\right]/\left[H - F(x_1, x_2)\right], \qquad (1)$$

де $F = F(x_1, x_2)$ – рівняння рельєфу підстильної поверхні, H – висота верхнього шару.

Перетворення координат (1) відображає область розв’язку задачі в прямокутну призму, висота якої дорівнює H. Обернене перетворення задається співвідношеннями:

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = F(x_1, x_2) + \sigma\left[H - F(x_1, x_2)\right]/H .$$

Зв’язок між операторами перших похідних за координатами у старих (x_1, x_2, x_3) і нових (x, y, σ) змінних виражається відомими формулами:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{H - \sigma}{H - F}\frac{\partial}{\partial \sigma},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{H - \sigma}{H - F}\frac{\partial}{\partial \sigma}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{H}{H - F}\frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

Нехай компоненти u, v, w швидкості $\mathbf{v}$ пов'язані з координатами x, y, σ у такий спосіб: u – у напрямку зростання x (напрямок на схід), v – у напрямку зростання y (напрямок на північ), w – у напрямку зростання σ (напрямок, протилежний гравітаційній силі, тобто вгору). Тоді, вводячи позначення:

$$\sigma = H\frac{x_3 - F(x,y)}{H - F(x,y)},$$

$$\overline{w} = \frac{H}{H - F(x,y)}\left[w - \frac{H-\sigma}{H}\left(u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right] \quad , \qquad (3)$$

і враховуючи горизонтальну однорідність метеорологічних полів у вільній атмосфері, отримаємо систему рівнянь у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \overline{w}\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{H^2}{(H-F)^2}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\nu_T\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right] + f\left(v - v_g\right) - g\frac{H-\sigma}{H}\frac{\partial F}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \overline{w}\frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{H^2}{(H-F)^2}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\nu_T\frac{\partial v}{\partial \sigma}\right] - f\left(u - u_g\right) - g\frac{H-\sigma}{H}\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \overline{w}\frac{\partial w}{\partial \sigma} = \frac{H^2}{(H-F)^2}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\nu_T\frac{\partial w}{\partial \sigma}\right] - \frac{H}{H-F}\frac{g}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \sigma}\Delta\sigma,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \overline{w}\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{H^2}{(H-F)^2}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\nu_T\frac{\partial \theta}{\partial \sigma}\right] - \frac{L}{\pi}\left(\delta\frac{ds}{dt}\right) + Q_k - Q_e + Q_{rad},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \overline{w}\frac{\partial q}{\partial \sigma} = \frac{H^2}{(H-F)^2}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\nu_T\frac{\partial q}{\partial \sigma}\right] + \delta\frac{ds}{dt} + S_e - S_k$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \overline{w}\frac{\partial s}{\partial \sigma} = \frac{H^2}{(H-F)^2}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\nu_T\frac{\partial s}{\partial \sigma}\right] +$$

$$+ \frac{H}{H-F}\frac{\partial V_{pr}s}{\partial \sigma} - \delta\frac{ds}{dt} - S_e, \qquad (4)$$

де t – час; u_g та v_g – значення горизонтальних складових швидкості вітру на висоті $\sigma = 1$ (компоненти геострофічного вітру); $f = 2\Omega\sin\varphi$ – параметр Коріоліса; φ – широта; θ – потенціальна температура; L – прихована теплота конденсації; $\delta = (0,1)$ – покажчик конденсації вологи; $Q_k = LS_k/c_p$ – швидкість вивільнення схованої теплоти конденсації водяної пари в підсітковому масштабі; $Q_e = LS_e/c_p$ – швидкість вивільнення схованої теплоти випаровування води в підсітковому масштабі; S_e, S_k – внески вологості від випаровування та конденсації води відповідно в підсітковому масштабі; c_p – питома теплоємність за постійного тиску; Q_{rad} – швидкість радіаційного охолодження або нагріву в підсітковому масштабі; V_{pr} – усталена швидкість падіння частинок опадів; ν_T – коефіцієнт вертикального турбулентного обміну.

Рівняння (4) містять члени з коефіцієнтом турбулентної в'язкості ν_T та доданки, що характеризують джерела (стоки) енергії, які обумовлені радіаційними процесами в системі атмосфера – Земля та фазовими перетвореннями атмосферної вологи. Процеси взаємодії атмосфери з підстильною поверхнею, турбулентного, променистого і фазового теплообміну, конвекції та хмароутворення не можливо описати за допомогою точних диференціальних рівнянь.

Модель турбулентності

Істотне узагальнення теорії замикання моделі турбулентності здійснено шляхом введення поняття густини кінетичної енергії турбулентного пульсаційного руху:

$$k = \frac{\rho}{2}\left(\upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 + \upsilon_3'^2\right),$$

як характерного масштабу пульсації швидкості та її дисипації ε. Ця напівемпірична модель відома в наукових колах як $(k-\varepsilon)$ – модель турбулентності і є однією з найперевіреніших моделей примежового шару. Практика її застосування дає задовільні результати за одних і тих самих значень емпіричних констант у складних випадках рециркуляційних тривимірних течій. Це доводить, що $(k-\varepsilon)$ – модель доволі універсальна і загальніша серед інших відомих. Зв'язок між характерним масштабом пульсації швидкості k та її дисипацією ε дозволяє вирахувати турбулентну в'язкість за допомогою співвідношення Колмогорова – Прандтля:

$$\nu_T = ck^2/\varepsilon. \tag{5}$$

Дослідники віддають перевагу $(k-\varepsilon)$ – моделі турбулентності, насамперед, на підставі наявності великого архіву порівнянь модельних результатів з експериментальними даними. Але в разі її застосування виникають досить складні проблеми. При введенні додаткових змінних k та ε і, отже, використанні відповідних диференціальних рівнянь, виникає необхідність сформулювати початкові й граничні умови для цих нових змінних поряд зі звичайними вимогами до змінних осередненого руху u, v, w, θ, q, s. Це найчастіше далеко не тривіальна справа. Особливо важким виявляється вибір для k й ε початкових умов, оскільки для змінних осередненого руху звичайно не відомі досить точні початкові й граничні умови. Ця проблема існує також і для інших моделей, що використовують комбінацію k й l у вигляді $f = k^{\alpha} l^{\beta}$.

Один із методів, що може зм'якшити гостроту проблеми формулювання початкових і граничних умов, полягає в тому, щоб змінна величина вихрової в'язкості ν_T визначалася шляхом розв'язку окремого диференціального рівняння, що описує перенос цієї величини. Деякі модифікації зазначеного рівняння пропонувалися в роботах [2-5]. Однак, ці моделі застосовуються разом з додатковими диференціальними рівняннями для густини кінетичної енергії турбулентності або для масштабів довжини. Тобто вони не вирішують проблему формування початкових і граничних умов.

Тут ми пропонуємо рівняння для вихрової в'язкості ν_T, що є самодостатнім. Такого роду рівняння може бути знайдено шляхом маніпуляцій з рівняннями Навьє-Стокса. За тих же обмежень, що застосовуються при виведенні рівняння для k, одержуємо:

$$\frac{\partial \nu_T}{\partial t} + \overline{w}\frac{\partial \nu_T}{\partial \sigma} = \frac{H^2}{(H-F)^2}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{\nu_T}{\sigma_\nu}\frac{\partial \nu_T}{\partial \sigma}\right] +$$
$$+ C_1 \frac{\nu_T}{k}\left[\frac{\nu_T H^2}{(H-F)^2}\left(\frac{\partial V_g}{\partial \sigma}\right)^2 - \frac{g}{\theta}\frac{\nu_T H}{H-F}\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} - C_2 \varepsilon\right], \tag{6}$$

де $V_g = \sqrt{u^2 + v^2}$ – горизонтальна компонента вітру, C_1, C_2 – емпіричні постійні. У рівнянні (6) змінювання вихрової в'язкості ν_T врівноважується наступними процесами: конвективним переносом за рахунок осередненого руху (другий член у лівій частині рівняння); дифузійним переносом градієнтного характеру (перший член у правій частині рівняння); генерацією турбулентної енергії, викликаної взаємодією напруг Рейнольдса і градієнтів середньої швидкості, генерацією (дисипацією) турбулентної енергії за рахунок сил плавучості та в'язкою дисипацією енергії в тепло (вираження у квадратних дужках у другому члені в правій частині рівняння).

У правій частині рівняння (6) можна помітити додаткові невідомі змінні k та ε. Отже, їх необхідно зв'язати із залежними змінними так, щоб зробити рівняння (6) математично замкнутим. Прикладами такого роду зв'язків можуть бути модель (5) у вигляді $\varepsilon = ck^2 / \nu_T$, модель Бредшоу (P. Bradshaw) [1] (переважно для повітряних рухів з визначальним впливом підстильної поверхні):

$$\tau_T = a_1 \rho k \tag{7}$$

і модель Буссінеска (J. Boussinesq):

$$\tau_T = \rho \nu_T \frac{H}{H-F} \frac{\partial V_g}{\partial \sigma}, \tag{8}$$

або модель Кармана (Th. Karman):

$$\tau_T = \chi^2 \rho \frac{\left(\partial V_g / \partial \sigma\right)^4}{\left(\partial^2 V_g / \partial \sigma^2\right)^2}. \tag{9}$$

Комбінування (7) з (8) або (9) дозволяє знайти невідоме k. Таким чином, підставляючи k та ε, що зв'язані з залежними змінними в (6), отримаємо математично замкнуте рівняння для ν_T.

Основне обмеження в разі використання моделей (8) і (9) пов'язане з припущенням про нейтральність стратифікації атмосфери. Треба враховувати, що у приземній зоні перемішування, обумовленого плавучістю, утворюється потік енергії, спрямований вгору, що переноситься за допомогою турбулентної конвекції. Дивергенція цього потоку збуджує турбулентність у приземній зоні перемішування, а турбулентність верхніх шарів розмиває нижню основу інверсії, підмішуючи стійко стратифіковану атмосферу в середину шару й викликаючи його стовщення. Подібні ситуації не описуються моделями замикання вихрової в'язкості (8) і (9). Існує багато робіт, у яких робилися спроби узагальнити ці моделі на неадіабатичні умови введенням функцій, що обумовлені експериментально. Тут ми обмежимося розглядом одного з таких узагальнень.

Зручною безрозмірною характеристикою стійкості нижніх шарів повітря (і ступеня турбулентності в них) є число Ричардсона:

$$Ri = \frac{g}{T} \frac{H-F}{H} \frac{\partial T / \partial \sigma}{\left(\partial V_g / \partial \sigma\right)^2}.$$

Використання моделей (8) і (9) може бути узагальнене на випадок стратифікованої атмосфери введенням безрозмірної функції $\vartheta(Ri)$:

$$\tau_T = \rho \nu_T \frac{H}{H-F} \frac{\partial V_g}{\partial \sigma} \vartheta(Ri) \; , \qquad (10)$$

$$\tau_T = \chi^2 \rho \frac{\left(\partial V_g / \partial \sigma\right)^4}{\left(\partial^2 V_g / \partial \sigma^2\right)^2} \vartheta(Ri), \qquad (11)$$

яка має наступний вигляд [6]:

- при стійкій стратифікації (Ri > 0):

$$\vartheta(Ri) = (1 - 5Ri)^2; \qquad (12)$$

- при нестійкій стратифікації (Ri < 0):

$$\vartheta(Ri) = (1 - 16Ri)^{3/4}. \qquad (13)$$

З емпіричних виразів (12) і (13) випливає, що коли атмосфера стратифікована нейтрально $(-0{,}01 \le \mathrm{Ri} \le 0{,}01)$, термічний вплив мінімальний, і може існувати тільки вимушена конвекція. У разі збільшення модуля негативного значення Ri (зсув убік нестійкості) відбувається збільшення впливу сил плавучості, виникає змішана конвекція й за $\mathrm{Ri} \le -1{,}0$, як випливає з (10) або (11) та (13), установлюється режим вільної конвекції. Зворотна картина спостерігається, якщо зростають позитивні значення Ri (зсув убік стійкості). У цьому випадку сили плавучості негативні й перешкоджають розвитку турбулентності. З (10) або (11) та (12) видно, що за $\mathrm{Ri} \ge 0{,}2$ вертикальне турбулентне перемішування практично загасає й процеси в атмосфері стають ламінарними.

Експериментальна апробація моделі

Для чисельного розв'язання системи рівнянь (4) – (13) було побудовано вертикальну різницеву сітку, що включає $M = 37$ лічильний рівень, з нерівномірним розподіленням величини кроку сітки:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{H} = 1 - \frac{\ln\{[\beta + 1 - (\sigma/H)]/[\beta - 1 + (\sigma/H)]\}}{\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]} \; . \qquad (14)$$

Значення β мають бути у межах $1 < \beta < \infty$. Пропонована формула дає змогу розмістити тим більшу кількість вузлів поблизу $\bar{\sigma} = \sigma / H = 0$, чим ближчим є параметр β до одиниці.

Рівняння (4) і (6) стосуються усіх внутрішніх точок вертикального шару $0 < \sigma < H$, а граничні умови накладаються у крайових точках $\sigma = 0$ та $\sigma = H$. На рівні $\sigma = 0$ формулюються граничні умови першого роду, а на рівні $\sigma = H$ – третього роду, що забезпечують виконання умов поєднання.

У сформульованих вище граничних умовах було побудовано замкнений ітераційний процес чисельного розв'язання системи рівнянь (4) – (13) для σ на відрізку $[0, H]$ на основі простішої неявної різницевої схеми:

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\tau} + \frac{\overline{w}_j^{n+1}}{h_j + h_{j-1}} \left(h_{j-1} \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{h_j} + h_j \frac{f_j^{n+1} - f_{j-1}^{n+1}}{h_{j-1}} \right) =$$
$$= \frac{1}{h_j + h_{j-1}} \left[\left(\mu_{j+1}^{n+1} + \mu_j^{n+1} \right) \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{h_j} - \right.$$
$$\left. - \left(\mu_j^{n+1} + \mu_{j-1}^{n+1} \right) \frac{f_j^{n+1} - f_{j-1}^{n+1}}{h_{j-1}} \right] + Q_j^{n+1} , \qquad (15)$$

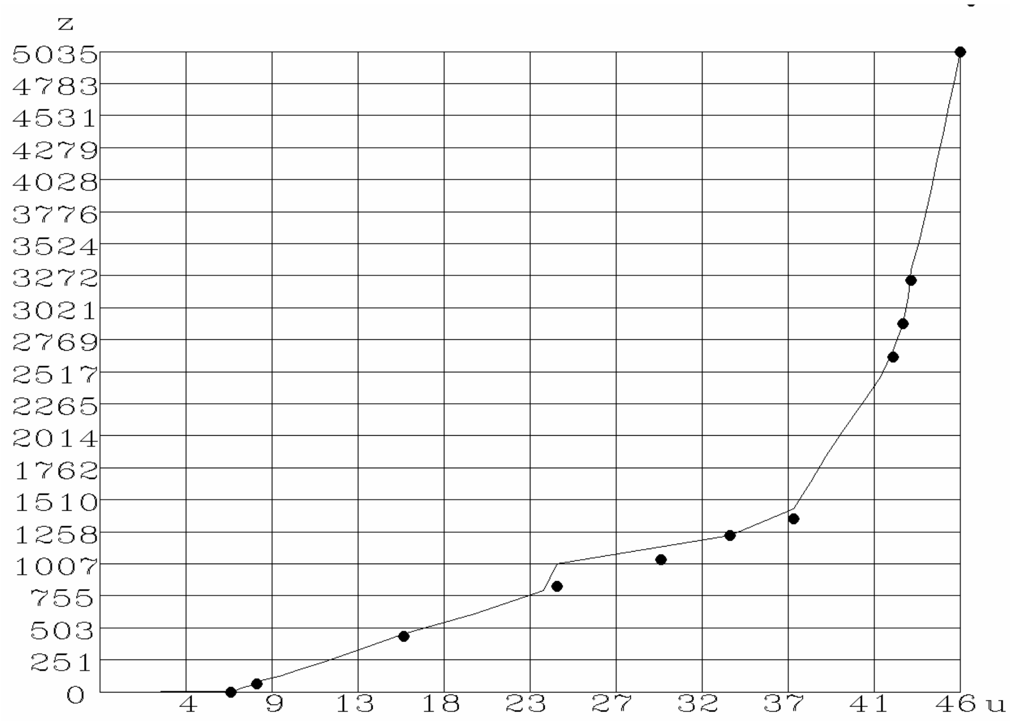
у якій крок τ виконував роль ітераційного параметра. Ітераційний процес чисельного розв'язання системи рівнянь (4) – (13) дав змогу визначити вертикальні профілі метеорологічних величин на обчислювальній сітці за їх значеннями, які відомі на стандартних рівнях.

На основі побудованої моделі було проведено чисельні експерименти відновлення вертикальних профілів метеорологічних величин за даними радіозондування, які приведені в INTERNET за адресою: http://weather.uwyo.edu/upperair/sounding.html.

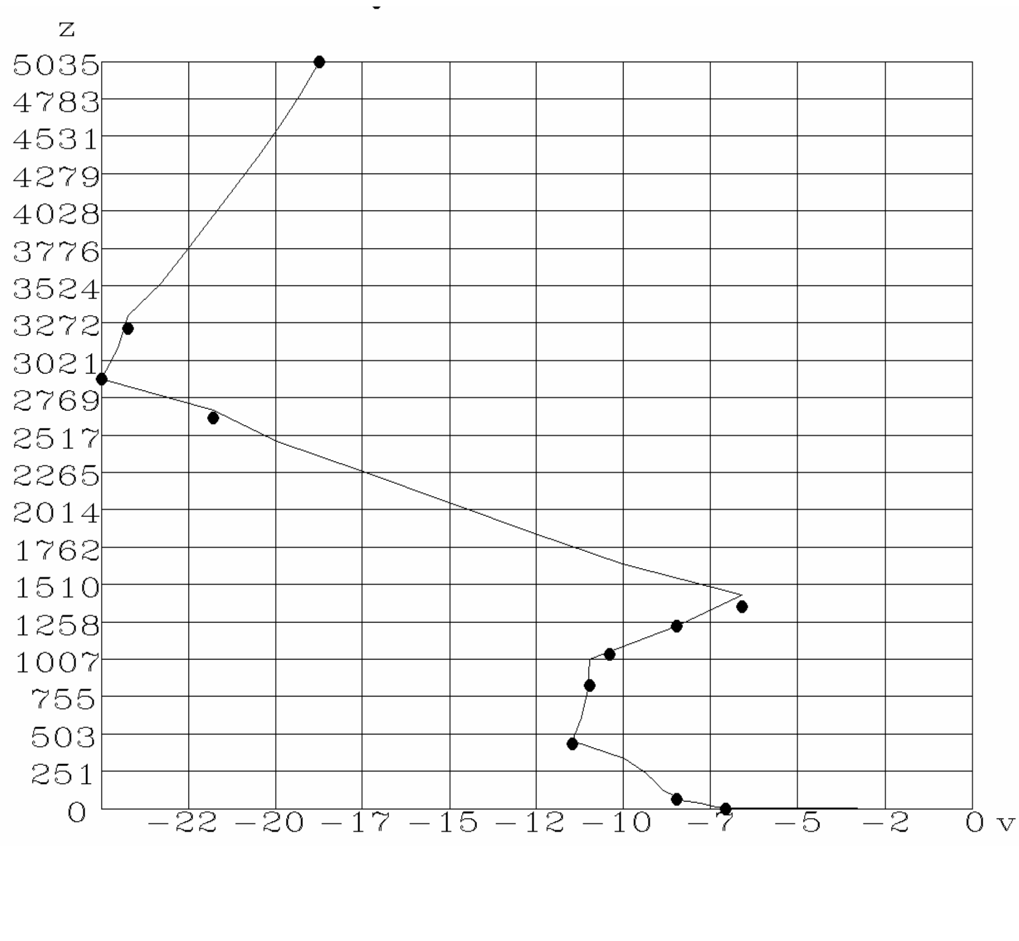
Як вхідну інформацію використовували дані на стандартних рівнях – 1000, 850, 700, 500 гПа. Проміжні дані радіозондування слугували для оцінки якості відновлення вертикальних профілів.

Результати наведено на рис. 1а-1е, де суцільними лініями позначено чисельні результати, а точками – фактичні дані радіозондування.

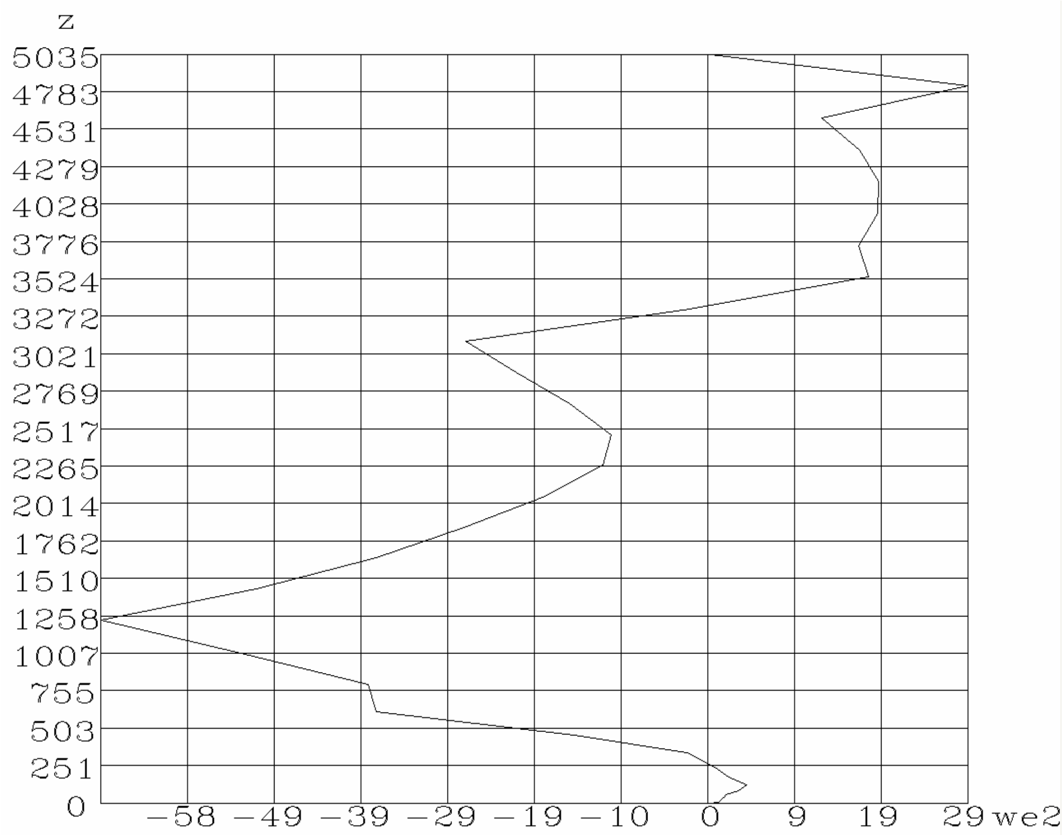
а


z
5035
4783
4531
4279
4028
3776
3524
3272
3021
2769
2517
2265
2014
1762
1510
1258
1007
755
503
251
0
4 9 13 18 23 27 32 37 41 46 u

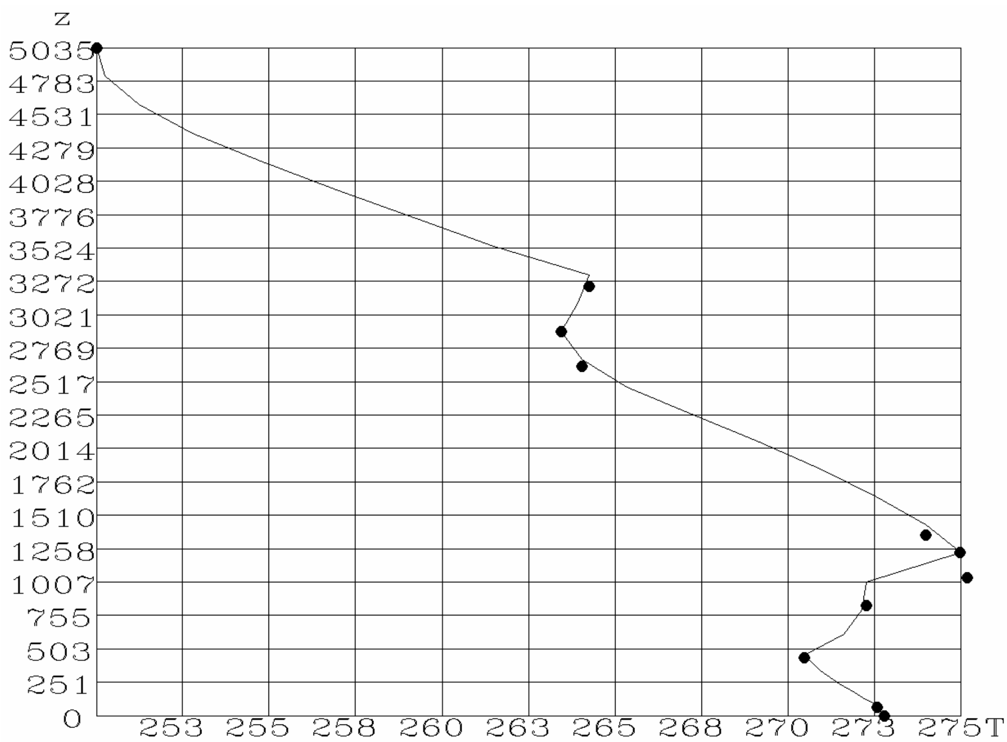
б


z
5035
4783
4531
4279
4028
3776
3524
3272
3021
2769
2517
2265
2014
1762
1510
1258
1007
755
503
251
0
−22 −20 −17 −15 −12 −10 −7 −5 −2 0 v

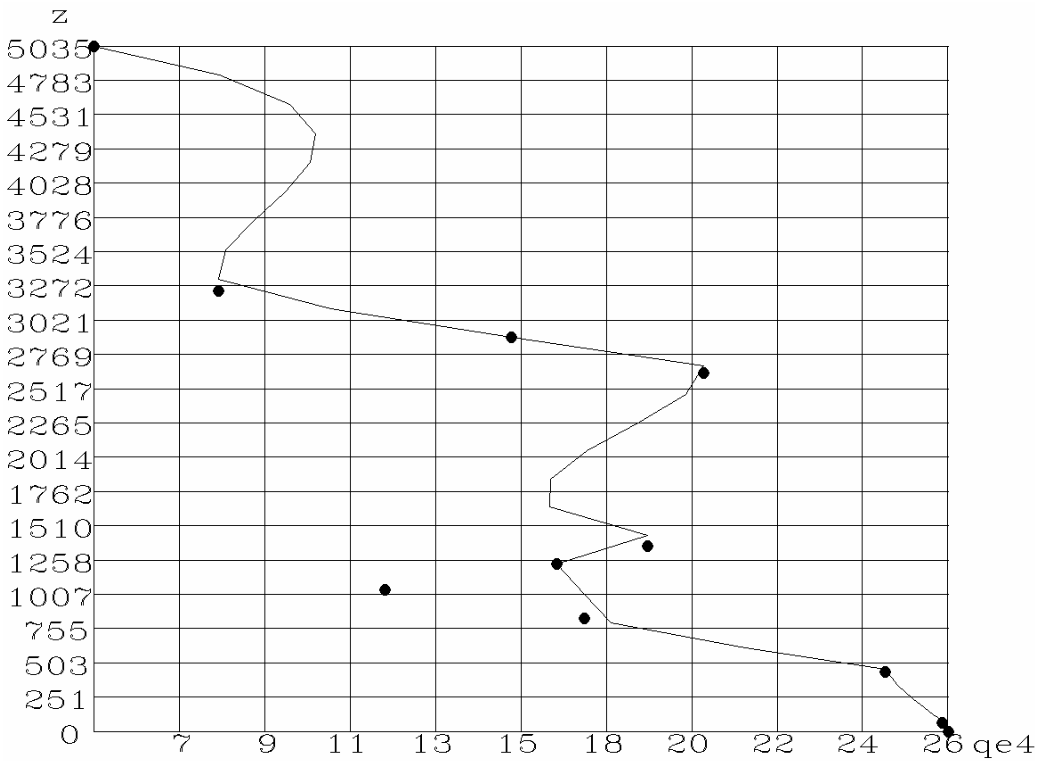
в


z
5035
4783
4531
4279
4028
3776
3524
3272
3021
2769
2517
2265
2014
1762
1510
1258
1007
755
503
251
0
−58 −49 −39 −29 −19 −10 0 9 19 29 we2

г


z
5035
4783
4531
4279
4028
3776
3524
3272
3021
2769
2517
2265
2014
1762
1510
1258
1007
755
503
251
0
253 255 258 260 263 265 268 270 273 275 T

д



е

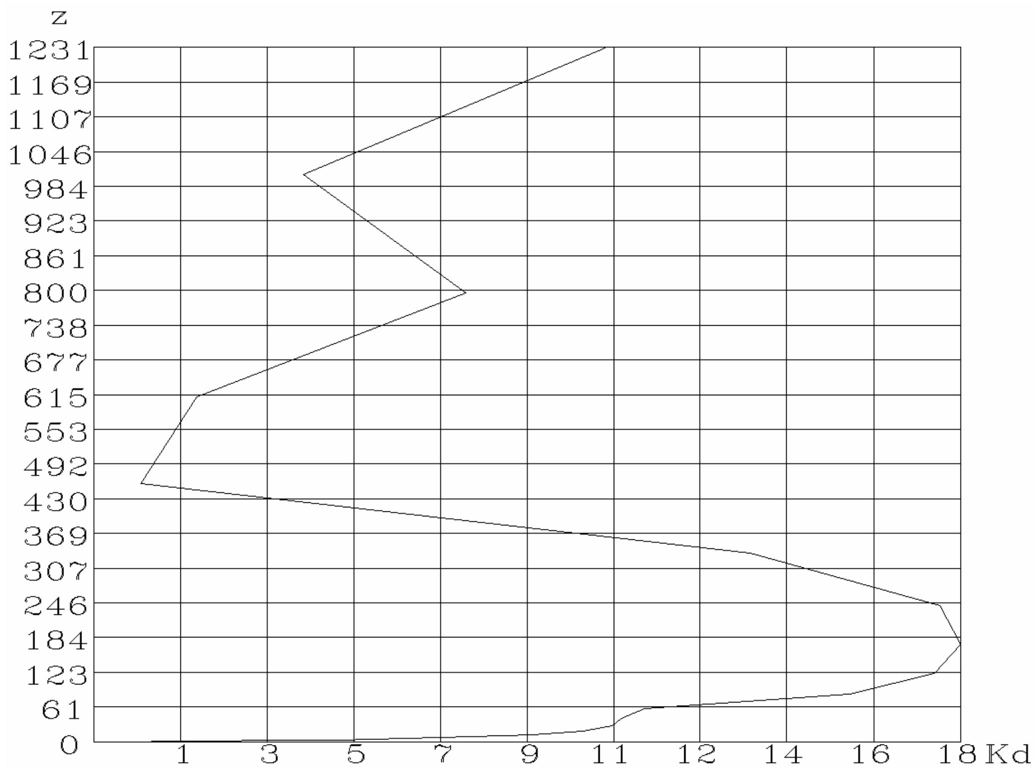


Рис. 1. Результати заповнення значень: швидкості вітру u – (*а*); v – (*б*); w – (в); температури T – (г); питомої вологості q – (д); коефіцієнта турбулентного обміну K_d – (е) у вузлах обчислювальної сітки за даними радіозонда о 18 год 03.01.1989 р.

Висновки

Чисельне розв’язання системи рівнянь, що утворюють вертикальну модель атмосфери, яка враховує процеси турбулентного обміну, вимушені конвективні рухи, що генеруються неоднорідним рельєфом підстильної поверхні та вільні конвективні рухи, що обумовлені піднімальною силою Архімеда, дає змогу розрахувати вертикальні профілі метеорологічних величин на обчислювальній сітці за їх значеннями, які відомі на стандартних рівнях. Результати проведених чисельних експериментів за даними радіозондування дозволяють зробити висновок, що отримані вертикальні профілі основних метеорологічних величин, хоча і мають складний характер, але добре узгоджуються з фактичними даними. Тобто, дана математична модель дозволяє відтворювати всю багатопараметричну картину динамічних, конвективних, турбулентних та фазових процесів у атмосфері.

* *

1. *Bradshaw P., Ferriss D. H., Atwell N. P.* Calculation of boundary layer development using the turbulence energy equation. – J. Fluid Mech., 1967. – V. 28. – Pt. 3. – P. 539-616
2. *Launder B., Spalding D. B.* Lectures in mathematical models of turbulence. – London: Academic Press, 1974.
3. *Mellor G. L., Herring H. J.* A survey of the mean turbulent field closure models, – AIAA J. – 11. – 1973. – P. 590-599.
4. *Nee V. W., Kovasznay L. S. G.* Simple phenomenological theory of turbulent, shear flows. – Phys. Fluids. – 12. – 1969. – P. 473-484.
5. *Прусов В. А., Романюк А.П.* Математическая модель турбулентности для стратифицированных сред // Наук. пр. УкрНДГМІ, – 1998.– Вип. 246. – С. 35-45.
6. *Thom A. S.* Momentum, mass and heat exchange of plant communities. – London: Academic Press / Vegetation and the atmosphere. – Vol. 1. – 1975. – P. 57-109.

Український науково-дослідний
гідрометеорологічний інститут, Київ

В.А. Прусов, Т.А.Сологуб

Модель вертикального столба горизонтально однородной атмосферы

Предложена математическая модель вертикального столба атмосферы, в которой основное внимание уделяется процессам турбулентного обмена, вынужденным конвективным движениям, которые генерированы неоднородным рельефом подстилающей поверхности при наличии горизонтального перемещения воздуха, и свободным конвективным движениям, обусловленным подъемной архимедовой силой при термической неоднородности подстилающей поверхности. Проведены численные эксперименты восстановления вертикальных профилей метеорологических величин на вычислительной сетке на основе неполной входной информации данных радиозондирования.

Ключевые слова: математическая модель, вертикальные профили метеорологических величин, турбулентный обмен, вынужденная конвекция, свободная конвекция, численные эксперименты.

V. Prusov, T. Sologub

Model of a vertical column of horizontally homogeneous atmosphere

It is offered mathematical model of a vertical column of atmosphere in which the basic attention is given to the processes of a turbulent exchange compelled convective to movements which are generated by a non-uniform relief of a spreading surface in the presence of horizontal movement of air, and free convective movements which are caused by elevating Archimedean force at thermal heterogeneity of a spreading surface. Numerical experiments of the decision of a problem of restoration of vertical profiles of meteorological sizes on a computing grid with the incomplete entering information of the data of radio sounding are made.

Keywords: mathematical model, vertical structures of meteorological sizes, the turbulent exchange, compelled convection, free convection, numerical experiments.