

УДК 504.1:519.05

ВЫБОР ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ ДУГ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ УПАКОВОК МЕЛКОПАРТИОННЫХ ПОТОКОВ В МНОГОПРОДУКТОВЫХ КОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЯХ

*В.А. Васянин, канд. техн. наук
(Институт телекоммуникаций и глобального
информационного пространства НАН Украины);
А.Н. Трофимчук, д-р техн. наук, проф.
(Институт телекоммуникаций и глобального
информационного пространства НАН Украины)*

В работе рассматривается и исследуется дискретная задача выбора пропускных способностей дуг при оптимизации упаковок мелкопартионных потоков в многопродуктовой сети. Построена математическая модель задачи. Показано, что исходная задача может быть сведена к независимому решению задачи формирования потоков транспортных блоков и задачи выбора пропускных способностей дуг сети. Предложена общая схема ее приближенного решения, основанная на известных и разработанных авторами алгоритмах. Приведены результаты числового моделирования исходной задачи на конкретном примере, которые подтверждают правомерность предложенной схемы решения.

У роботі розглядається й досліджується дискретна задача вибору пропускних здібностей дуг при оптимізації упакувань дрібнопартіонних потоків у багатопродуктовій мережі. Побудовано математичну модель задачі. Показано, що вихідна задача може бути зведена до незалежного рішення задачі формування потоків транспортних блоків і задачі вибору пропускних здатностей дуг мережі. Запропоновано загальну схему її наближеного рішення, засновану на відомих і розроблених авторами алгоритмах. Наведено результати числового моделювання вихідної задачі на конкретному прикладі, що підтверджують правомірність запропонованої схеми рішення.

In work the discrete problem of a choice of bandwidths of arches at optimization of packings small packages of flows in a multicommodity network are considered and investigated. The mathematical model of a problem is constructed. It is shown, that a initial problem can be reduce to independent decision of a problem of formation of flows of transport blocks and problem of a choice of bandwidths of arches of a network. The general circuit of her approached decision, based on known algorithms and algorithms,

© В.А. Васянин, А.Н. Трофимчук, 2012

developed by the authors, is offered. Results of numerical modelling of an initial problem on a concrete example which confirm legitimacy of the offered circuit of the decision are given.

Постоянное возрастание роли коммуникационных сетей в развитии и функционировании инфраструктуры хозяйствующих субъектов, увеличение объемов и существенная неоднородность различных потоков, которые передаются по сети, обуславливают необходимость решения задач оценки эффективности сетей в зависимости от их структуры, топологии, технических характеристик и технологии функционирования, а также задач управления ресурсами. Эти задачи могут быть решены только при наличии адекватных моделей перспективного развития, текущего планирования и оперативного управления ресурсами, которые учитывают характер и особенности процессов передачи и обработки потоков в реальных многопродуктовых сетях (МПС). Для решения таких задач известно достаточно много детерминированных моделей и моделей, основанных на математических методах теорий массового обслуживания и случайных марковских процессов. При этом фактически предполагается либо детерминированность, либо стационарность потоков на отдельных промежутках времени распределения ресурсов. Реальные потоки этими свойствами не обладают. Кроме того, в большинстве случаев потоки и параметры элементов сети являются дискретными величинами. Математический аппарат для проектирования и анализа функционирования МПС с дискретными потоками развит недостаточно. Необходима разработка математических моделей и методов решения, учитывающих немарковский характер случайных процессов, протекающих в МПС, неоднородность, нестационарность и дискретность распределяемых потоков.

В частности, к таким задачам относится и задача оптимизации упаковок, которая находит широкое применение при проектировании и анализе коммуникационных многопродуктовых сетей с мелкопартионными дискретными потоками, передаваемыми по сети в некоторых транспортных блоках заданного объема. При этом объемы отдельно взятых потоков, выраженные количеством единиц потока из узлов-источников в узлы-стоки, значительно меньше объема транспортного блока. Задача оптимизации упаковок заключается в слиянии (объединении) нескольких исходящих из каждого узла потоков с разными адресами назначения в общие транспортные блоки. В процессе решения задачи уже объединенные потоки могут опять сливаться в разных узлах с другими потоками. Предполагается, что вектор многопродуктового потока по дугам сети всегда может быть получен при распределении потоков по заданной схеме. В качестве примера использования задачи можно указать на технологию виртуальных контейнеров, применяемую при построении перспективных крупномасштабных общенациональных и интернациональных сетей на основе сверхширокополосных каналов и схем типа опорной сети – backbone. Такие сети

обычно базируются на протоколах синхронного мультиплексирования SDH (Synchronous Digital Hierarchy), являющихся модификацией американского стандарта на передачу данных по оптическим каналам связи SONET (Synchronous Optical Network).

Рассмотрим содержательную постановку задачи. Пусть задана простая (без петель и кратных ребер) ориентированная сеть $G = (N, E)$ с множеством узлов N , $n = |N|$ и множеством дуг E , $e = |E|$, где n и e - соответственно число узлов и дуг сети, а $|\cdot|$ - знак мощности множества. Будем считать, что сеть такова, что для каждой прямой дуги kl ($k < l$) существует обратная lk ($l > k$). На сети задана целочисленная матрица потоков $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$, $a_{ii} = 0$, $i = 1, n$. Потоки a_{ij} из источников i в стоки j , $i, j = 1, n$ должны одновременно передаваться в некоторых транспортных блоках (контейнерах) объема $\omega \gg a_{ij}$ с заданной периодичностью. При этом предполагается, что каждый поток может быть упакован в транспортный блок только целиком. Пусть S - множество пар индексов потоков (i, j) , определенное на декартовом произведении $n \times n$; x_{ij} , u_{ij} - переменные, определяющие соответственно объемы потока (количество единиц потока) из i в j в исходных единицах и транспортных блоках. Первоначально все $x_{ij} = a_{ij}$, а $u_{ij} = \lceil x_{ij} / \omega \rceil$, $ij \in S$, где знаки $\lceil \cdot \rceil$ - означают округление числа до большего целого; w_{kl} , $kl \in E$ - искомые пропускные способности дуг сети в транспортных блоках, $w_{kl} \in \{w_1, w_2, \dots, w_\alpha\}$, w_i , $i = 1, \alpha$ - упорядоченные по неубыванию целые положительные числа; d_{kl} , $kl \in E$ - длины дуг; f_{kl} , $kl \in E$ - суммарные многопродуктовые потоки в транспортных блоках, протекающие по дугам сети при заданном способе маршрутизации потоков, $f_{kl} = \sum_{ij \in S} u_{ij}^{kl}$, где u_{ij}^{kl} - поток транспортных блоков из i в j , проходящий по дуге kl ; t_{cp} , T_{max} - расчетная средняя и заданная максимальная задержка в передаче потоков в сети; t_{ij} , T_{ij} , $ij \in S$ - расчетное и заданное время на доставку исходных потоков a_{ij} из i в j ; h_i - пропускная способность i -го узла в исходных единицах потока; v_{ij} , $ij \in S$, v_{max} - число слияний потока a_{ij} с другими потоками и максимально допустимое число слияний; C_{tr}^{kl} , C_{sort}^i , $C_{груз}^i$ - некоторые нелинейные функции затрат на передачу и обработку потоков.

Требуется минимизировать функционал:

$$\sum_{kl \in E} C_{tr}^{kl} (w_{kl}, d_{kl}) + \sum_{i=1}^n C_{sort}^i (x_i, q_i) + \sum_{i=1}^n C_{груз}^i (u_i), \quad \text{где} \quad (1)$$

$$x_i = 1/2 \sum_{j=1}^n (a_{ij} + a_{ji}) + (x_{ij} + x_{ji}), \quad i = 1, n,$$

$$q_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } u_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{если } u_{ij} = 0, \quad i = 1, n, \end{cases}$$

$$u_i = \sum_{j=1}^n (u_{ij} + u_{ji}), \quad i = 1, n,$$

при ограничениях:

$$w_{kl} > f_{kl}, \quad w_{kl} \in \{w_1, w_2, \dots, w_\alpha\}, \quad \forall kl \in E, \quad (2)$$

$$t_{cp} = 1/u_\Sigma \sum_{kl \in E} f_{kl} / (w_{kl} - f_{kl}) \leq T_{\max}, \quad \text{где } u_\Sigma = \sum_{ij \in S} u_{ij}, \quad (3)$$

$$x_i \leq h_i, \quad i = 1, n, \quad (4)$$

$$t_{ij} \leq T_{ij}, \quad ij \in S, \quad (5)$$

$$v_{ij} \leq v_{\max}, \quad ij \in S. \quad (6)$$

В более общей постановке задачи к ограничениям (2)-(6) могут быть добавлены ресурсные, например, ограничения на капитальные вложения, материальные и трудовые затраты на перевод элементов сети (дуг и узлов) на более высокие уровни технического оснащения в зависимости от выделенных средств, времени и других варьируемых (возможно, стохастических) параметров. Такие задачи будем относить к динамическим и стохастическим задачам перспективного развития и рассматривать отдельно. Здесь же ограничимся рассмотрением статической детерминированной постановкой в предположении, что реализовать решение можно за один этап внедрения.

При решении задач проектирования и анализа коммуникационных сетей в идеальном случае проектировщику хотелось бы рассчитывать и сравнивать при изменении управляемых параметров различные схемы организации и функционирования сети, используя реальные стоимостные показатели, например, среднегодовые приведенные затраты на обработку и передачу потоков. Такие затраты, как правило, определяются необходимыми капитальными вложениями с учетом нормативного коэффициента их эффективности (окупаемости), установленного для данной отрасли, и эксплуатационными расходами, зависящими от себестоимости и тарифов на отдельные технологические

операции. Для транспортных сетей капитальные вложения зависят от: рабочего парка транспортных средств (с различной грузоподъемностью) и контейнеров, необходимых для обеспечения нормального функционирования сети перевозок; оборудования, устанавливаемого в узлах сети для непрерывной автоматизированной сортировки и накопления грузов по адресам назначения; рабочего парка автопогрузчиков и, возможно, для крупных узлов – количества автоматизированных контейнерных терминалов, осуществляющих сортировку и группирование исходящих, входящих и транзитных контейнеров по маршрутам следования транспортных средств. Эксплуатационные расходы состоят из нескольких компонентов и включают расходы, связанные с: движением (механической работой по транспортировке грузов); объемами обрабатываемых и перевозимых грузов; расстоянием перевозок; временем доставки грузов адресату; обслуживанием и ремонтом сортировочного оборудования, контейнерных терминалов, рабочего парка транспортных средств, контейнеров и автопогрузчиков; содержанием штата административно-управленческого, инженерно-технического и рабочего персонала; внедрением и освоением новых информационных технологий и средств автоматизации и механизации производства; различными организационными мероприятиями и др.

В сетях передачи данных капитальные вложения зависят от суммарной стоимости используемых каналов связи и коммутационного оборудования (аппаратных шлюзов, коммутаторов, маршрутизаторов, концентраторов, мостов, повторителей, сетевых адаптеров и пр.). Обычно на практике стоимость каналов определяется как произведение стоимости одного канала-километра выбранного типа на длину канала с учетом рельефа местности. В качестве эксплуатационных расходов часто используется арендная плата за каналы связи, которая в свою очередь зависит от множества факторов.

В каждом случае определение адекватных функций затрат является сложной задачей, которая должна быть решена отдельно перед проведением численного моделирования. В настоящее время как для транспортных сетей, так и сетей передачи данных существует множество различных методик и систем функций для определения стоимостных характеристик, однако, несмотря на это, они постоянно остаются объектами пристального внимания и дальнейшего совершенствования. Ясно, что при решении задач оптимизации в целевую функцию должны быть включены только наиболее важные составляющие затрат, зависящие от искомых переменных. В сформулированной задаче предполагается перевод узлов и дуг на более высокие уровни технического оснащения, поэтому во всех составляющих целевой функции (1) должны учитываться как капитальные, так и эксплуатационные затраты, приведенные к сопоставимому виду. Отметим также, что в модели принимается сепарабельность и аддитивность всех видов функций затрат по переменным и элементам сети. Для реальных коммуникационных сетей такие условия не всегда выполняются и поэтому фактические понесенные затраты на функционирование сети за определенный

период времени могут (и, скорее всего, всегда будут) отличаться от расчетных затрат.

Рассмотрим подробнее особенности сформулированной задачи. Сначала проанализируем свойства модели, связанные с видом функционала (1). Под затратами $C_{\text{тр}}^{\text{kl}}(\bullet)$, $C_{\text{сорт}}^{\text{i}}(\bullet)$, $C_{\text{груз}}^{\text{i}}(\bullet)$ будем понимать среднегодовые приведенные затраты. Первая составляющая функционала определяет транспортные затраты (затраты на передачу потоков), вторая – затраты на обработку (сортировку) исходящих, входящих и транзитных потоков в исходных единицах, третья – затраты на обработку исходящих и входящих потоков в транспортных блоках (контейнерах). Функции $C_{\text{тр}}^{\text{kl}}(\bullet)$ имеют дискретный характер и их общий вид в зависимости от f_{kl} и d_{kl} приведен на рис.1. При $f_{\text{kl}} > w_{\text{kl}} \in \{w_1, w_2, \dots, w_\alpha\}$, $\text{kl} \in E$ необходимо увеличить пропускную способность дуги kl до большего значения из допустимого множества. Более того, при решении задачи пропускную способность дуг нужно увеличивать до тех пор, пока не начнет выполняться ограничение (3). Для реальных задач это означает, что на данном участке нужно вводить дополнительные транспортные средства или каналы связи с той же грузоподъемностью или пропускной способностью, либо выбрать новое транспортное средство или новый канал связи с большей грузоподъемностью или пропускной способностью.

Функции $C_{\text{сорт}}^{\text{i}}(\bullet)$, $C_{\text{груз}}^{\text{i}}(\bullet)$ могут быть как выпуклыми, так и вогнутыми для различных коммуникационных сетей. Так, например, для решения задач упаковок и распределения мелкопартионных потоков в многопродуктовых транспортных сетях в пакете программ [1] использован конкретный вид следующих функций:

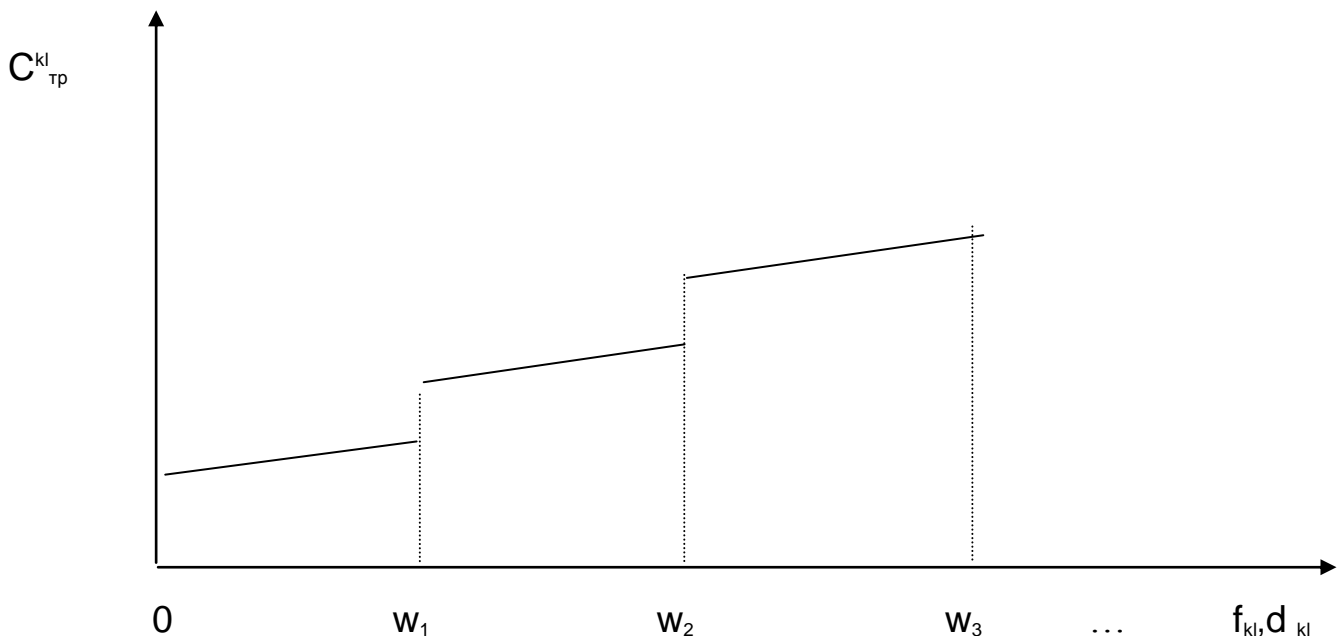


Рис. 1.

$$C_{\text{тр}}^{kl} (w_{kl}, d_{kl}) = k_1^{kl} + k_2^{kl} d_{kl}, \quad w_{kl} \in \{w_1, w_2, \dots, w_\alpha\}, \quad kl \in E,$$

$$C_{\text{сорт}}^i (x_i, q_i) = k_3^i x_i e^{-k_4^i x_i / (1 + q_i)}, \quad i = 1, n, \quad (7)$$

$C_{\text{груз}}^i (u_i) = \sqrt{k_5^i u_i^2 + k_6^i u_i}$, $i = 1, n$, где $k_1^{kl}, k_2^{kl}, k_3^i, k_4^i, k_5^i, k_6^i$ - заданные коэффициенты.

Если $C_{\text{сорт}}^i(\bullet)$ известны, то при условии их адекватности реальным процессам, проектировщик после решения задачи получит достаточно точную оценку среднегодовых приведенных затрат на обработку (сортировку) всех заданных исходных потоков в сети.

Для затрат $C_{\text{груз}}^i(\bullet)$ на обработку транспортных блоков может быть получена только нижняя оценка, поскольку не будут учтены затраты на обработку транзитных потоков и, для случая транспортной сети, затраты на обработку порожних контейнеров.

Относительно транспортных затрат $C_{\text{тр}}^{kl}(\bullet)$ следует сделать два важных замечания: во - первых, в процессе решения задачи оптимизации упаковок невозможно рассчитывать стоимости дуг используя дискретные функции, так как пропускная способность дуг неизвестна; для транспортных сетей в модели не учитываются потоки порожних контейнеров. Поэтому после решения задачи можно получить лишь приблизительную оценку реальных транспортных затрат.

Полные транспортные и погрузочно – разгрузочные затраты (или затраты на передачу и коммутацию) могут быть получены только после решения задачи оптимального распределения потоков транспортных блоков с последующей корректировкой пропускных способностей дуг и пересчетом затрат.

Из приведенных рассуждений ясно, что в общем случае целевая функция (1) будет невыпуклой и многоэкстремальной, т. е. содержать множество локальных минимумов. Целочисленность переменных задачи и наличие ограничений (5) и (6) еще сильнее затрудняет ее решение и приводит к необходимости поиска и разработки комбинаторных приближенных методов, использующих специфику структуры задачи, различные схемы агрегирования и декомпозиции общей задачи к совокупности более простых, эвристические приемы и интерактивный режим поиска решения.

Другой особенностью рассматриваемой модели являются ограничения на время доставки исходных потоков конечным адресатам (5), допустимое число слияний потоков (6) и ограничения на среднюю задержку (3).

Для транспортных сетей контрольные сроки доставки потоков, как правило, определяются диспетчерами на основании сложившейся системы перевозок и множества субъективных факторов, поэтому они могут быть изначально заданы некорректно, так как заранее не известно, по каким путям будут переданы потоки. Фактически время доставки зависит от числа слияний исходных потоков в

промежуточных узлах, времени на их пересортировку в узлах слияния, распределения потоков в транспортных блоках по маршрутам транспортных средств с учетом расписания их движения, числа транзитных перегрузок транспортных блоков с одних маршрутов на другие.

В сетях передачи данных требования на время доставки потоков наиболее жесткие и обусловлены необходимостью соблюдения для различных классов обслуживания потоков (Class of Service - CoS) заданных категорий и показателей качества обслуживания (Quality of Service – QoS). В этой связи в последние годы значительное внимание разработчиков приковано к проблемам исследования вероятностно-временных характеристик мультисервисных транспортных сетей с учетом свойств самоподобия трафика, передачи мультикастового трафика на канальном уровне, создания новых технологий на базе коммутации пакетов и виртуальных контейнеров на транспортном уровне и технологий передачи потоков на сетевом уровне, таких как MPLS (MultiProtocol Label Switching) [2].

При решении задачи необходимо предусмотреть возможность интерактивной проверки соответствия заданных значений T_{ij} некоторым предварительным расчетным t_{ij}^p , полученным, например, при условном распределении всех потоков по кратчайшим путям по ступенчатому критерию – минимум транзитных узлов на пути следования потока, минимум длины пути [3]. При некорректном задании отдельных значений T_{ij} следует ввести соответствующую поправку для корректировки этих значений.

Поскольку начальное задание контрольных сроков имеет принципиальные объективные трудности, нужно также предусмотреть расчет времени передачи всех потоков по указанному выше критерию с последующим увеличением полученных значений на некоторую константу. Изменение контрольных сроков передачи потоков на заданную величину (например, кратную контрольному времени на обработку исходных потоков в узле) означает разрешение дополнительных слияний потока на путях его следования. В задаваемой константе можно учесть также время на транспортировку транспортных блоков по более длинным путям.

Другими изменяемыми параметрами при расчете сроков доставки в интерактивном режиме могут являться: максимально допустимое число слияний потоков (6), средняя скорость движения транспортных средств, контрольное время на обработку исходных потоков в узле, время на транзитную перегрузку или перекоммутацию транспортных блоков (контейнеров).

Пусть $C' = || c'_{ij} ||_{n \times n}$ - справочная матрица слияния потоков, где

$$c'_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если поток } x_{ij} \text{ сливается с потоком } x_{ik}, \\ i, & \text{если поток } x_{ij} \text{ непосредственно направляется в узел } j, \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (8)$$

Предположим, что известна справочная матрица путей передачи потоков

$C = \| c_{ij} \|_{n \times n}$, полученная при построении кратчайших путей по ступенчатому критерию - минимум транзитных узлов на пути следования потока, минимум длины пути. Элементы

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ k, & \text{если поток } u_{ij} \text{ передается с транзитной перегрузкой в узле } k, \\ i, & \text{если поток } u_{ij} \text{ передается без перегрузок.} \end{cases} \quad (9)$$

Напомним, что кратчайшие пути π_{ij} , построенные от узла i , представляют собой дерево с корнем в i , которое может быть однозначно описано строкой справочной матрицы C . Поэтому используя эту матрицу, легко можно определить число транзитных узлов на пути следования любого потока. Известна также матрица длин построенных путей $D^* = \| d_{ij}^* \|_{n \times n}$. Пусть t_a – заданное время на обработку исходных потоков в узле. Величина t_a определяется от момента поступления потока в узел до момента его отправления из узла. Для устойчиво работающих узлов величина t_a не должна превышать дискреты времени отправления потоков в моделях текущего планирования (например, для транспортных сетей не более 1 суток, для сетей передачи данных – несколько секунд или долей секунды). Кроме того, заданы среднее время t_b на транзитную перегрузку или перекоммутацию транспортных блоков (контейнеров) и средняя скорость V_{cp} движения транспортных средств (км/час) или скорость распространения сигнала по каналам связи (для проводных и кабельных каналов ≈ 25000 км/сек). Для сетей передачи данных обычно используются различные вероятностные оценки таких параметров при предположениях (допущениях) о пуассоновских входящих потоках (экспоненциальном распределении времени поступающих запросов), обслуживании по показательному закону с заданной интенсивностью и статистической независимости времени обслуживания потоков в каналах и узлах (маршрутизаторах) сети или подчиняющихся законам распределения Эрланга, Вейбулла, Парето, логнормальному, равномерному и пр. Для более адекватной оценки задержки сообщений в сети в выражениях (3) и (5) должны учитываться и средние задержки в узлах сети (см., например, статью [4]). В настоящей работе мы не будем усложнять ограничения (3) и (5), т. к. это не имеет принципиального значения для решения задачи оптимизации упаковок.

Требуется рассчитать величины t_{ij} из (5). Точный расчет сроков доставки может быть выполнен после решения задачи распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков, когда для каждого потока известен фактический путь его следования. Для предварительной оценки сроков доставки достаточно использовать матрицу C , определяющую кратчайшие по числу транзитных узлов и расстоянию пути передачи потоков. Приведем формулы для расчета t_{ij} :

$$t_{ij} = \begin{cases} 2t_a + d_{ij}^* / (V_{cp} \delta) + \psi_{ij} t_b, & \text{если } (c'_{ij} = 0 \ \& \ i \neq j) \ \& \ c'_{ij} = i, \\ t_a(v_{ij} + 2) + \sum d_{\xi\eta}^* / (V_{cp} \delta) + \psi_{\xi\eta} t_b, & \text{если } (c'_{ij} \neq i \ \& \ c'_{ij} \neq 0), \end{cases} \quad (10)$$

$$\xi \eta \square \Omega_{ij}$$

где $\psi_{\xi\eta}$ - число транзитных перегрузок потока u_{ij} на участке (ξ, η) ; δ - коэффициент перевода в сутки для транспортных сетей ($\delta = 24$ часа, для сетей передачи данных $\delta = 1$); $\Omega_{ij} = \{(i, k_1), (k_1, k_2), \dots, (k_m, j)\}$ - определяет последовательность узлов k_1, k_2, \dots, k_m , в которых выполняется дополнительная сортировка потока a_{ij} ; v_{ij} - число таких узлов; $\&$, $!$ - знаки логического «и» и «или». Формулы (10) использованы в пакете программ [1] для инженерного расчета при практическом проектировании транспортных сетей с мелкопартионными потоками.

Утверждение 1. Решение задачи (1)-(6) может быть сведено к независимому последовательному решению следующих задач:

Задача 1. Формирование потоков (ФП).

Найти минимальное значение функционала

$$\sum_{ij \in S} C_{\text{тр}}^{ij} (u_{ij}, d_{ij}) + \sum_{i=1}^n C_{\text{сорт}}^i (x_i, q_i) + \sum_{i=1}^n C_{\text{груз}}^i (u_i), \quad (11)$$

при ограничениях (4)-(6);

Задача 2. Выбор (определение) пропускных способностей дуг (ВПС).

Найти минимальное значение функционала

$$\sum_{kl \in E} C_{\text{тр}}^{kl} (w_{kl}, d_{kl}), \quad (12)$$

при ограничениях (2),(3).

Доказательство. Сразу отметим, что в постановке задачи (11), (4)-(6) не учитываются ограничения на пропускные способности дуг, а первая составляющая функционала (1), определяющая транспортные затраты, заменена на другую, зависящую от объемов передаваемых потоков u_{ij} и расстояний d_{ij} между i и j для всех $ij \in S$. Для обоснования сделанной подмены рассмотрим сущность итерационных процессов слияния и упаковки потоков при минимизации (1) и (11). В работе [5] предложен приближенный метод решения задачи формирования потоков, идея которого заключается в выборе наилучшей стратегии определения потоков x_{ij} , над которыми итеративно выполняются преобразования:

$$\begin{aligned} x_{ik} &\leftarrow x_{ik} + x_{ij}, \\ x_{kj} &\leftarrow x_{kj} + x_{ij}, \\ c'_{ij} &\leftarrow k, x_{ij} \leftarrow 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Где " \leftarrow " знак операции присваивания; k - узел, через который выполняется

слияние, $k \in K$, K – множество узлов-претендентов, через которые может быть выполнено слияние потока x_{ij} без нарушения ограничений (4)-(6); c'_{ij} – элементы справочной матрицы слияния потоков, определяемые согласно (8).

При этом выбор x_{ij} и k для преобразования (13) осуществляется по следующей схеме:

1. Для $\forall ij \in S$ определить

$$\Delta_{ij} = \max_{k \in K} (\Delta F^-_{ij}(k) - \Delta F^+_{ij}(k)), \quad c'_{ij} = \operatorname{argmax}_{k \in K} (\Delta F^-_{ij}(k) - \Delta F^+_{ij}(k)).$$

2. Найти $ij = \operatorname{argmax}_{ij \in S} \Delta_{ij}$, $k = c'_{ij}$.

Где

$$\Delta F^-_{ij}(k) = \sum_{ij \in \{ij, ik, kj\}} C^{ij}_{\text{тр}}(u_{ij}, d_{ij}) + \sum_{i \in \{i, k, j\}} C^i_{\text{сорт}}(x_i, q_i) + \sum_{i \in \{i, k, j\}} C^i_{\text{груз}}(u_i),$$

$$\Delta F^+_{ij}(k) = \sum_{ij \in \{ik, kj\}} C^{ij}_{\text{тр}}(u'_{ij}, d_{ij}) + C^i_{\text{сорт}}(x_i, q_i - 1) + C^k_{\text{сорт}}(x_k + x_{ij}, q_k) +$$

$$+ C^j_{\text{сорт}}(x_j, q_j) + \sum_{i \in \{i, k, j\}} C^i_{\text{груз}}(u'_i), \quad \text{при}$$

$$u'_i = \sum_{\xi=1}^n (u'_{i\xi} + u'_{\xi i}), \quad i \in \{i, k, j\}, \quad u'_{ik} = \lfloor (x_{ik} + x_{ij})/\omega \rfloor, \quad u'_{kj} = \lfloor (x_{kj} + x_{ij})/\omega \rfloor, \quad u'_{ij} = 0.$$

Учитывая приведенный способ получения оценок Δ_{ij} , становится очевидным, что транспортные затраты для всех $ij \in S$ можно принять линейными от объема и расстояния и использовать для расчета транспортных затрат любую функцию удельной стоимости передачи потока объема u_{ij} на расстояние d_{ij} от пропускной способности $w_\xi \in \{w_1, w_2, \dots, w_\alpha\}$, $\xi = 1, \alpha$. Так, например, можно принять

$$C^{ij}_{\text{тр}}(u_{ij}, d_{ij}) = u_{ij}(k^{\xi_1} + k^{\xi_2} d_{ij})/w_\xi, \tag{14}$$

для всех $ij \in S$, где k^{ξ_1} , k^{ξ_2} - заданные коэффициенты.

Если выбрать для всех дуг наименьшую пропускную способность (w_1), то можно гарантировать, что значение $\sum_{kl \in E} C^{kl}_{\text{тр}}(w_{kl}, d_{kl})$ будет минимальным. Последний факт и то обстоятельство, что функции $C^i_{\text{сорт}}(x_i, q_i)$ и $C^i_{\text{груз}}(u_i)$ явно не зависят от w_{kl} , позволяют утверждать о правомерности сделанной подмены первой составляющей функционала (1) и дают возможность после решения задачи формирования потоков (11), (4)-(6) перейти к независимому решению

задачи выбора пропускных способностей (12), (2)-(3). Утверждение доказано.

Утверждение 2. При решении задачи (11), (4)-(6) в интерактивном режиме увеличение величины w_{ξ} приводит к уменьшению транспортных затрат и уменьшению значения t_{cp} , т. е. имеется возможность предварительной оценки величины пропускной способности, при которой начинает выполняться ограничение (3).

Доказательство. Из (14) непосредственно следует, что стоимость транспортировки (передачи) единицы потока с увеличением грузоподъемности транспортных средств или пропускной способности каналов связи уменьшается. При этом уменьшается также значение средней задержки в сети t_{cp} , т. е. увеличивая w_{ξ} , можно добиться выполнения условия $t_{cp} \leq T_{\max}$ и получить верхнюю оценку пропускной способности для дуг сети.

Для решения задачи формирования потоков в работе [6] предложены также эвристические алгоритмы, разработка которых обоснована тем, что для реальных коммуникационных сетей трудно определить функции C_{tr}^{ij} , $C_{сорт}^i$ и $C_{груз}^i$, достаточно адекватно характеризующие затраты на передачу и обработку потоков. Соответственно в пакете программ [1] реализован ряд алгоритмов для метода последовательного анализа вариантов и ряд эвристических алгоритмов. Первая группа алгоритмов применяется для решения задачи в случае, когда можно утверждать, что заданные функции затрат на транспортировку (передачу) и обработку потоков адекватно отражают стоимостные зависимости реальных процессов от основных изменяемых параметров, эвристические алгоритмы - в случае, когда нет твердой уверенности в адекватности используемых функций затрат, а также в случае, когда функции затрат вообще не заданы. Эвристические алгоритмы не используют в своей работе функции затрат, но полученное ими решение задачи все равно оценивается. Для оценки выполняется расчет по встроенным в программу конкретным функциям (7) годовых приведенных затрат.

При численном моделировании задачи с помощью пакета программ проектировщику выводятся до и после оптимизации следующие показатели: полные затраты; транспортные затраты; затраты на сортировку исходных потоков в узлах сети; затраты на погрузку-выгрузку (обработку) транспортных блоков в узлах сети; затраты на приобретение транспортных блоков; общее количество транспортных блоков в сети, необходимое для единовременного отправления всех потоков в сети; средний коэффициент загрузки транспортного блока в сети, среднее число направлений сортировки исходных потоков в узлах сети; суммарный объем транзитной обработки исходных потоков в узлах сети; минимальное, максимальное и среднее время доставки исходных потоков адресату и др.

Кроме того, программа выводит до и после оптимизации предварительную оценку величины t_{cp} – среднее время задержки потоков в сети при выбранной в интерактивном режиме одинаковой для всех дуг пропускной способности. Если $t_{cp} = \text{infinite}$, то максимальной пропускной способности, заданной интерактивным

параметром, недостаточно для распределения всех потоков по маршрутам транспортных средств или каналам связи. В этом случае программа подсказывает, до какого уровня может быть увеличено значение этого параметра.

Потоковая матрица в транспортных блоках и матрица с предварительным расчетом сроков доставки потоков используются как входные данные для задач выбора пропускных способностей и распределения потоков. Справочная матрица слияния (сортировки) потоков является основным результатом решения задачи формирования потоков. Она полностью определяет схему сортировки исходных единичных потоков во всех узлах сети и адресует потоки транспортных блоков, которые будут распределены по маршрутам транспортных средств или по каналам связи при решении задачи распределения потоков. В узлах реальной транспортной сети или сети передачи данных справочная матрица слияния потоков должна использоваться для автоматизированного управления оборудованием, осуществляющим процессы сортировки адресных грузов, или как таблица слияния пакетов сообщений в виртуальные контейнеры.

Заключая обсуждение задачи формирования потоков, еще раз отметим, что при ее решении рассчитываются и сравниваются только нижние оценки транспортных затрат и затрат на обработку транспортных блоков. Реальные оценки этих затрат могут быть получены только после решения задачи распределения сформированных потоков на транспортной сети или сети передачи данных (в затратах на обработку транспортных блоков в узлах сети учитываются только исходящие и входящие потоки, - транзитные потоки не учитываются; для транспортных сетей не учитываются затраты на перевозку и обработку порожних контейнеров). Затраты на приобретение транспортных блоков имеют смысл в основном для транспортных сетей, хотя и для сетей передачи данных можно определить некоторый эквивалент для затрат такого типа. Затраты на сортировку исходных потоков в узлах сети отражают реальные затраты, при условии, что при решении задачи использовались адекватные процессам сортировки функции затрат.

Для практической проверки приведенных утверждений с помощью пакета программ [1] был проведен вычислительный эксперимент на сети, содержащей $n = 12$ узлов и $e = 72$ ориентированные дуги, сгенерированной датчиком случайных чисел. Длины дуг d_{kl} генерировались в пределах от 60 до 800 км; величины исходных потоков a_{ij} - от 1 до 30 пакетов сообщений в секунду; объем транспортного блока ω принимался равным 100 пакетам; скорость передачи данных $V_{cp} = 25000$ км/сек; время на обработку (сортировку) исходных потоков в узлах сети $t_a = 1$ секунда; время на транзитную перекоммутацию транспортных блоков в узлах сети $t_b = 0,5$ секунды; пропускные способности узлов по обработке транзитных пакетов сообщений принимались равными 500 пакетов в секунду для всех узлов сети; пропускные способности дуг в транспортных блоках выбирались из множества $\{10, 15, 20, \dots\}$; максимальное время доставки пакетов сообщений адресату $T_{ij} = 10$ сек для всех $ij \in S$; максимальное число слияний исходных

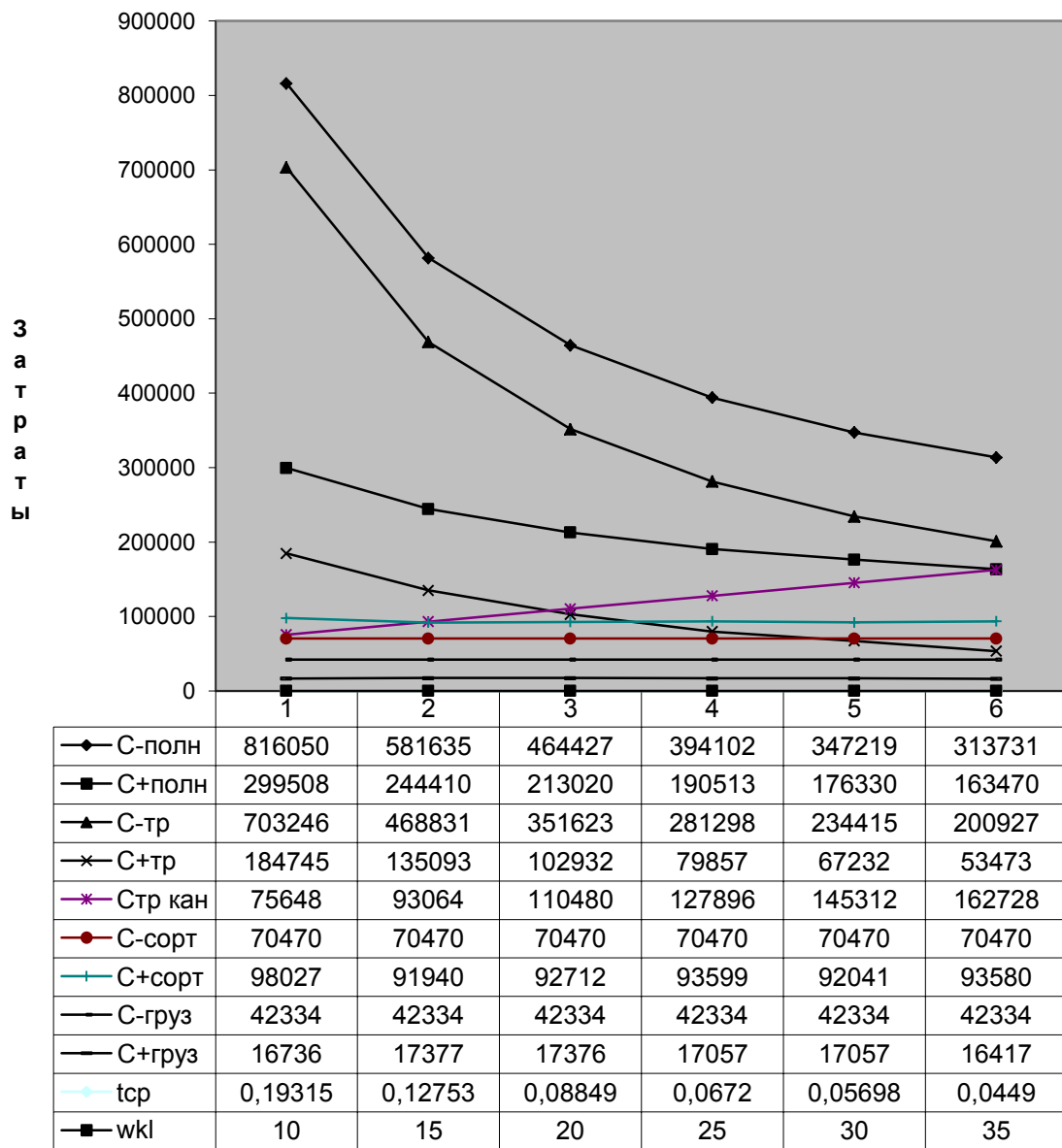
потоков v_{\max} не ограничивалось; максимальная задержка транспортных блоков в сети $T_{\max} = 0,05$. В качестве функций затрат использовался конкретный вид формул (14) и (7) в условных единицах стоимости. Для расчета времени доставки пакетов сообщений конечному адресату применялись формулы (10).

При распределении всех исходных потоков транспортных блоков $u_{ij} = \lceil a_{ij}/\omega \rceil$ по ступенчатому критерию – минимум транзитных узлов, минимум длины пути без оптимизации упаковок пакетов сообщений и $w_{kl} = 10$ для всех $kl \in E$, были нарушены ограничения (2) и $t_{cp} = \text{infinite}$. Оптимальное решение задачи формирования потоков для всех $w_{kl} = 10$ было достигнуто при $v_{\max} = 5$ со значением $t_{cp} = 0,19315$ (см. рис. 2). При этом транспортные затраты $C_{\text{тр}}^+ = \sum_{ij \in S} C_{\text{тр}}^{ij}(u_{ij}, d_{ij}) = 184745$ были максимальными, а $C_{\text{тр кан}} = \sum_{kl \in E} C_{\text{тр}}^{kl}(w_{kl}, d_{kl}) = 80352$ – минимальными. Далее задача формирования потоков решалась для $w_{kl} = 15, 20, \dots, 35$, пока значение $t_{cp} = 0,04490$ (при $w_{kl} = 35$) не стало меньше максимально допустимой задержки транспортных блоков в сети $T_{\max} = 0,05$. При этом транспортные затраты $C_{\text{тр}}^+ = 53473$ стали минимальными, а $C_{\text{тр кан}} = 216287$ – максимальными. На рис. 2 приняты следующие обозначения: $C_{\text{полн}}^-$, $C_{\text{полн}}^+$ – полные затраты до и после оптимизации (значения функционала (11)); $C_{\text{тр}}^-$, $C_{\text{тр}}^+$, $C_{\text{сорт}}^-$, $C_{\text{сорт}}^+$, $C_{\text{груз}}^-$, $C_{\text{груз}}^+$ – соответственно суммарные транспортные затраты, суммарные затраты на сортировку пакетов сообщений в узлах сети, суммарные затраты на обработку исходящих и входящих транспортных блоков в узлах сети до и после оптимизации из функционала (11); $C_{\text{тр кан}}$ – суммарные транспортные затраты, рассчитанные по конкретной формуле вида (7) при одинаковой пропускной способности всех дуг сети.

Другие результирующие показатели решения задачи формирования потоков при изменении w_{kl} от 10 до 35 приведены в таблице.

Поскольку при решении задачи формирования потоков затраты на сортировку исходных потоков (пакетов сообщений) и обработку исходящих и входящих потоков транспортных блоков почти не изменяются при изменении значения w_{kl} от минимального до максимального (от 10 до 35 в примере, см. рис. 2), то в качестве входных данных для решения задачи выбора пропускных способностей дуг сети можно взять любой из вариантов решения задачи формирования потоков для w_{kl} от 10 до 35. Рекомендуется выбирать вариант решения, при котором суммарные затраты на сортировку и обработку потоков минимальны. Для задачи выбора пропускных способностей был выбран вариант для $w_{kl} = 30$ (см. таблицу), в результате решения которой аппроксимационным методом (см. далее по тексту) было получено значение функционала (12)

$$\sum_{kl \in E} C_{\text{тр}}^{kl}(w_{kl}, d_{kl}) = 130226 \text{ при } t_{cp} = 0,04992.$$



Пропускные способности дуг

Рис. 2. Графики зависимости затрат от пропускных способностей дуг

	Значения до оптимизации	Значения после оптимизации					
Сумма затрат на сортировку и обработку потоков (в усл. ед.)	112804	114763	109317	110088	110656	109098	109997
Эффект от оптимизации (в усл. ед.)	-	516542	337225	251407	203589	170889	150261
Общее число исходящих транспортных блоков в сети	132	52	54	54	53	53	51
Средний коэффициент загрузки транспортного блока в сети	0,151	0,689	0,593	0,595	0,632	0,612	0,661
Среднее число направлений сортировки пакетов сообщений в узлах сети	11	4	4	4	4	4	4
Суммарный объем транзитной обработки пакетов сообщений в узлах сети	0	1661	1296	1343	1396	1302	1390
Минимальное время доставки пакетов сообщений адресату (сек.)	-	2,0024 4	-//-	-//-	-//-	-//-	-//-
Максимальное время доставки пакетов сообщений адресату (сек.)	-	7,1198 8	6,61988	7,62088	6,61988	6,61988	6,61948
Среднее время доставки пакетов сообщений адресату (сек.)	-	3,3483 1	3,23806	3,26042	3,23790	3,24601	3,21024
Максимальное число слияний каждого исходного потока, при котором достигается минимум функционала (11)	0	5	5	5	3	3	4
Значение t_{cp} до оптимизации	-	infini	0,29782	0,16703	0,11697	0,09016	0,07339
Значение t_{cp} после оптимизации	-	0,1931 5	0,12753	0,08849	0,06720	0,05698	0,04490
Величина пропускной способности дуг в транспортных блоках в секунду	10	10	15	20	25	30	35

Результаты проведенного эксперимента подтверждают возможность замены функций $C_{тр}^{kl}(w_{kl}, d_{kl})$ на $C_{тр}^{ij}(u_{ij}, d_{ij})$ и сведения решения общей задачи (1)-(6) к последовательному независимому решению задач формирования потоков (11),(4)-(6) и выбора пропускных способностей дуг сети (12), (2)-(3).

Аналогичные по характеру поведения численные результаты были получены

при решении задачи для сетей большой размерности (до 1000 узлов и 200000 ориентированных дуг).

Перейдем к обсуждению решения задачи выбора пропускных способностей (12), (2)-(3). Для прояснения алгоритмической сложности решения задачи запишем ее в следующем виде:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^e \sum_{j=k}^{\alpha} c_{ij} x_{ij}, \quad k = \text{The first index}(w_{i\xi} > f_i), \quad i = 1, e, \quad \xi = 1, \alpha \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^e \sum_{j=k}^{\alpha} t_{ij} x_{ij} \leq T_{\text{макс}} u_{\Sigma}, \quad (16)$$

$$\sum_{j=k}^{\alpha} x_{ij} = 1, \quad i = 1, e, \quad (17)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}. \quad (18)$$

Где:

стоимости дуг c_{ij} вычислены, например, как $c_{ij} = k^1_{ij} + k^2_{ij} d_i$, $j = k, \alpha$, $i = 1, e$, k^1_{ij} , k^2_{ij} - заданные стоимостные коэффициенты для дуги i в состоянии $w_{ij} \in \{w_1, w_2, \dots, w_{\alpha}\}$, d_i - длина дуги i ;

средние задержки в дугах $t_{ij} = f_i / (w_{ij} - f_i)$, $j = k, \alpha$, $i = 1, e$, f_i - мультипоток по дуге i ;

искомые пропускные способности w_{ij} соответствуют оптимальному решению задачи x^{opt}_{ij} .

Сформулированная задача известна как обобщенная задача о рюкзаке с булевыми переменными и относится к классу NP-полных, т.е. в общем случае для ее решения неизвестны точные полиномиально ограниченные по трудоемкости алгоритмы. В работе Л. Клейнрока [7] для решения исходной задачи (12), (2)-(3) было предложено аппроксимировать дискретные стоимости дуг (например, $C^{kl}_{\text{тр}}(w_{kl}, d_{kl}) = k^1_{kl}(w_{kl}, d_{kl}) + k^2_{kl}(w_{kl})d_{kl}$, где k^1_{kl} - эксплуатационные затраты на аренду канала kl с пропускной способностью w_{kl} и длиной d_{kl} ; k^2_{kl} - стоимость одного канало-километра с пропускной способностью w_{kl} ; $w_{kl} \in \{w_1, w_2, \dots, w_{\alpha}\}$) непрерывными линейными функциями (например, $C^{kl}_{\text{тр}}(w_{kl}, d_{kl}) = c^0_{kl} + c^1_{kl}w_{kl}$, где c^0_{kl} , c^1_{kl} - полученные коэффициенты аппроксимации), получить значения оптимальных пропускных способностей по формуле

$$w^{opt}_{kl} = f_{kl} + f_{kl} / (u_{\Sigma} T_{\text{макс}} \sum_{rs \in E} \sqrt{f_{rs} c^1_{rs}} / \sqrt{f_{kl} c^1_{kl}})$$

и округлить их до ближайших дискретных значений из заданных $w_{kl} \in \{w_1, w_2, \dots, w_\alpha\}$. В работе Ю. П. Зайченко [8] предложен конкретный алгоритм решения задачи выбора пропускных способностей каналов связи с дискретными стоимостями, основанный на подходе Л. Клейнрока. В алгоритме предполагается, что заданные функции стоимости можно с достаточной степенью адекватности аппроксимировать линейными. Алгоритм позволяет быстро попасть в окрестности точек оптимума при таких допущениях и найти приближенное дискретное решение, используя упорядоченные по невозрастанию отношения значений мультипоток в каналах связи к их удельным дискретным стоимостям в окрестности непрерывных точек оптимума, получение же точного решения в окрестностях точек оптимума требует полного перебора. Этот факт был неоднократно проверен при проведении многочисленных экспериментов на сетях различных размерностей и подтверждает общую экспоненциальную сложность дискретной задачи. Другой алгоритм, основанный на общей схеме метода последовательного анализа вариантов (ПАВ) [9-11] (см. также в какой-то мере близкий по идеологии метод построения последовательности планов [12]), предложен в работе [13]. Алгоритм решает задачу выбора дискретных пропускных способностей дуг сети при заданном многопродуктовом потоке и ограничениях на среднее время задержки в сети. Его можно применять как к исходной постановке задачи, так и к постановке в виде (15-18). Алгоритм перебирает решения, сужая на каждой итерации область допустимых решений. Алгоритм может использоваться для любых функций стоимости дуг от пропускных способностей (не обязательно линейных). Это отличает его от аппроксимационных алгоритмов Л. Клейнрока и Ю. П. Зайченко. Алгоритм теоретически дает точное решение при полном переборе вариантов на заключительном этапе оптимизации, когда у всех $e = |E|$ каналов есть только одна альтернатива - переход к очередному ближайшему каналу с большей пропускной способностью. Однако его трудоемкость псевдополиномиальна, так как и эта задача является обобщенной задачей о рюкзаке или полиномиально сводится (преобразуется) к задаче коммивояжера, которые, как известно, являются NP-полными.

На практике, априори трудно судить о достаточной точности аппроксимации дискретных стоимостных функций дуг линейными и искать решение, отталкиваясь от оптимальных пропускных способностей дуг для линейных функций по Л. Клейнроку. Поэтому, как показали экспериментальные исследования, при выборе алгоритма решения дискретной задачи все-таки следует отдать предпочтение алгоритму ПАВ, т. к. он позволяет вводить в общую схему оптимизации вероятностно-временные оценки задержки потоков не только в каналах связи, но и в узлах (маршрутизаторах) сети, а также учитывать дополнительные ограничения на сроки доставки отдельных адресных пакетов сообщений конечному пользователю [4].

В заключение приведем общую схему решения задачи (1)-(6).

1. Решить задачу 1. Для этого можно воспользоваться пакетом программ [1].

При решении задачи с известными функциями затрат следует применять методику, изложенную в [5]. При неуверенности в адекватности функций затрат или неизвестных функциях необходимо применять эвристические алгоритмы [6]. В процессе решения можно использовать интерактивный режим и изменять грузоподъемность транспортных средств или пропускную способность каналов связи от меньших значений к большим, пока не начнет выполняться ограничение (3), и получить верхнюю оценку пропускных способностей для всех дуг сети. Получить оценку стоимости сети при распределении всех потоков по ступенчатому критерию - минимум перегрузок, минимум длины пути; схему сортировки исходных потоков; потоковую матрицу в транспортных блоках (контейнерах) для последующего решения задачи распределения потоков; предварительную (оценочную) матрицу сроков доставки исходных потоков конечному адресату; мультипоток (многопродуктовый поток) по всем дугам сети для решения задачи выбора пропускных способностей.

2. Решить задачу 2, используя аппроксимационный метод [8] или метод последовательного анализа вариантов [13].

Выводы

1. Рассмотрена и исследована дискретная задача выбора пропускных способностей дуг при оптимизации упаковок мелкопартионных потоков в многопродуктовой сети, построена ее математическая модель.

2. Доказано, что исходная задача может быть сведена к независимому последовательному решению задач формирования потоков транспортных блоков (контейнеров) и выбора пропускных способностей дуг сети.

3. Предложена общая схема приближенного решения исходной задачи, основанная на известных и разработанных авторами алгоритмах.

4. Приведены экспериментальные результаты решения исходной задачи на примере многопродуктовой сети, сгенерированной датчиком случайных чисел. Показано, что полученные результаты подтверждают правомерность предложенной схемы решения задачи.

* * *

1. Васянин В.А. Пакет программ для решения задач оптимизации распределения дискретных потоков в многопродуктовых сетях большой размерности / В.А. Васянин, А.И. Савенков // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: материалы международной научной конференции, Евпатория, Украина. - 2008. - Том 2 (часть 1), С. 41 - 44. (<http://vovvas.narod.ru/userguide.doc>)

2. Олвейн В. Структура и реализация современной технологии MPLS / В. Олвейн / Пер. с англ. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2004. — 480 с.

3. Васянин В. А. Алгоритм построения кратчайших путей на сети по ступенчатому критерию / В.А. Васянин, А.И. Савенков // Дискретные и эвристические системы управления : Сб. науч. тр.- Киев, 1983. - С. 40 - 49.- В надзаг. : АН УССР, Научный

совет по проблеме "Кибернетика", институт кибернетики.

4. Зайченко Е. Ю. Комплекс моделей и алгоритмов оптимизации характеристик сетей с технологией MPLS / Е. Ю. Зайченко // Системні дослідження та інформаційні технології. - 2007. - № 4. - С. 58-71.

5. Васянин В. А. Об одной задаче дискретной оптимизации в процессах управления перевозками на мультипоточковых транспортных сетях / В. А. Васянин // Кибернетика и вычислит. техника. - 1983. - Вып. 60. - С. 82-87.

6. Васянин В. А. Сравнительная эффективность алгоритмов оптимизации упаковок в мультипоточковых сетях / В. А. Васянин // Дискретные системы управления: Сб. науч. тр. - Киев : Ин-т кибернетики им В,М, Глушкова АН УССР, 1988. - С. 36-45.

7. Клейнрок Л. Коммуникационные сети: Стохастические потоки и задержки сообщений / Л. Клейнрок. - М.: Наука, 1970. - 255 с.

8. Зайченко Ю.П. Структурная оптимизация сетей ЭВМ / Ю.П. Зайченко, Ю. В. Гонта. - К.: Техніка, 1986. - 168 с.

9. Волкович В.Л. Об одной общей схеме последовательного анализа и отсеивания вариантов / В.Л. Волкович, А.Ф. Волошин // Кибернетика. - 1978. - № 5. - С. 98-105.

10. Алгоритмы последовательного анализа и отсеивания вариантов в задачах дискретной оптимизации / В.С. Михалевич, В.Л. Волкович, А.Ф. Волошин, Ю.М. Поздняков // Кибернетика. - 1980. - № 3. - С. 76-85.

11. Михалевич В.С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем / В.С. Михалевич, В.Л. Волкович. - М. : Наука, 1982. - 286 с.

12. Емеличев В.А. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации / В.А. Емеличев, В.И. Комлик. - М. : Наука, 1981. - 208 с.

13. Зайченко Ю.П. Оптимальный выбор пропускных способностей каналов связи в сети с технологией MPLS / Ю.П. Зайченко, Али-Аззам Хамуди Мухаммед // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка. — 2005. — № 43. — С. 196–201.

Отримано: 5.12.2011 р.