УДК 519-866

МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ФАКТОРІВ РИЗИКІВ З ВИКОРИСТАННЯМ КОПУЛ

П.І. Бідюк, д-р техн. наук, проф.
(Інститут прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ»);
Л.О. Коршевнюк, канд. техн. наук, доцент
(Інститут прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ»);
О.М. Трофимчук, д-р техн. наук, проф.
(Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору);
А.В. Кроптя, канд. техн. наук, доцент
(Державна корпорація «Укрзалізниця»)

Розглянуто задачу математичного моделювання випадкових процесів, пов'язаних з виникненням ризиків в економіці та фінансах. Для математичного опису розподілів взаємно пов'язаних факторів та мір ризику використано апарат спеціальних функцій – копул. Наведено математичний опис вибраних копул та приклади їх застосування до опису багатовимірних випадкових процесів. Для оцінювання параметрів копул за допомогою статистичних даних використано метод максимальної правдоподібності.

Рассмотрена задача математического моделирования случайных процессов, связанных с возникновением рисков в экономике и финансах. Для математического описания распределений взаимосвязанных факторов и мер риска использован аппарат специальных функций – копул. Приведено математическое описание выбранных копул и примеры их использования для описания многомерных случайных процессов. Для оценивания параметров копул с помощью статистических данных использован метод максимального правдоподобия.

The problem of mathematical modeling of stochastic processes related to economic and financial risks is considered. To describe mathematically the distributions of mutually interrelated factors and measures of risks special copula functions have been used. A mathematical description of selected copulas is given as well as examples of their applications for describing multidimensional stochastic processes. The copula parameters were estimated with maximum likelihood techniques.

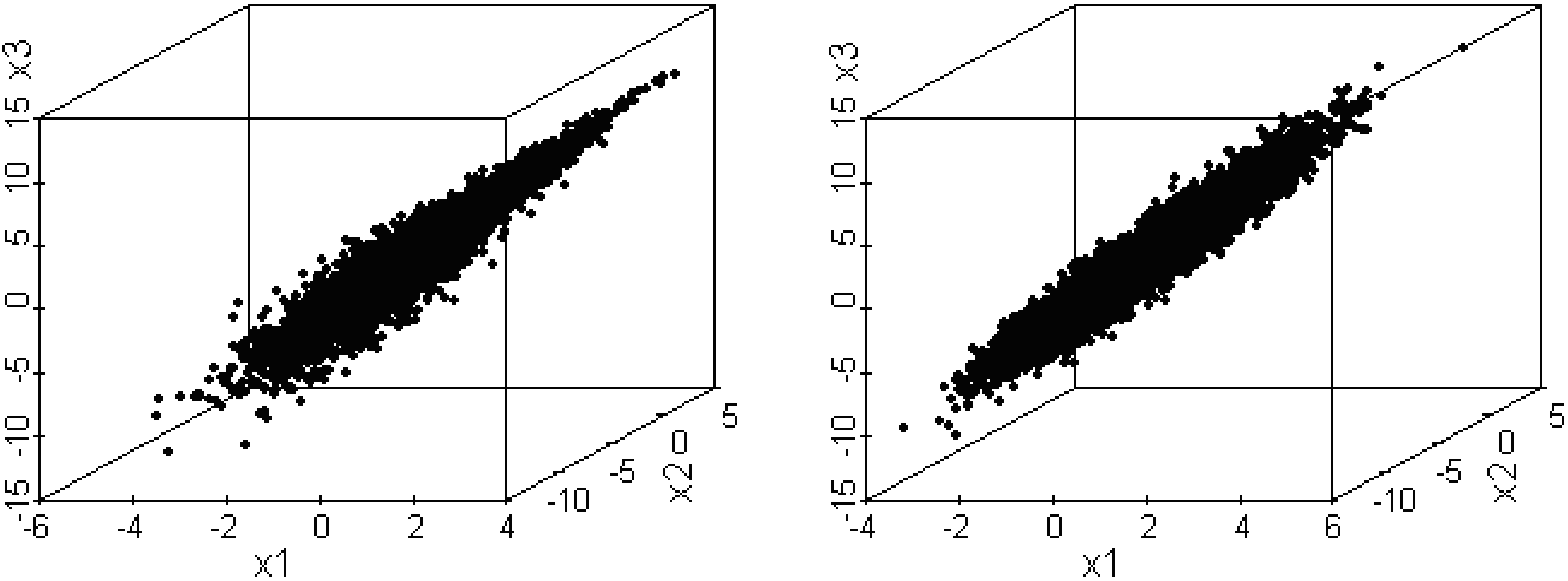
Вступ. Розв'язання задач сучасного менеджменту фінансових та економічних ризиків ґрунтується на відповідних математичних моделях процесів, пов'язаних з

виникненням ризикових ситуацій. Досить часто при моделюванні факторів ризиків розглядають взаємно незалежні одновимірні випадкові процеси, які характеризують розвиток відповідних подій. Такий підхід дає можливість отримати задовільний результат у тих випадках, коли немає взаємодіючих випадкових процесів. Однак у менеджменті ризиків, як правило, основну увагу привертають не різноманітні ізольовані події (фактори) та відповідні ризики, а їх поєднання у вигляді єдиного ризику деякого портфеля фінансових інструментів. Це зумовлено тим, що існують певні позитивні і негативні залежності між випадковими подіями. Так, позитивні проявляються у тому, що великі (малі) значення випадкових змінних мають тенденцію з'являтися разом, а негативні проявляються у тому, що великі значення однієї змінної з'являються разом з малими значеннями інших змінних. Наприклад, великі прирости ціни однієї акції можуть супроводжуватись зовсім незначними змінами інших. Практика аналізу та моделювання випадкових процесів у фінансах свідчить про те, що наявність негативних залежностей дає можливість легше спрогнозувати можливі втрати. Так відомо, що при виконанні операцій на біржах існує так званий ефект левериджу (важеля), який проявляється у тому, що великі коливання цін активів (велика дисперсія) призводять до суттєвого зменшення прибутків від інвестицій. Цей факт широко використовують при створенні автоматизованих торговельних систем активами на біржах.

Використання результатів більшості існуючих досліджень, присвячених теорії екстремальних значень у одновимірному випадку [1] – [5], має суттєві обмеження, оскільки увага зосереджується на окремих факторах ризику і у таких моделях не враховуються взаємозв'язки між факторами, що впливають на остаточний результат. Частіше виникає потреба у таких оцінках мір ризику, які враховували б складну, часто асиметричну та нелінійну взаємодію факторів, що сприяють виникненню ризиків. З точки зору побудови та застосування математичних і статистичних моделей в управлінні ризиками коректний опис залежностей між факторами є ключовим елементом для розв'язання задач диверсифікації та визначення вартості похідних фінансових інструментів.

Природним узагальненням існуючих підходів до моделювання і прогнозування факторів і мір ризику є використання теорії багатовимірних екстремальних значень [6] – [8], у якій розглядається моделювання хвостів багатовимірних розподілів, оскільки величини можливих втрат знаходяться найчастіше у хвостових частинах розподілів. Однак використання лише екстремальних значень векторів, за аналогією з одновимірною теорією, тобто векторів з екстремальними значеннями за кожною координатою, дає можливість обробляти лише невелику кількість значень вимірів. Зважаючи на те, що основний інтерес становлять, як правило, $3\% - 5\%$ спостережень, то одночасне перевищення порогу за кожною змінною буде спостерігатися вкрай рідко. Чим більша кількість змінних розглядається при моделюванні, тим рідше будуть зустрічатися збіжні екстремальні значення. Це так зване ”прокляття розмірності” не дає можливості отримати надійні результати моделювання і прогнозування, оскільки кількість спостережень, які враховуються у процесі обробки даних, може суттєво і швидко зменшуватись.

Також протягом тривалого часу загальноприйнятою мірою залежності двох випадкових величин був коефіцієнт взаємної кореляції. За загальноприйнятою гіпотезою нормальності фінансових випадкових величин коефіцієнт кореляції був необхідною та достатньою характеристикою взаємозв’язку випадкових процесів у випадку багатовимірного нормального розподілу. Однак у зв’язку з невідповідністю статистичних даних гіпотезі стосовно нормальності даних, при управлінні ризиками [9] збільшується критика коефіцієнта кореляції як адекватної міри залежності ризиків [10] – [12], оскільки коефіцієнт кореляції не надає опису структури залежності між ризиками, що особливо стосується хвостів розподілу (рис. 1). Так, повністю залежні випадкові величини можуть мати коефіцієнт кореляції відмінний від 1 чи -1, а рівність коефіцієнта кореляції нулю не свідчить про незалежність ризиків, наприклад у випадку нормально розподіленого ризику X та повністю залежного від нього похідного ризику X^2. Функція лінійної кореляції також не є інваріантною до перетворень випадкових величин.



маргінальними розподілами та однаковими коефіцієнтами кореляції $\rho = 0{,}14$ *, але різними структурами залежності*

Загалом, при створенні сучасних інформаційних систем для математичного моделювання і менеджменту ризиків необхідно розв’язувати такі задачі: (1) коректний вибір і застосування кількісних мір ризику; (2) порівняння факторів та мір ризиків з метою вибору кращого варіанту опису ситуацій для конкретних випадків настання ризикової події; (3) оцінювання рівня взаємозв’язку між факторами та мірами ризиків; (4) оцінювання та порівняння структури залежностей між супутніми випадковими процесами; (5) створення математичних і статистичних моделей для опису виявлених структур залежностей; (6) використання побудованих моделей для виявлення і прогнозування можливих втрат; (7) прийняття рішень стосовно зменшення втрат у майбутньому або уникнення ризикових ситуацій, тобто управління ризиками.

Тому ця робота присвячена моделюванню багатовимірних розподілів, пов'язаних з відповідними факторами та мірами ризику, які зустрічаються у фінансово-економічних процесах різних рівнів. Для математичного опису багатовимірних розподілів будуть застосовані спеціальні функції – копули, які знайшли широке застосування у математичному моделюванні випадкових процесів у різних галузях.

Постановка задачі: (1) виконати аналіз методів побудови класу спеціальних функцій – копул, придатних для опису багатовимірних розподілів факторів та мір ризиків, які необов'язково мають нормальний розподіл; (2) розглянути особливості оцінювання параметрів копул за допомогою існуючих методів параметричної ідентифікації, зокрема методу максимальної правдоподібності; (3) оцінити можливості практичного застосування сімейств копул для статистичного аналізу фінансових, економічних та інших видів ризиків, представлених екстремальними значеннями розподілів випадкових величин. При цьому спільний розподіл ризиків розглядається у вигляді:

$$H(x_1,\dots,x_n) = P[X_1 \le x_1,\dots,X_n \le x_n] = C\big(F_1(x_1),\dots,F_n(x_n)\big),$$

де $F_1,\dots,F_n$ – маргінальні функції розподілу окремих ризиків, C – $n-$копула, що характеризує структуру залежності між ризиками.

Імовірнісний опис ризиків. При створенні та практичному застосуванні імовірнісних моделей використовують поняття імовірнісного простору $(\boldsymbol{\Omega},\ \mathfrak{I},\ \Pr)$, де $\boldsymbol{\Omega}$ – область визначення відповідних випадкових змінних; $\mathfrak{I}$ – сігма-алгебра, тобто сімейство випадкових подій, які є підмножинами $\boldsymbol{\Omega}$; $\Pr$ – імовірнісна міра. При цьому сімейство підмножин $\mathfrak{I}$ в області визначення $\boldsymbol{\Omega}$ називають сігма-алгеброю, якщо воно задовольняє таким властивостям: (1) $\boldsymbol{\Omega} \in \mathfrak{I}$; (2) $A \in \mathfrak{I} \;\Rightarrow\; \overline{A} \in \mathfrak{I}$; $A_1,\ A_2,\ A_3,\dots \in \mathfrak{I} \;\Rightarrow\; \cup_{i\ge 1} A_i \in \mathfrak{I}$.

Під ризиком будемо розуміти надалі випадкову подію, яка може призвести до фінансових втрат. Ризик завжди містить елемент невизначеності, який пов'язаний або з моментом його появи у часі, або ж з природою та тяжкістю його наслідків. Так, у випадку аналізу актуарних процесів міра ризику визначається величиною виплат страхувальнику або третій стороні у зв'язку з виникненням страхової події. В аналізі інвестиційних процесів зустрічаються ризики втрат інвестицій, а також ризик недоотримання дивідендів. Формальним означенням ризику може бути таке: ризик X – це випадкова подія, яка характеризується двома невід'ємними величинами – рівнем випадкових виплат або втрат та ймовірністю цієї події. У багатьох випадках немає необхідності задавати $\boldsymbol{\Omega}$ і X у явному вигляді. Для практичного аналізу ризику досить знати відповідний імовірнісний закон, який розповсюджується на X, тобто його розподіл. Це означає, що ставиться задача визначення ймовірностей прийняття величиною X тих чи інших значень із множини дійсних чисел. Для опису розподілів скористаємось спеціальними функціями – копулами.

Означення та основні властивості копул. Розглядаючи засоби опису можливих залежностей між випадковими процесами, необхідно визначитися власне із самим поняттям залежних випадкових величин. Незалежними називають такі n випадкових величин $X_1,...,X_n$, для яких $P(X_1 \le x_1;...;X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_1)\cdot ...\cdot P(X_n \le x_n)$. Тобто знання, отримані про одну з випадкових величин, не надають нових знань стосовно інших. При дослідженні залежності існує потреба та зацікавленість в отриманні інформації про одну випадкову величину на основі інформації про іншу та порівняння залежностей пар випадкових величин між собою. Для декількох випадкових величин залежність є оберненою до незалежності характеристикою, але способи її ідентифікації (визначення) можуть бути відмінними. В управлінні фінансовими ризиками відокремлення маргінальних розподілів ризиків, пов'язаних з окремими інструментами, від загальної структури залежності є природним підходом. З одного боку, кожна випадкова величина має свій одновимірний розподіл, а з іншого – необхідно враховувати залежності між випадковими величинами, які стосуються дослідження. Для розв'язання цієї задачі скористаємось спеціальними функціями (копулами), які дають можливість виявити інформацію про структуру залежності (тобто ідентифікувати структуру) та надати її вичерпний опис [13, 14]. Розглянемо деякі означення і теореми, необхідні для розв'язання поставленої задачі.

Означення 1: *функцією розподілу* називається така функція F з областю визначення $[-\infty,\infty]$, що F є неспадаючою, $F(-\infty)=0$ та $F(\infty)=1$.

Означення 2: *функцією розподілу випадкової величини* X називається така функція розподілу F, що для всіх $x\in[-\infty,\infty]$ виконується $F(x)=P[X \le x]$.

Означення 3: функція H від n аргументів називається n-зростаючою, якщо для будь-якого n-вимірного інтервалу $B=[\vec{a},\vec{b}]$, такого, що $\vec{a},\vec{b}$ належать до області визначення функції H та $\vec{a} \le \vec{b}$, виконується така умова:

$$V_H(B) = \Delta_{\vec{a}}^{\vec{b}} H(\vec{x}) = \Delta_{a_n}^{b_n} ...\Delta_{a_1}^{b_1} H(\vec{x}) \ge 0 ,$$

де $\Delta_{a_i}^{b_i} H(\vec{x}) = H(x_1,...,x_{i-1},b_i,x_{i+1},...,x_n) - H(x_1,...,x_{i-1},a_i,x_{i+1},...,x_n)$.

Означення 4: *спільною функцією розподілу* називають таку функцію H з областю визначення $[-\infty,\infty]^n$, що H є n-зростаючою: $H(x_1,...,x_{i-1},-\infty,x_{i+1},x_n)=0 \quad \forall i$, $H(\infty,...,\infty)=1$.

Означення 5: *спільною функцією розподілу випадкових величин* $X_1,...,X_n$ називають таку спільну функцію розподілу H з областю визначення $[-\infty,\infty]^n$, що $H(x_1,...,x_n)=P[X_1 \le x_1,...,X_n \le x_n]$.

З наведених означень маємо, що функція розподілу випадкової величини X_i є маргінальною функцією розподілу для спільної функції розподілу випадкових величин $X_1,...,X_n$:

$$F(x_i) = P(X_i \le x_i) = \lim_{t_j \to \infty \ \forall j} H(t_1,...,t_{i-1},x_i,t_{i+1},...,t_n).$$

Вичерпним описом залежності або незалежності випадкових величин є $P(X_1 \le x_1;...;X_n \le x_n)$, тобто функція спільного розподілу $H(x_1,...,x_n)$. Але вона містить надлишкову інформацію про маргінальні розподіли кожної випадкової величини. На практиці інформацію стосовно структури залежності бажано мати для кожної змінної окремо.

Означення 6: функція C: $[0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ називається n-копулою, якщо: (1) $C(F_1,...,F_n) = 0$, якщо існує j таке, що $F_j = 0$; (2) $C(1,...,1,F_i,1,...,1) = F_i$; (3) С – n-зростаюча функція.

Теорема 1 (*Скляра***)**[14]: Нехай H – n-вимірна функція спільного розподілу з маргінальними розподілами $F_1,...,F_n$. Тоді існує така n-копула C, що

$$H(x_1,...,x_n) = C\left(F_1(x_1),...,F_n(x_n)\right).\ \text{для всіх}\ \vec{x} \in R^n. \tag{1}$$

Якщо $F_1,...,F_n$ є неперервними, тоді C унікальна; в іншому випадку функції C є унікально визначеними на $Rng[F_1] \times ... \times Rng[F_n]$. І навпаки, якщо $F_1,...,F_n$ є розподілами, а C є n-копулою, тоді $H(x_1,...,x_n)$ – n-вимірна функція спільного розподілу з маргінальними розподілами $F_1,...,F_n$.

Означення 7: функцією щільності для копули C є така:

$$c\left(F_1,F_2,...,F_n\right) = \frac{\partial C\left(F_1,F_2,...,F_n\right)}{\partial F_1 \partial F_2,...,\partial F_n}.$$

Функцію щільності спільного розподілу можна представити у вигляді:

$$h\left(x_1,x_2,...,x_n\right) = c\left(F_1(x_1),F_2(x_2),...,F_n(x_n)\right)\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i),$$

де f_i – функції щільностей маргінальних розподілів. Корисною властивістю копул в управлінні ризиками є інваріантність до зростаючих перетворень.

Теорема 2[14]: розглянемо перетворення $Z_1,...,Z_n$, які є зростаючими на відповідних областях значень випадкових величин $X_1,...,X_n$ з неперервними маргінальними функціями розподілу і n-копулою C. Тоді випадкові величини $Z_1(X_1),...,Z_n(X_n)$ мають ту ж саму n-копулу C.

Побудова функції маргінального розподілу. При використанні копул для моделювання залежності між випадковими величинами необхідно мати окрему модель для маргінальних розподілів. Очевидно, що для розв’язання задач менеджменту ризиків особливо важливими є оцінки значень, які знаходяться у хвості розподілу. Правий хвіст розподілу втрат пропонується моделювати за допомогою методу перевищень, тобто за узагальненим розподілом Парето. Розподіл решти спостережень, що знаходяться ближче до математичного сподівання, пропонується моделювати за допомогою нормального розподілу, спираючись на центральну граничну теорему та досвід використання цього розподілу в задачах управління ризиками. Для відокремлення обох частин необхідно знайти значення квантиля емпіричного розподілу для обраного порогу. У виконаних дослідженнях поріг обирався на рівні 95%, виходячи з існуючої практики управління ризиками.

Оцінка математичного сподівання нормального розподілу здійснюється на всіх наявних спостереженнях, а оцінювання стандартного відхилення виконується таким чином, щоб значення функції нормального розподілу в точці порогу дорівнювало значенню емпіричної функції розподілу, що дозволяє зорієнтувати модель на адекватне відображення саме хвостової частини. Крім того, це забезпечує неперервність комбінованої функції розподілу, права частина якої будується за методом перевищення порогу. Для цього методу функція розподілу, за побудовою, дорівнює в точці порогу емпіричній функції розподілу. Неперервність функцій маргінальних розподілів вказує на існування унікальної копули в (1).

Означення 8: Нехай X_i має функцію розподілу F_i та праву кінцеву точку $x_{iF} \le \infty$. Для фіксованого $u < x_{iF}$ функцією розподілу перевищень порогу u називають

$$F_{iu}(x) = P(X_i - u_i \le x \quad | \quad X_i > u), \quad x + u \le x_{iF} ,$$

а функцію

$$e(u) = E\left[X - u \quad | \quad X > u\right] = \int_u^{x_{iF}} \frac{1 - F_i(t)}{1 - F_i(x)} dt, \quad u < x_{iF},$$

називають функцією середнього перевищення.

Позначимо через $z^+ = \max(z, 0)$, а через $card\{A\}$ – кількість елементів множини A. Емпіричною оцінкою для функції середнього перевищення буде

$$e_N(u) = \frac{1}{card\left\{j : x_{ij} > u, j = 1, \ldots, N\right\}} \sum_{j=1}^{N} (x_{ij} - u)^+, \quad u \ge 0.$$

Для розподілу перевищень порогу існує аналог теореми Фішера-Тіппета-Гнеденко – теорема Піканда-Балкема-де Хаана.

Теорема 3 (Піканда-Балкема-де Хаана) [2]:

$$\lim_{u \uparrow x_F} \frac{1 - F_i(u + x\beta(u))}{1 - F_i(u)} = \begin{cases} (1 + \xi x)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ \exp(-x), & \xi = 0, \end{cases} \tag{2}$$

де $1 + \xi x > 0$ для деякої додатної функції $\beta(u)$.

З (2) та означення функції розподілу перевищень маємо модель для розподілів перевищень порогів – функцію узагальненого розподілу Парето:

$$GPD_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta), & \xi = 0, \end{cases} \tag{3}$$

де $\beta > 0$ та $x \geq 0$ при $\xi > 0$, а $0 \leq x \leq \frac{-\beta}{\xi}$ при $\xi < 0$; ξ – параметр, що характеризує форму розподілу; β – додатковий параметр масштабу.

Модель для функції розподілу хвоста будується за методом перевищень порогу, який ґрунтується на граничному законі розподілу перевищень (3) і полягає у наступному:

– для вибірки $\{x\}_i$ розміром N обирають поріг u; визначають спостереження, що перевищують поріг $x_{i_1},...,x_{i_{N_u}}$ та відповідні перевищення $y_j = x_{i_j} - u \geq 0$, N_u – число спостережень, що перевищують поріг;

– знаходять оцінку функції $F_u(y)$ розподілу перевищень $y_1,...,y_{N_u}$ у формі (3) $GPD_{\xi,\beta}(x)$ шляхом знаходження оцінок параметрів форми та масштабу;

– оцінку функції розподілу випадкової величини X в області хвоста отримаємо, виходячи із співвідношення:

$$F_{iu}(y) = \frac{F_i(y+u) - F_i(u)}{1 - F_i(u)}, \qquad F_i(x) = (1 - F_i(u))F_{iu}(y) + F_i(u), \qquad F_i(u) = \frac{N_u}{N},$$

тобто маємо:

$$F_i(x) = \left(1 - \frac{N_u}{N}\right)F_{iu}(y) + \frac{N_u}{N}.$$

Побудова сімейства копул. Теорема Скляра гарантує існування копули та її унікальність за певних умов, але не надає методу її побудови, тому розглянемо методи побудови сімейств копул.

Метод оберненої функції

Ідея цього методу полягає у тому, що з теореми Скляра для спільної функції розподілу H та неперервних маргінальних розподілів $F_1,...,F_n$ копула C визначається так:

$$C(u_1,...,u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1),...,F_n^{(-1)}(u_n)),$$

де $F_i^{(-1)}(u_i)$ – обернена функція до функції маргінального розподілу F_i.

Найбільш поширеними у моделюванні фінансових випадкових величин є еліптичні розподіли і зокрема багатовимірний нормальний розподіл. При застосуванні до нього зворотного методу отримаємо багатовимірну нормальну копулу або як її ще називають – Гаусову копулу.

Означення 9: Нехай ρ – симетрична, додатно визначена матриця з діагоналлю $\vec{1}$. Гаусовою багатовимірною копулою називають функцію:

$$C(F_1,F_2,...,F_n,\rho) = \Phi_\rho\left(\Phi^{-1}(F_1),\Phi^{-1}(F_2),...,\Phi^{-1}(F_n)\right),$$

де Φ – функція стандартного одновимірного нормального розподілу; Φ_ρ – функція багатовимірного стандартного нормального розподілу з кореляційною матрицею ρ. На рис. 2 показано тривимірний розподіл на основі нормальної копули.

Щільністю багатовимірної Гаусової копули є:

$$c(F_1,F_2,...,F_n,\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(F_1),...,\Phi^{-1}(F_n)\right)\times\left(\rho^{-1}-I\right)\times\begin{pmatrix}\Phi^{-1}(F_1)\\ \vdots \\ \Phi^{-1}(F_n)\end{pmatrix}\right).$$

Тобто Гаусова копула повністю визначається кореляційною матрицею ρ, а тому її параметри можна досить легко оцінити.

У той час як Гаусова копула за побудовою є природною для моделювання багатовимірного нормального розподілу, в управлінні ризиками її можна застосувати при побудові метанормального розподілу. Цей багатовимірний розподіл утворюється шляхом моделювання залежності між випадковими величинами через нормальну копулу, а маргінальних розподілів – через інші, найбільш придатні для кожної з величин розподіли.

Ще однією копулою, побудованою за методом оберненої функції з еліптичного розподілу, є копула Стьюдента, що відповідає багатовимірному t-розподілу Стьюдента. За своєю побудовою ця копула у своїй центральній частині досить схожа на нормальну і стає все більше подібною на неї у хвостовій частині, коли зростає кількість ступенів свободи t-розподілу Стьюдента (на рис. 3 показано тривимірний розподіл для 5 ступенів свободи). В управлінні ризиками копула Стьюдента може знайти своє окреме застосування через значну відмінність при моделюванні залежності далеко на хвостах розподілу.

З t-розподілу з ν ступенями свободи та додатно визначеною матрицею Σ можна отримати t-копулу, яка має щільність:

$$c(\vec{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\sqrt{(\pi\nu)^d\,|\Sigma|}\right)}\left(1+\frac{(\vec{x}-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})}{\nu}\right)^{\left(-\frac{\nu+d}{2}\right)}.$$

Як видно, еліптичні копули мають ще й ту перевагу, що навіть для великих n їх можна відносно просто реалізувати чисельно.

Архімедові копули

Означення 10: *Нехай φ – неперервна строго зростаюча функція з I в $[0,\infty]$ така, що $\varphi(1)=0$. Псевдоінверсією для φ називають таку функцію $\varphi^{[-1]}$ з $Dom\varphi=[0,\infty]$ в I, що*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \le t \le \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \le t \le \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Відзначимо, що $\varphi^{[-1]}$ є неперервною та неспадаючою на $[0,\infty]$, та строго спадаючою на $[0,\varphi(0)]$. Більше того, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u))=u$ на I, та

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi(0) \le t \le \infty. \end{cases}$$

Якщо $\varphi(0)=\infty$, то $\varphi^{[-1]}=\varphi^{-1}$.

Лема 1: *Нехай φ є неперервною строго спадаючою функцією з I в $[0,\infty]$ такою, що $\varphi(1)=0$, та нехай $\varphi^{[-1]}$ буде псевдо-інверсією для φ і функція C з I^2 в I задається так*:

$$C(u,v)=\varphi^{[-1]}\left(\varphi(u)+\varphi(v)\right). \tag{5}$$

Тоді C задовольняє умовам обмеження для копули.

Доведення: $C(u,0)=\varphi^{[-1]}\left(\varphi(u)+\varphi(0)\right)=0$ та $C(u,1)=\varphi^{[-1]}\left(\varphi(u)+\varphi(1)\right)=\varphi^{[-1]}\left(\varphi(u)\right)=u$; аналогічно, для $C(0,v)=0$ та $C(1,v)=v$. Якщо $\varphi(0)=\infty$, то φ називають строгим генератором. У цьому випадку $\varphi^{[-1]}=\varphi^{-1}$ та

$$C(u,v)=\varphi^{-1}(\varphi(u)+\varphi(v)) \tag{6}$$

називають строгою архімедовою копулою.

Усі копули, що можуть бути представлені у вигляді (5), називають архімедовими. Функцію φ називають генератором копули. Цей клас копул є одним із найбільш вживаних, тому що до нього належить значна кількість параметричних родин копул, що дозволяє відобразити значну різноманітність структур залежності. До того ж побудова копул цього класу досить легка.

Наприклад, якщо $\varphi(t)=(-\ln t)^{\theta}$, де $\theta\geq 1$. Очевидно, що $\varphi(t)$ є неперервною та $\varphi(1)=0$. $\varphi(t)'=-\theta\frac{1}{t}(-\ln t)^{\theta-1}$, тобто φ є строго спадаючою функцією з I в $[0,\infty]$. $\varphi(t)''=\theta(\theta-1)\frac{1}{t^2}(-\ln t)^{\theta-2}+\theta\frac{1}{t^2}(-\ln t)^{\theta-1}\geq 0$ на I, звідси φ є випуклою. Більше того, $\varphi(0)=\infty$, тобто φ є строгим генератором. З (6) маємо:

$$C_\theta(u,v)=\varphi^{-1}(\varphi(u)+\varphi(v))=\exp(-\left[(-\ln u)^{\theta}+(-\ln v)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}).$$

Це сімейство копул називають копулами Гумбела у випадку двох змінних. До архімедових також належать сімейства копул Франка у випадку двох змінних:

$$C(F_1,F_2)=-\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{(e^{-\beta F_1}-1)(e^{-\beta F_2}-1)}{e^{-\beta}-1}\right),\qquad \beta\in R\setminus\{0\};$$

а також сімейства копул Клейтона у випадку двох змінних:

$$C(F_1,F_2)=\max\left(\left(F_1^{-\beta}+F_2^{-\beta}-1\right)^{\frac{-1}{\beta}},0\right),\qquad \beta\in[-1,\infty)\setminus\{0\}.$$

На рис. 4-6 показано тривимірні спільні розподіли на основі копул Франка, Гумбела та Клейтона, відповідно.

Одним із природних підходів до побудови багатовимірних копул є побудова спочатку сімейств двовимірних копул з визначеними зручними властивостями. Після того, як це зроблено, наступним кроком є знаходження багатовимірного узагальнення. Сімейство багатовимірних копул є узагальненням сімейства двовимірних копул, якщо:

- всі двовимірні компоненти багатовимірної копули належать до цього сімейства двовимірних;
- всі багатовимірні компоненти з порядком від 3 до $n-1$ мають таку саму багатовимірну форму.

Проблема побудови багатовимірних узагальнень двовимірних копул не тривіальна. Досить часто двовимірні функції зв'язку не мають багатовимірних узагальнень, або ж вони призводять до такої структури залежності, що є досить обмеженою.

Функцією C^n є послідовне застосування архімедових двовимірних копул, генератором для яких є φ. Таким чином, $C^2(u_1,u_2)=C(u_1,u_2)=\varphi^{[-1]}(\varphi(u_1)+\varphi(u_2))$, для $n \geq 3$, $C^n(u_1,u_2,...,u_n)=C(C^{n-1}(u_1,u_2,...,u_{n-1}),u_n)$. Відзначимо, що така техніка побудови копул зазвичай не приводить до успіху. Але архімедові копули є симетричними та асоціативними, тому побудована таким чином C^n для $n>3$ часто є копулою.

Оцінювання параметрів копул. Найпростішим методом є визначення оцінок параметрів копули через оцінки відомих характеристик вибірки. За допомогою оцінки кореляційної матриці можна знайти оцінки параметрів форми еліптичних копул ρ. Корисною також є ще одна міра узгодженості – статистика τ Кендала, що визначається так:

$$\hat{\tau} = 2\frac{C-D}{N(N-1)},$$

де C – кількість узгоджених пар, тобто $(x_i-x_j)\cdot(y_i-y_j)>0$; D – кількість неузгоджених пар; N – кількість спостережень. Оцінкою τ Кендала можна скористатись, наприклад, для оцінювання параметрів копули Клейтона $\hat{\theta}=\dfrac{2\hat{\tau}}{1-\hat{\tau}}$ та параметрів еліптичних копул $\rho=\sin\dfrac{\pi}{2}\hat{\tau}$. Цей метод приваблює легкістю реалізації, але значно обмежує вибір сімейств копул.

Для оцінювання параметрів копули з будь-якого сімейства можна застосувати метод максимальної правдоподібності. Розглянемо функцію спільного розподілу $H(\vec{x},\vec{\theta})$, де вектор параметрів складається з параметрів маргінальних розподілів та параметрів копули $\vec{\theta}=(\beta_1,...,\beta_n,\vec{\alpha})$; функцію спільного розподілу можна представити у вигляді:

$$H(\vec{x},\vec{\theta})=C(F_1(x_1,\beta_1),F_2(x_2,\beta_2)...F_n(x_n,\beta_n),\vec{\alpha}).$$

Для вибірки $S_x = \{\vec{x}\}$ розміром N функція правдоподібності моделі обчислюється як:

$$\ln L(S_x, \beta_1, ..., \beta_n, \vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N} c\left(F_1(x_1(i), \beta_1), F_2(x_2(i), \beta_2), ..., F_n(x_n(i), \beta_n), \vec{\alpha}\right) + \\ + \sum_{i=1}^{N} \ln f_1(x_1(i), \beta_1) + ... + \sum_{i=1}^{N} \ln f_n(x_n(i), \beta_n) \quad .$$

Такий вигляд дозволяє застосувати двокроковий алгоритм оцінювання параметрів:

$$\left(\beta_1, ..., \beta_n, \hat{\vec{\alpha}}\right) = \arg \max_{\beta_1, ..., \beta_n, \vec{\alpha}} \ln L(S_x, \beta_1, ..., \beta_n, \vec{\alpha}) \ .$$

На першому кроці знаходимо оцінки параметрів маргінальних розподілів:

$$\beta_j = \arg\max_{\beta_j} \sum_{i=1}^{N} \ln f_j(x_j(i), \beta_j) \ ,$$

а на другому – оцінки параметрів копули:

$$\hat{\vec{\alpha}} = \arg\max_{\vec{\alpha}} \sum_{i=1}^{N} c\left(F_1(x_1(i), \beta_1), F_2(x_2(i), \beta_2), ..., F_n(x_n(i), \beta_n), \vec{\alpha}\right).$$

У [15] показано, що оцінка $\hat{\theta} = \left(\beta_1, ..., \beta_n, \hat{\vec{\alpha}}\right)$ є несуперечливою та асимптотично нормальною. Перевагами двокрокового алгоритму є зниження вимірності, що полегшує чисельну оптимізацію, а також можливість використовувати додаткову інформацію при оцінці параметрів розподілів окремих ризиків. Також він надає можливість повнішого використання інформації при моделюванні ризиків, наявні вибірки яких мають різну довжину, що часто зустрічається на практиці при появі нових ризиків чи нових фінансових інструментів.

Чисельний експеримент 1. Моделювання спільного ймовірнісного розподілу ризиків виконано для згенерованих тривимірних розподілів Коші, t-Стьюдента, нормального та тривимірного розподілу змін курсів валют EUR, CHF, GPB відносно USD. Для кожного набору даних виконано оцінювання архімедових копул із сімейств Гумбела, Клейтона, Франка та еліптичних копул із сімейств Стьюдента і нормальної копули. Разом з оцінками маргінальних розподілів це дало змогу виконати моделювання функції спільного розподілу. На рис. 2-7 наведено спільні розподіли змін курсів валют, змодельовані шляхом використання залежностей різних структур.

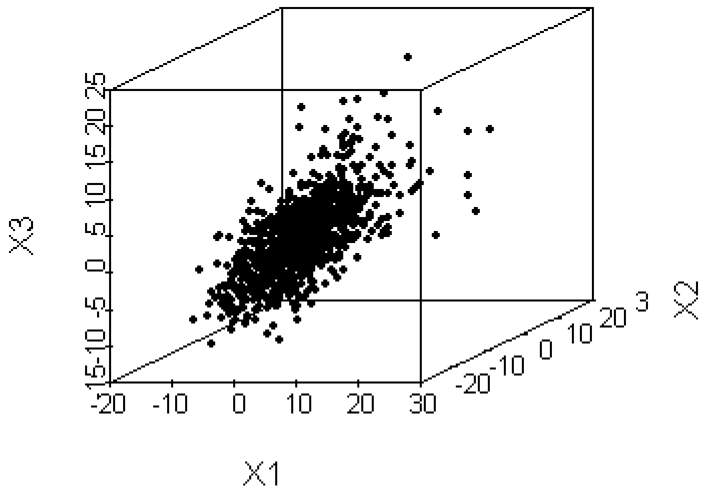


Рис. 2. Спільний розподіл на основі нормальної копули

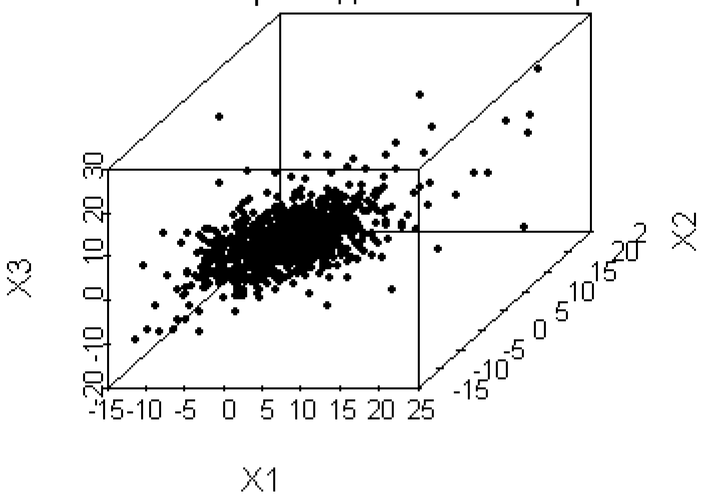


Рис. 3. Спільний розподіл на основі t-копули Стьюдента

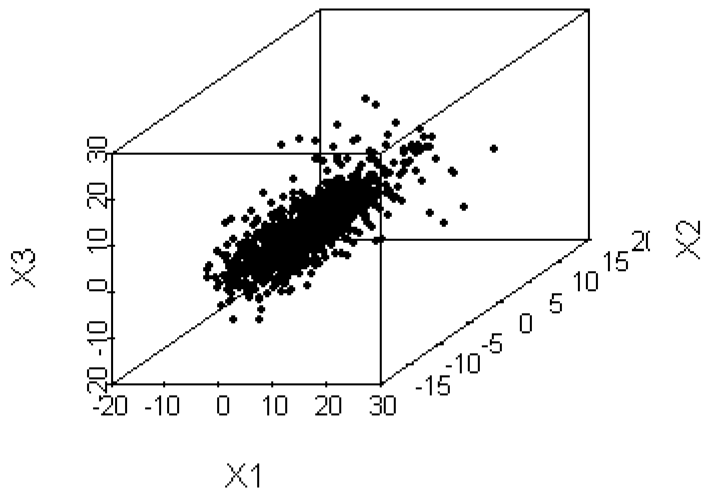


Рис. 4. Спільний розподіл на основі копули Франка

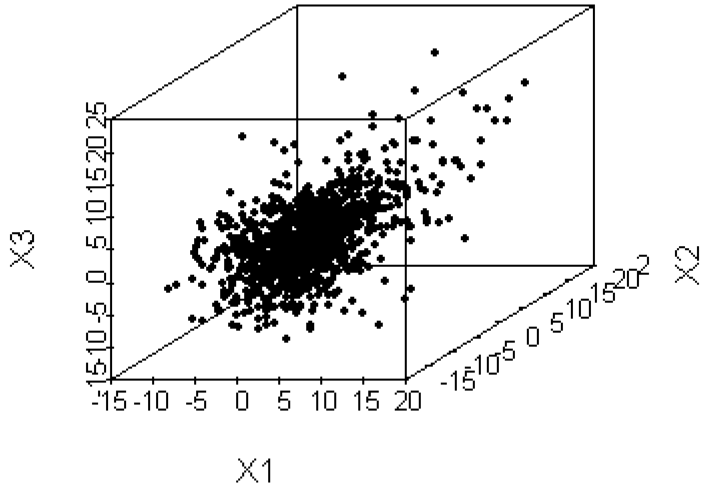


Рис. 5. Спільний розподіл на основі копули Гумбела

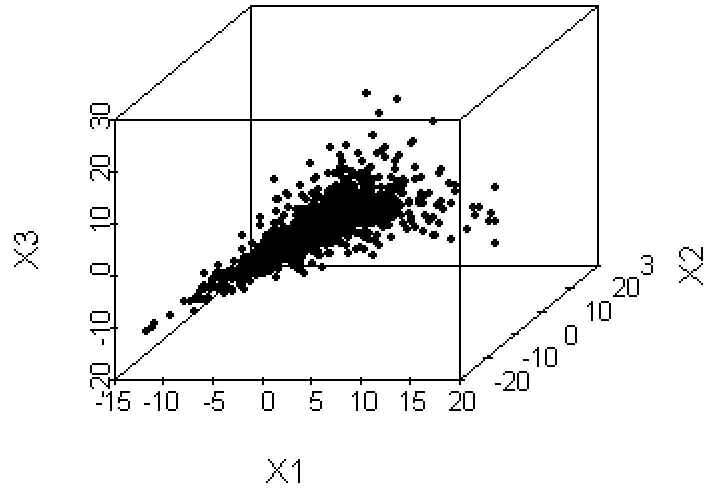


Рис. 6. Спільний розподіл на основі копули Клейтона

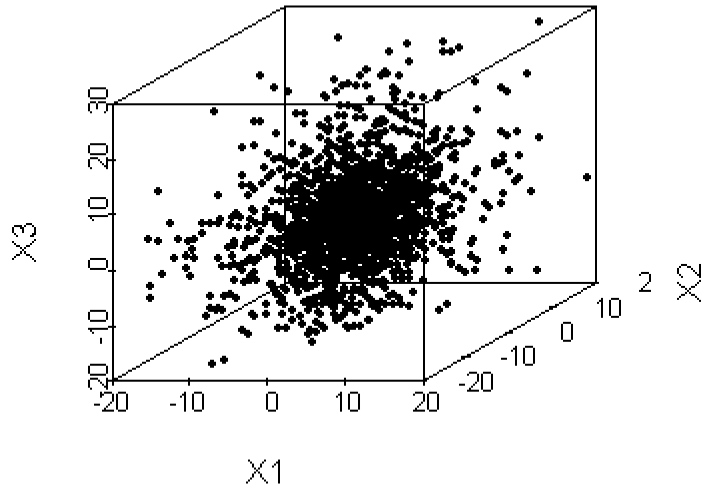


Рис. 7. Емпіричний спільний розподіл курсів валют

Візуальний аналіз отриманих результатів моделювання свідчить про наявність різних структур та форм розподілів вибраних випадкових послідовностей, а тому практичне застосування таких моделей потребує коректного вибору структури математичного опису існуючих залежностей.

Чисельний експеримент 2. Для оцінювання можливих втрат при виконанні валютних операцій часто застосовують відому модель VaR (Value-at-Risk). Ця модель використана для аналізу обмінних курсів швейцарського франка, англійського фунта стерлінга, японської єни та долара США відносно євро. Для оцінювання параметрів моделі взяті щоденні курси з 03.1998 по 01.2006, за виключенням похибок в інформації, що дало вибірку розміром 1643 спостереження. Оцінено параметри одновимірних маргінальних розподілів для кожного з курсів та параметри копул за методом максимальної правдоподібності (табл. 1).

Таблиця 1

Результати оцінювання параметрів копул

Копула	Параметр	Значення	Середньоквадр. похибка
Гумбела	θ	1.6720	0.0158
Нормальна	ρ_1	0.5637	0.0118
	ρ_2	0.3318	0.0136
	ρ_3	0.5943	0.0120
	ρ_4	0.8241	0.0054
	ρ_5	0.8593	0.0051
	ρ_6	0.8037	0.0061
Франка	β	4.5874	0.0911

Емпірична оцінка міри ризику VaR для квантиля 0,03, тобто для 50 спостережень, що перевищують поріг, дорівнює 3,4967. Для квантиля 0,01, відповідно для 16 спостережень, що перевищують поріг, оцінка міри ризику складає 3,5345. Наявних спостережень для квантиля 0,03 достатньо для отримання можливості використання цієї емпіричної оцінки на практиці, а для квантиля 0,01 вибірка є замалою, а тому виникає необхідність у моделюванні розподілу ризиків і визначення оцінки міри ризику VaR за іншою моделлю.

Висновки. Виконано аналіз можливості застосування класу спеціальних функцій – копул до опису багатовимірних розподілів у задачах менеджменту ризиків. Так, копулою, побудованою за методом оберненої функції з еліптичного розподілу, є копула Стьюдента, що відповідає багатовимірному t-розподілу Стьюдента. За своєю побудовою ця копула у своїй центральній частині досить схожа на нормальну і стає все більше подібною до неї у хвостовій частині, коли зростає кількість ступенів свободи t-розподілу Стьюдента. Запропоновано метод побудови комбінованих маргінальних розподілів, який дозволяє враховувати важкі хвости одновимірних розподілів ризиків. Маргінальні розподіли поєднані у спільні розподіли ризиків через структуру залежності, що характеризується копулами.

На основі аналізу методів побудови сімейств копул запропоновано використовувати для моделювання ризиків кілька сімейств копул із корисними для менеджменту ризиків властивостями. Запропоновано двокроковий алгоритм методу максимальної правдоподібності, який побудований із врахуванням особливостей задачі оцінювання параметрів спільного розподілу, що моделюється через маргінальні розподіли та копулу, і може бути застосований до особливостей практичних задач менеджменту ризиків. В експерименті над двома згенерованими, теоретично відомими тривимірними розподілами та одним емпіричним тривимірним розподілом змін курсів валют продемонстрована можливість застосування запропонованого в роботі методу до моделювання багатовимірного розподілу через комбіновані маргінальні розподіли і структуру залежності між ними. Також наведено приклад застосування методу максимальної правдоподібності до оцінювання параметрів функції розподілу з їх подальшим використанням для оцінювання міри ризику.

У подальших дослідженнях за цією темою планується застосувати вибрані сімейства копул до оцінювання мір ризику фактичного портфеля фінансових інструментів та створити інформаційну систему підтримки прийняття рішень (ІСППР) для розв'язання задач менеджменту ризиків на основі розглянутого підходу до моделювання багатовимірних розподілів. Створення ІСППР – це самий ефективний спосіб швидкого впровадження нових наукових розробок у практику.

* * *

1. Nystrom K. Univariate Extreme Value Theory, GARCH and Measures of Risk / K. Nystrom, J. Skoglund. – Stockholm: Swedbank, Group Financial Risk Control, 2002. – 27 p.

2. Kluppelberg C. Risk Management with Extreme Value Theory / C. Kluppelberg // Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment. – New York: Chapman & Hall, 2003. – 405 p.

3. Extreme Value Theory and Applications, Vol. 3 // International conference NIST, 1993, 2-7 May. – Gaithersburg, 1993. – 230 p.

4. Bassi F. Risk management and quantile estimation / F. Bassi, P. Embrechts, M. Kafetzaki // A Practical Guide to Heavy Tails; Ed. R.J. Adler. - Boston: Birkhauser, 1998. - P. 111-130.

5. Embrechts P. Extremes in Economics and the Economics of Extremes / P. Embrechts // Extreme Values in Finance, Telecommunications and the Environment; Eds. B. Finkenstadt, H. Rootzen. – London: Chapman and Hall, CRC, 2001. – P. 169-183.

6. Embrechts P. Modelling multivariate extremes / P. Embrechts, L. Haan de, X. Huang // Extremes and Integrated Risk Management; Ed. P. Embrechts. – London: RISK Books, 2000. – P. 59-67.

7. Bouye E. Multivariate extremes at work for portfolio risk measurement / E. Bouye //

Finance. – 23, No.2. – Paris: Presses universitaires de France, 2002. – P. 125-144.
8. Rootzen H. The multivariate generalized Pareto distribution / H. Rootzen, N. Tajvidi // Bernoulli. – 12. – 2006. – P. 917-930.
9. Бідюк П.І. Аналіз і методи розв’язання задачі оцінювання екстремальних значень / П.І. Бідюк, Кроптя А.В. // Наукові вісті НТУУ КПІ. – 2005. – № 4. – С. 34-47.
10. Blum P. The ART of dependence modelling: the latest advances in correlation analysis / P. Blum, A. Dias, P. Embrechts // Alternative Risk Strategies. – London: RISK Books, 2002 – P. 339-356.
11. Embrechts P. Correlation: Pitfalls and alternatives / P. Embrechts, A.J. McNeil, D. Straumann // Risk. – 12. – 1999. – P. 69–71.
12. Embrechts P. Correlation and dependence in risk management / P. Embrechts, A.J. McNeil, D. Straumann // Risk Management: Value at Risk and Beyond; Ed. M.A.H. Dempster. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – P. 176-223.
13. Frees Understanding relationships using copulas / Frees, W. Edward, E. Valdez // North American Actuarial Journal. – 1998. – 2, N 1. – P. 1 – 25.
14. Nelsen R.B. An Introduction to Copulas / R.B. Nelsen. - New York: Springer, 2006. – 270 p.
15. Newey W.K. D. Large Sample Estimation and Hypothesis Testing / W.K Newey, D. McFadden //Handbook of Econometrics. – 4. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1994. – P. 2111-2245.

Отримано: 19.11.2011 р.