УДК 681.32.019.3

А.В. ФЕДУХИН, Н.В. СЕСПЕДЕС-ГАРСИЯ

К ВОПРОСУ О СТАТИСТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НАДЕЖНОСТИ

Abstract: *Generators of the random numbers distributed according to DN-distribution, exponential distribution, lognormally distribution and distribution Weibull are developed. Their characteristics of accuracy, stability, independence and speed are investigated.*
Key words: *random numbers, the law of distribution, accuracy, stability, independence, speed.*

Анотація: *Розроблено генератори випадкових чисел, які розподілені у відповідності до DN-розподілу, експоненційного розподілу, логарифмічно нормального розподілу та розподілу Вейбулла. Досліджено їх характеристики точності, стабільності, незалежності і швидкодії.*
Ключеві слова: *випадкові числа, закон розподілу, точність, стабільність, незалежність, швидкодія.*

Аннотация: *Разработаны генераторы случайных чисел, распределенных в соответствии с DN-распределением, экспоненциальным распределением, логарифмически нормальным распределением и распределением Вейбулла. Исследованы их характеристики точности, стабильности, независимости и быстродействия.*
Ключевые слова: *случайные числа, закон распределения, точность, стабильность, независимость, быстродействие.*

1. Введение

Методы статистического моделирования довольно часто используются в практике надежности. Их можно использовать как для имитации результатов испытаний на надежность изделий и систем, так и для исследования наилучших вариантов выравнивания статистических данных или исследования процессов деградации. Данные методы основаны на применении генератора случайных чисел, распределенных по заданному закону распределения. В качестве случайной величины чаще всего выбирается время до отказа *i*-го изделия или время достижения процессом деградации предельного значения. Статистическое моделирование позволяет имитировать любой план испытаний и получать все статистические оценки исследуемой выборки «отказавших» изделий. Переход к количественным показателям надежности осуществляется либо непосредственно через статистические оценки (моменты и квантили) при непараметрических методах оценки надежности, либо путем вычисления параметров теоретических распределений отказов.

Способ моделирования случайных величин основан на использовании генератора равномерно распределенных в интервале [0, 1] псевдослучайных последовательностей чисел, которые используются в качестве значения вероятности отказа объекта. Задаваясь функцией распределения $F(t\ ;s,\nu)$, можно выбирать случайное значение γ из равномерного распределения в интервале [0, 1] и определять значение аргумента t_γ, для которого $F(t\ ;s,\nu)=\gamma$. Полученная таким образом случайная величина t_γ будет иметь заданную функцию распределения $F(t\ ;s,\nu)$. Входными параметрами генератора случайных чисел являются математическое ожидание s случайной величины t для однопараметрических функций распределения или математическое ожидание s и коэффициент вариации ν для двухпараметрических функций распределения.

2. Моделирование случайных величин с функцией *DN* – распределения

Задаваясь функцией *DN*-распределения [1, 2] и решая уравнение (1) относительно t

$$DN(t;s,v)=\Phi\left(\frac{t/s-1}{v\sqrt{t/s}}\right)+\exp\left(2v^{-2}\right)\Phi\left(-\frac{t/s+1}{v\sqrt{t/s}}\right)=\gamma\,, \tag{1}$$

где $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ – нормированное нормальное распределение; s – математическое ожидание случайной величины t; v – коэффициент вариации случайной величины t, получим случайную величину t_γ, которая будет иметь заданную функцию распределения $DN(t;s,v)$. Входными параметрами генератора случайных чисел по *DN*-распределению являются математическое ожидание s и коэффициент вариации v случайной величины t.

Решение уравнения (1) относительно t осуществляется с помощью итерационной процедуры. При этом с целью повышения быстродействия генератора рекомендуется задавать плавающую точность вычисления t_γ, равную ε=0,001γ.

С целью упрощения вычислений интегральные функции нормированного нормального распределения $\Phi(z)$ можно заменять разложением в ряд. Один из вариантов такого разложения приведен ниже:

для $A>0 \quad F(t;s,\nu)=1-F_1+E\cdot F_2$;

$A<0 \quad F(t;s,\nu)=F_3+E\cdot F_2$,

где $E=\exp\left(2V^{-2}\right)$; $A=\frac{t/s-1}{\nu\sqrt{t/s}}$; $B=-\frac{t/s+1}{\nu\sqrt{t/s}}$;

$$F_1=\frac{1}{2}\left(1+C_1A+C_2A^2+C_3A^3+C_4A^4+C_5A^5+C_6A^6\right)^{-16};$$

$$F_2=\frac{1}{2}\left(1-C_1B+C_2B^2-C_3B^3+C_4B^4-C_5B^5+C_6B^6\right)^{-16};$$

$$F_3=\frac{1}{2}\left(1-C_1A+C_2A^2-C_3A^3+C_4A^4-C_5A^5+C_6A^6\right)^{-16};$$

C_1=4,986734E-02; C_2=0,021141; C_3=3,27763E-03;

C_4=3,80036E-05; C_5=4,88906E-05; C_6=5,383E-06.

Описанный подход по генерации случайных чисел может быть практически реализован на любом алгоритмическом языке программирования, в состав которого входит встроенная функция генератора равномерного распределения *RND*. На рис. 1 и 2 приведены гистограммы, соответственно, генератора равномерного распределения γ в диапазоне [0,1] и генератора случайных чисел по *DN*-распределению (*DNGEN*) для выборки объемом $N=300$.

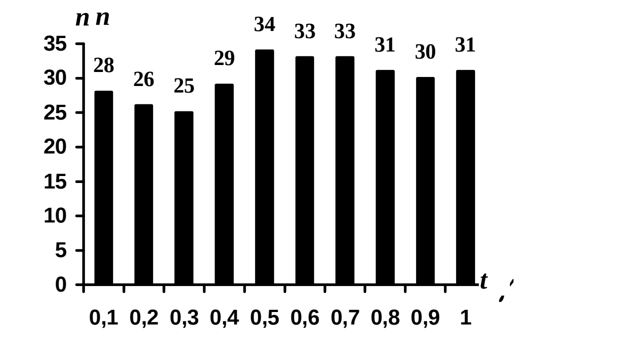

Рис. 1. Гистограмма генератора случайных чисел по равномерному распределению в интервале [0,1], N =300

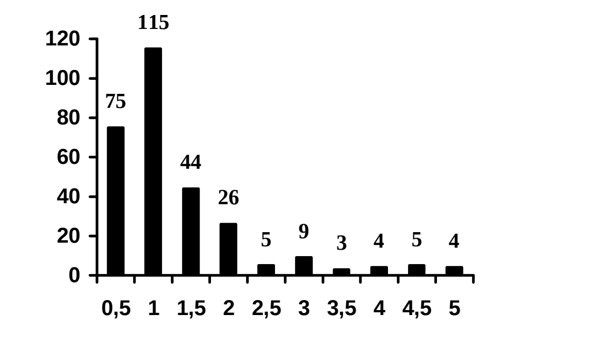

Рис. 2. Гистограмма генератора случайных чисел по *DN*-распределению, N =300, $\hat{s}$ =1,03 и $\hat{\nu}$ =0,81

Для исследования выходных характеристик генератора ($\hat{s}$ и $\hat{v}$) и оценки его стабильности было проведено моделирование 30 выборок объемом $N=300$. Полученные характеристики $\hat{s}_i$ и $\hat{v}_i$ были обработаны специальной программой, в результате которой определились статистические оценки точности выходных характеристик генератора $M[\hat{s}]$=0,9996 и $M[\hat{v}]$=1,003. Результаты моделирования для начальных параметров генератора s =1 и ν =1 показали, что оценки оказались эффективными, т.к. дисперсии среднего и коэффициента вариации малы: $D[\hat{s}]=0{,}0018$, $D[\hat{v}]=0{,}0077$. Относительная погрешность среднего составила $\delta_{\hat{S}}=1{,}94\%$ в сторону занижения, а относительная погрешность коэффициента вариации $\delta_{\hat{\nu}}=4{,}97\%$ – в сторону завышения. Коэффициент вариации среднего составил $V[s]=0{,}0429$, коэффициент вариации коэффициента вариации $V[\hat{v}]=0{,}0838$. Эти две оценки показывают разброс между выборками, т.е. стабильность формирования выборок случайных величин с заданными параметрами. Для оценки случайности выборок вычислялся коэффициент парной корреляции $K[X,Y]$ по формуле (2) для двух выборок $N=300$.

$$K[X,Y]=\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2}}, \qquad (2)$$

где $x_{i,}\,y_i$ – элементы 1-ой и 2-ой исследуемых выборок; $\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$; $\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i$.

В результате расчетов коэффициент парной корреляции равен $K[X,Y]$=0,1091, что свидетельствует о достаточной независимости выборок, формируемых генератором *DNGEN*.

3. Моделирование случайных величин с функцией экспоненциального распределения

Функция экспоненциального распределения имеет вид

$$E(t;\lambda)=1-\exp(-\lambda t),$$

где λ – интенсивность отказов.

Для удобства использования проведем параметризацию функции экспоненциального распределения через параметр s, используя известное выражение $\lambda = \frac{1}{s}$.

Задаваясь функцией экспоненциального распределения и решая уравнение (3) относительно t

$$E(t;s) = 1 - \exp(-\frac{t}{s}) = \gamma, \tag{3}$$

получим случайную величину t_γ, которая будет иметь заданную функцию распределения $E(t;s)$. Так как функция экспоненциального распределения является однопараметрической, то входным параметром генератора случайных чисел по экспоненциальному распределению являются математическое ожидание s случайной величины t.

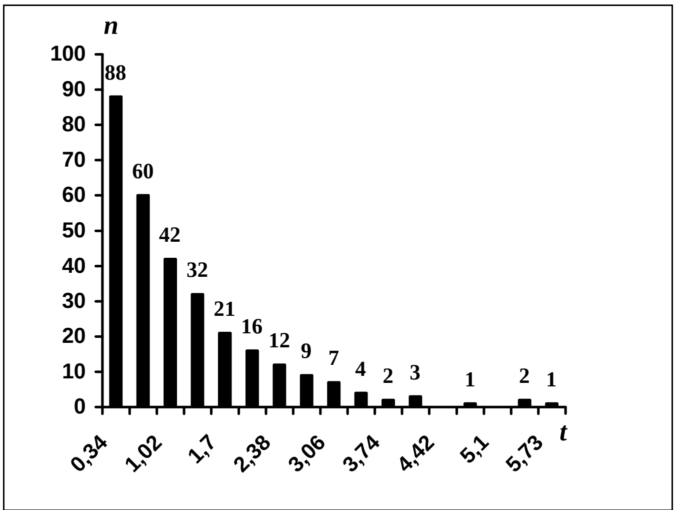

Рис. 3. Гистограмма генератора случайных чисел по экспоненциальному распределению, N =300, $\hat{s}$ =1,0 и $\hat{V}$ =0,99

Уравнение (3) решается в аналитическом виде и выражение для квантиля распределения имеет вид

$$t_\gamma = -s\ln(1-\gamma). \tag{4}$$

На рис. 3 приведена гистограмма генератора случайных чисел по экспоненциальному распределению (*EGEN)* для выборки объемом $N = 300$.

Не трудно видеть, что гистограмма (рис.3) хорошо выравнивается теоретической функцией плотности экспоненциального распределения.

4. Моделирование случайных величин с функцией логарифмически нормального распределения

Задаваясь функцией логарифмически нормального распределения, имеем

$$LN(t;\mu,\sigma) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) = \gamma, \tag{5}$$

где $\mu = \ln s - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{D}{s^2})$; $\sigma = \left[\ln(1+\frac{D}{s^2})\right]^{1/2}$; D – дисперсия случайной величины t. Для удобства использования проведем параметризацию функции логарифмически нормального распределения в параметрах s и ν, используя известное выражение $\nu = \frac{\sqrt{D}}{s}$.

$$\mu = \ln s - \frac{1}{2}\ln(1+\nu^2); \ \sigma = \left[\ln(1+\nu^2)\right]^{1/2}. \tag{6}$$

Подставив (6) в (5), получим

$$LN(t;s,\nu) = \Phi\left(\frac{\ln t - \ln s + \frac{1}{2}\ln(1+\nu^2)}{\left[\ln(1+\nu^2)\right]^{1/2}}\right) = \Phi\left(\frac{\ln\left[\frac{t(1+\nu^2)^{1/2}}{s}\right]}{\left[\ln(1+\nu^2)\right]^{1/2}}\right) = \gamma. \qquad (7)$$

Решая уравнение (7) относительно t, получим случайную величину t_γ, которая будет иметь заданную функцию распределения $LN(t;s,\nu)$. Входными параметрами генератора случайных чисел по логарифмически нормальному распределению являются математическое ожидание s и коэффициент вариации ν случайной величины t.

Решение уравнения (7) относительно t осуществляется с помощью итерационной процедуры. С целью упрощения вычислений интегральную функцию нормированного нормального распределения $\Phi(z)$ можно заменять разложением в ряд (см. р. 2):

для $A > 0 \quad F(t;s,\nu) = 1 - F_1$;

$A < 0 \quad F(t;s,\nu) = F_3$,

где $$A = \Phi\left(\frac{\ln\left[\frac{t(1+\nu^2)^{1/2}}{s}\right]}{\left[\ln(1+\nu^2)\right]^{1/2}}\right).$$

На рис. 4 приведена гистограмма генератора случайных чисел по логарифмически нормальному распределению (*LNGEN)* для выборки объемом N =300. Не трудно видеть, что гистограмма (рис. 4) хорошо выравнивается теоретической функцией плотности логарифмически нормального распределения.

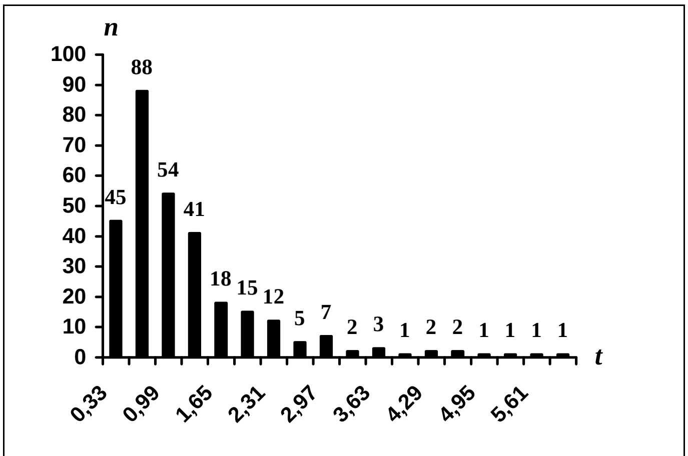

Рис. 4. Гистограмма генератора случайных чисел по логарифмически нормальному распределению, N =300, $\hat{s}$ =1,04 и $\hat{V}$ =1,02

5. Моделирование случайных величин с функцией распределения Вейбулла

Задаваясь функцией распределения Вейбулла, имеем

$$W(t;a,b) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right\} = \gamma, \qquad (8)$$

где $b = \dfrac{1}{\nu}$; $a = \dfrac{s}{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{b}\right)} = \dfrac{s}{\Gamma(1+\nu)}$;

$\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Для удобства использования проведем параметризацию функции распределения Вейбулла в параметрах s и ν:

$$W(t;s,\nu)=1-\exp\left(-\frac{t\Gamma(1+\nu)}{s}\right)^{1/\nu}=\gamma. \qquad (9)$$

Ниже, в табл. 1, приведены значения гамма – функции $\Gamma(z)$ для наиболее распространенных значений коэффициента вариации ν.

Таблица 1

ν	$\Gamma(1+\nu)$
0,3	0,8975
0,4	0,8873
0,5	0,8862
0,6	0,8935
0,7	0,9086
0,75	0,9191
0,8	0,9314
0,9	0,9618
1,0	1,0000
1,1	1,0465
1,2	1,1018
1,3	1,1667

Решая (9) относительно t, получим случайную величину t_γ, которая будет иметь заданную функцию распределения $W(t;s,\nu)$. Уравнение (9) решается в аналитическом виде, и выражение для квантиля распределения выглядит следующим образом:

$$1-\exp\left\{-\left(\frac{t\Gamma(1+\nu)}{s}\right)^{1/\nu}\right\}=\gamma; \qquad \ln(1-\gamma)=-\left[\frac{t\Gamma(1+\nu)}{s}\right]^{1/\nu};$$

$[-\ln(1-\gamma)]^\nu=\dfrac{t\Gamma(1+\nu)}{s}$. Откуда имеем

$$t_\gamma=\frac{s[-\ln(1-\gamma)]^\nu}{\Gamma(1+\nu)}. \qquad (11)$$

Входными параметрами генератора случайных чисел по распределению Вейбулла являются математическое ожидание s и коэффициент вариации ν случайной величины t.

На рис. 5 и 6 приведены гистограммы генератора случайных чисел по распределению Вейбулла (W*GEN)* для выборок объемом $N=300$ и, соответственно, коэффициентов вариации ν=1 и ν=0,7.

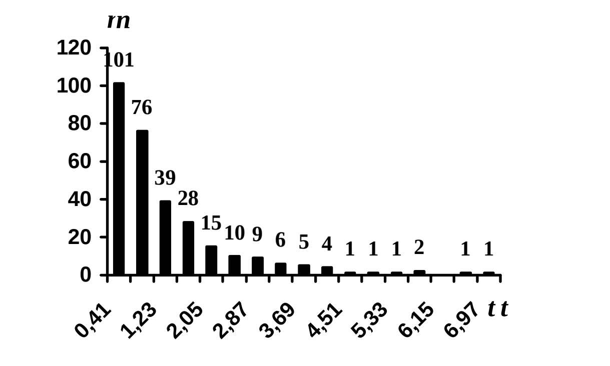

Рис. 5. Гистограмма генератора случайных чисел по распределению Вейбулла, N=300, $\hat{s}$=1,05 и $\hat{\nu}$=1,06

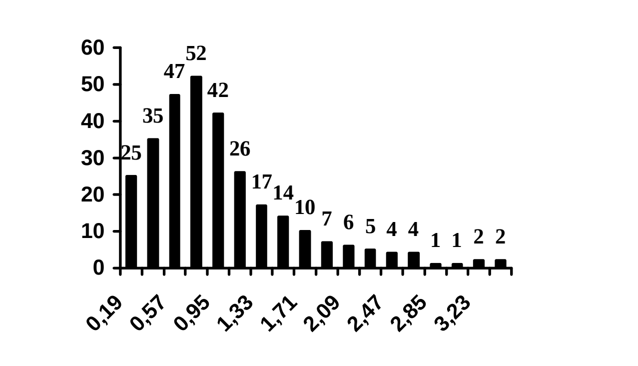

Рис. 6. Гистограмма генератора случайных чисел по распределению Вейбулла, N=300, $\hat{s}$=0,96 и $\hat{\nu}$=0,7

При ν=1 распределение Вейбулла вырождается в экспоненциальное распределение (рис. 5), а при ν=0,7 гистограмма (рис. 6) хорошо выравнивается традиционной одномодальной функцией плотности распределения с левой асимметрией.

6. Сравнительная оценка стабильности и точности генераторов случайных чисел

Для исследования выходных характеристик генераторов ($\hat{s}$ и $\hat{v}$) и оценки их стабильности было проведено моделирование 30 выборок объемом $N = 300$. В табл. 2 приведены статистические оценки точности и стабильности выходных характеристик четырех разработанных генераторов.

Таблица 2. Характеристики генераторов случайных чисел

Обозначение характеристики генератора	Числовые значения характеристик генераторов				
	DNGEN	***EGEN***	***LNGEN***	***WGEN***	
	s =1,0 v =1,0	s =1,0	s =1,0 v =1,0	s =1,0 v =1,0	s =1,0 v =0,7
Математическое ожидание среднего $M[\hat{s}]$	0,9996	0,9968	0,9902	0,9996	1,0044
Математическое ожидание коэффициента вариации $M[\hat{v}]$	1,003	0,9951	0,9484	0,9802	0,6999
Дисперсия среднего $D[\hat{s}]$	0,0018	0,0002	0,0017	0,0030	0,0016
Дисперсия коэффициента вариации $D[\hat{v}]$	0,0077	0,0007	0,0004	0,0023	0,0009
Относительная погрешность среднего $\delta_{\hat{s}}$	0,0194	0,0032	0,0098	0,0004	-0,0044*
Относительная погрешность коэффициента вариации $\delta_{\hat{v}}$	-0,0497*	-	0,0516	0,0198	0,0002
Коэффициент вариации среднего $V[\hat{s}]$	0,0429	0,0147	0,0411	0,0552	0,0400
Коэффициент вариации коэффициента вариации $V[\hat{v}]$	0,0838	0,0272	0,0204	0,0494	0,0433
Коэффициент парной корреляции $K[X,Y]$	0,1091	0,0195	0,0513	0,0130	0,0308
Время формирования случайного числа, сек.	0,113	0,0023	0,09	0,002	

* - знак «-» означает завышение в среднем выходных параметров генератора ($M[\hat{s}]$ или $M[\hat{v}]$) по отношению к задаваемым входным параметрам s или v.

7. Выводы

Разработанные генераторы случайных чисел имеют высокую точность и стабильность работы при достаточно высоком быстродействии, что обеспечивает их практическую пригодность для моделирования надежности различных систем.

Относительная погрешность в работе генераторов по среднему и коэффициенту вариации зависит от сложности процедуры вычисления квантиля распределения. В этом отношении наименьшую точность имеют генераторы *DNGEN* и *LNGEN*, использующие итерационные процедуры вычисления квантилей распределения. В целом погрешность генераторов по среднему составляет от 0,04% до 1,9%, а по коэффициенту вариации – от 0,02% до 4,9%.

Стабильность работы генераторов характеризуется коэффициентами вариации выходных параметров. Чем они меньше, тем стабильнее работают генераторы. В нашем случае коэффициенты вариации среднего находятся в диапазоне от 0,015 до 0,055, а коэффициенты вариации коэффициента вариации – от 0,02 до 0,084.

Независимость или случайность выборок, формируемых генераторами, характеризуется коэффициентом парной корреляции (при $K[X,Y]$=1 выборки X и Y считаются полностью взаимозависимыми). В нашем случае коэффициент парной корреляции находится в диапазоне от 0,013 до 0,11, что вполне удовлетворяет требованиям по независимости выборок в задачах по моделированию надежности.

Разработанные генераторы случайных чисел могут найти широкое применение в задачах моделирования надежности систем в рамках различных гипотез о теоретических законах распределения отказов элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стрельников В.П., Федухин А.В. Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. – К.: Логос, 2002. – 486 с.
2. Сеспедес-Гарсия Н.В. Статистическое моделирование надежности системы с последовательной структурой элементов // Математические машины и системы. – 1999. – № 2. – С. 123–127.