УДК 504.1:519.05

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МНОГОПРОДУКТОВЫХ ПОТОКОВ В ЗОНАЛЬНЫХ СЕТЯХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В.А. Васянин, канд. техн. наук
(Институт телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАН Украины)

Рассматриваются модели и алгоритмы для решения задачи распределения дискретных многопродуктовых потоков в зональных сетях, являющихся отдельными фрагментами сложной иерархической структуры. Показано, что такая задача при проектировании многоуровневой системы управления распределением потоков может быть сведена к задаче линейного программирования без учета ограничений на пропускные способности дуг. Для практического решения задачи предложены простые алгоритмы с трудоемкостью $O(n^3)$, где n — число узлов в сетевой структуре, основанные на методах построения кратчайших путей.

Розглядаються моделі й алгоритми для рішення задачі розподілу дискретних багатопродуктових потоків у зональних мережах, що є окремими фрагментами складної ієрархічної структури. Показано, що така задача при проектуванні багаторівневої системи керування розподілом потоків може бути зведена до задачі лінійного програмування без обліку обмежень на пропускні здібності дуг. Для практичного рішення задачі запропоновані прості алгоритми з трудомісткістю $O(n^3)$, де n — число вузлів у мережній структурі, засновані на методах побудови найкоротших шляхів.

Models and algorithms for the decision of a problem of distribution of discrete multicommodity flows in the zone networks being separate fragments of complex *hierarchical structure are considered. It is shown, that such problem at designing a multilevel control system by distribution of flows can be reduce to a problem of linear programming without restrictions on bandwidths of arches. For the practical decision of a problem an $0(n^3)$ simple algorithms, based on methods of the shortest path, are offered (where n — number of nodes in the network structure).*

Существующие и проектируемые коммуникационные сети в большинстве случаев имеют иерархическую структуру, где число уровней иерархии может определяется административным делением территории, структурой органов территориального управления, принятой технологией обработки и распределения потоков грузов и информации и др. Обычно такие сети состоят из децентрализованной распределенной сети верхнего уровня (магистральной сети) и низовых сетей (зональных и внутренних сетей). Структура сети каждого уровня может обладать своей внутренней иерархией. Методика проектирования таких сетей должна отражать характерную для сложных систем невозможность полной централизации в одном звене обработки информации и принятия решений по управлению процессами их развития и функционирования. Это приводит к необходимости формирования иерархической структуры системы автоматизированного управления распределением потоков. Проектирование иерархических сетевых структур имеет, как правило, нисходящий характер. На верхнем уровне решаются задачи структурного синтеза и перспективного развития сети, для которых используются крупноагрегированные модели распределения потоков. На низших уровнях проектирования детализация объектов должна увеличиваться с целью наиболее адекватного описания их функционирования и принятия рациональных решений. Это обуславливает итерационно-циклический характер процессов проектирования и управления, включающих процедуры синтеза и анализа возможных решений на всех уровнях сети. Поскольку решения принимаются в условиях неопределенности, связанных с неполнотой имеющейся информации, а также с огрублением математических моделей, необходимо разделять решения на перспективные, текущие и оперативные. В этой связи представляется актуальной разработка комплекса взаимосвязанных многоуровневых моделей перспективного развития, текущего планирования и оперативного управления, отображающих иерархию сети и соответствующую ей степень агрегирования показателей.

В данной статье рассматриваются модели и алгоритмы задачи распределения дискретных многопродуктовых потоков в зональных сетях, являющихся отдельными фрагментами сложной иерархической структуры. С точки зрения проектирования многоуровневой системы управления распределением потоков, ее можно отнести к задачам текущего планирования, в которых в качестве дискрета времени отправления потоков принимаются одни сутки для транспортных сетей и одна секунда для сетей передачи данных. При этом, в качестве мгновенных потоков, распределяемых по сети, используются средние планируемые потоки, рассчитанные для конкретных периодов.

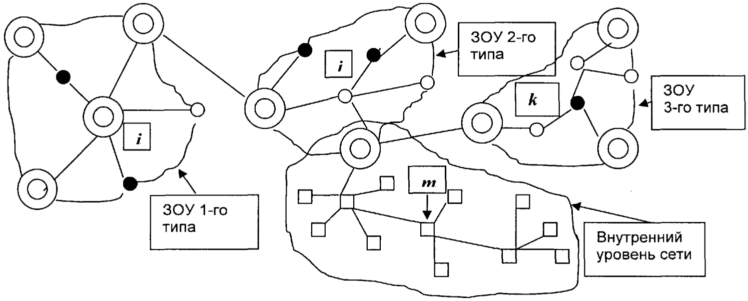
Пусть G (H, C) — иерархическая многопродуктовая сеть с множеством неориентированных топологических дуг P, $k = |P|$ и множеством узлов N, $n = |H|$ и $n = |N|$ и $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$, где N_1, N_2, N_3 — множества узлов первого, второго и третьего типов соответственно, а «$\cup$« — знак объединения множеств. Под топологической дугой будем понимать физический отрезок линии связи: железной или автомобильной дороги, кабеля сети передачи данных, телефонного кабеля и т. д., — соединяющий два любых узла из множества N так, что между рассматриваемыми узлами на данном отрезке нет больше ни одного узла из N. Узлы сети соответствуют пунктам отправления, получения, перегрузки (перекоммутации) грузов или информационных потоков.

На сети задано множество требований S на перевозку или передачу потоков. Под требованием $S_{ij} \in S$ (где «$\in$» — знак принадлежности к множеству) понимается пара узлов (i, j), между которыми имеется направленный дискретный поток единичных элементов (например, неделимых грузов унифицированного размера, бит или символов) объемом a_{ij}. Потоки требований заданы целочисленной матрицей $A = \|a_{ij}\|_{nxn}$, $a_{ii}=0$, $i=1, n$, которые подлежат единовременной передаче из источников i в стоки j, $i, j = 1, n$.

Для дальнейшего изложения материала введем следующие определения [1]. Любая конечная чередующаяся последовательность узлов и дуг сети G называется маршрутом. Маршрут называется цепью, если все его дуги различны. Цепь называется открытой, если ее концевые узлы различны. Открытая цепь называется путем, если все ее узлы различны. Назовем фрагментом сети G любую связную подсеть, состоящую из узлов любых типов и связывающих их дуг. Тогда под зоной обслуживания узла (ЗОУ) любого типа будем понимать фрагмент сети G, построенный по следующим правилам: 1) от узла проводятся все пути через узлы 2-го и 3-го типов до первых встретившихся узлов первого типа и тупиковых узлов второго и третьего типов; 2) определенные по правилу 1) узлы первого типа и тупиковые узлы соединяются условной границей зоны обслуживания узла.

Определенные таким образом области ЗОУ представляют зональные уровни иерархической сети или зональные сети. На рисунке показаны фрагменты сетей, а также примеры ЗОУ для узлов 1-го, 2-го и 3-го типов. На рисунке показаны также внутренние уровни сети, представленные централизованными подсетями с различными структурами (радиальными, древовидными, радиально-узловыми) и содержащими только узлы 4-го типа. Узлы 4-го типа явно не входят в рассматриваемую модель, однако всегда подразумевается, что создаваемые ими исходящие потоки и входящие в них потоки обрабатываются в главном узле (1-го, 2-го или 3-го типа) внутренней сети. Будем считать, что определение состава узлов различного типа, формирование ЗОУ и преобразование потоков от узлов 4-го типа для сети G выполняется при решении задачи структурно-топологической оптимизации, которая будет рассмотрена авторами в отдельной работе. Таким образом принимаем, что потоки узлов 4-го типа учтены в матрице A.

Предположим далее, что на узлы 2-го и 3-го типов наложены дополнительные технологические ограничения, а именно — они могут отправлять потоки требований только через узлы 1-го типа, лежащие на границе зон их обслуживания. Аналогично в соответствующих узлах 1-го типа обрабатываются и входящие потоки в узлы 2-го и 3-го типов. В реальных транспортных сетях и сетях передачи данных узлы 1-го типа являются, как правило, крупными предприятиями связи, обладающими мощной материально-технической базой. В узлах этого типа



Где i, j, k, m — соответственно узлы 1-го, 2-го, 3-го и 4-го типов.

Рис.

достигается максимальный уровень концентрации потоков. Узлы 2-го и 3-го типов могут отличаются между собой функциональными возможностями, уровнем технической оснащенности, числом обслуживающего персонала и пр. Так, например, в узлах 3-го типа, в отличие от узлов 2-го типа, может быть запрещена обработка транзитных потоков.

Итак, преобразование потоковой матрицы A должно учитывать принципы направления потоков для узлов второго и третьего типов, согласно которым исходящий поток из этих узлов направляется (рассортировывается) в узлы первого типа, лежащие на границе зон их обслуживания. Пусть $Y = \| \xi \|$, $\xi = 1, n$ — вектор, в котором суммируются дополнительные объемы обработки от преобразованных потоков узлов второго и третьего типов (первоначально Y обнулен); Z_i — зона обслуживания, построенная на сети G для i-го узла; l, k — узлы первого типа в ЗО j-го и i-го узлов, обслуживающие соответственно $j \in N_2 \cup N_3$, $i \in N_2 \cup N_3$; «$\leftarrow$» знак операции присваивания; $\leftrightarrow$, $\exists$ — кванторы всеобщности и существования; &, ! — знаки логического умножения и сложения. Тогда содержательная постановка задачи распределения потоков для узлов 2-го и 3-го типов в зональных сетях заключается в преобразовании матрицы A, которое выполняется следующим образом:

1) $\forall\ S_{ij} \in S,\ i, j \in N_1$ соответствующие потоки a_{ij} не изменяются;

2) $\forall\ S_{ij} \in S,\ i \in N_1,\ j \in N_2 \cup N_3,\ I\ /=\ I$ выполнить:

$$
\begin{aligned}
&a_{il} \leftarrow a_{il} + a_{ij} \\
&a_{lj} \leftarrow a_{lj} + a_{ij}, \\
&y_l \leftarrow y_l + a_{ij}, \\
&a_{ij} = 0;
\end{aligned}
$$

3) $\forall\ S_{ij} \in S,\ i \in N_2 \cup N_3,\ j \in N_1,\ k\ /=\ j$ выполнить:

$$
\begin{aligned}
&a_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij}, \\
&a_{kj} \leftarrow a_{kj} + a_{ij}, \\
&y_k \leftarrow y_k + a_{ij}, \\
&a_{ij} = 0;
\end{aligned}
\tag{1}
$$

4) $\forall\ S_{ij} \in S,\ i, j \in N_2 \cup N_3,\ k\ /=\ I$ выполнить:

$$
\begin{aligned}
&a_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij}, \\
&a_{kl} \leftarrow a_{kl} + a_{ij}, \\
&a_{lj} \leftarrow a_{lj} + a_{ij}, \\
&y_k \leftarrow y_k + a_{ij}, \\
&y_l \leftarrow y_l + a_{ij}, \\
&a_{ij} = 0;
\end{aligned}
\tag{2}
$$

5) $\forall\ S_{ij} \in S,\ i, j \in N_2 \cup N_3,\ k = I,\ j \neq Z_i,$ выполнить 3);

6) $\forall\ S_{ij} \in S,\ i, j \in N_2 \cup N_3,\ k = I,\ j \in Z_i$ преобразование a_{ij} не выполняется.

Как видно из постановки задачи для всех требований, потоки которых подвергаются операции преобразования, необходимо указать узлы k и l. Эти узлы определяются при решении задачи структурно-топологической оптимизации, которая относится к задачам перспективного развития.

Уровень агрегирования задач перспективного развития не позволяет получить оптимальную схему адресации потоков из узлов второго и третьего типов для периодов текущего планирования вследствие значительного колебания потоков. Поэтому для зональных сетей целесообразно иметь отдельную модель для решения задачи распределения потоков на уровне текущего планирования.

Покажем, что такая задача может быть сведена к задаче линейного программирования без учета ограничений на пропускные способности дуг. Транспортировка или передача потоков из узлов второго и третьего типов до обслуживающих их узлов первого типа и наоборот должна выполняться транспортными средствами магистрального уровня или по магистральным каналам связи, поэтому для таких потоков ограничения на пропускные способности дуг будут учтены в магистральных моделях при распределении потоков между всеми типами узлов в сети. Наиболее существенными факторами, определяющими качество схемы распределения потоков узлов второго и третьего типов, являются затраты на их транспортировку или передачу от узла-источника до узла-потребителя и возможности обработки потоков этих узлов в узлах первого типа. Поскольку в рассматриваемой задаче производится только адресация потоков из узлов второго и третьего типов в некоторые узлы первого типа, лежащие на границе зон обслуживания первых, а фактическое распределение потоков с учетом их объемов и других ограничений осуществляется при решении задачи распределения потоков на магистральном уровне, то транспортные затраты можно считать не зависящими от объемов потоков и принять линейными от расстояния. Примем также, что затраты на дополнительную обработку (пересортировку) единицы потока из узлов второго и третьего типов в обслуживающих их узлах первого типа одинаковы во всех узлах. Пусть $R = ||r_{ij}||_{nxn}$ — топологическая матрица, где

$$r_{ij} = \begin{cases} \text{длине дуги, если } p_{ij} \in P, \\ \infty, \text{ если дуги } p_{ij} \text{ не существует.} \end{cases}$$

Рассмотрим сеть $G_D(N, P_D)$, полученную из G следующим образом. Определим на сети G_D, используя R, кратчайшие пути от всех узлов $i \in N_2 \cup N_3$ до узлов первого типа, находящихся в ЗО i-го узла и кратчайшие пути между всеми узлами первого типа. В результате получим матрицу $D = ||\ d_{ij}\ ||_{nxn}$, в которой элементы не равные бесконечности представляют множество дуг P_D сети G_D.

Лемма. Пусть выполняется одно из условий:

$i,j \in N_1$ & d_{ij} /= ! $(i \in N_1, j \in N_2 \cup N_3)$ & d_{ij} /= ∞ ! (3)
! $(i \in N_2 \cup N_3, j \in N_1)$ & d_{ij} /= ∞, (4)
$(i \in N_3 \cup N_3, j \in N_1)$ & $d_{ij} = \infty$, (5)
$(i, j \in N_2 \cup N_3)$ $d_{ij}=\infty$ & $j \notin Z_i$, (6)

тогда:

1) кратчайший путь между любыми узлами, для которых выполняется условие (3), состоит из одной дуги и совпадает с кратчайшим путем между этими узлами, построенными на сети G;

2) кратчайший путь между узлами, для которых выполняется (4) или (5) состоит из двух дуг;

3) кратчайший путь между узлами, удовлетворяющими условию (6) состоит из двух или трех дуг.

Доказательство. Для доказательства 1) покажем, что длина любого пути, построенного на сети G_D между узлами I, $j \in N_1$ и содержащего более одной дуги не меньше, чем длина пути, состоящего из одной дуги. Предположим, что найден кратчайший путь π_{ij} от i до j, содержащий более одной дуги. Пусть π_{ij} задан перечислением узлов $\pi_{ij}= (i, k_1, k_2,..., k_\xi, j)$. Тогда длина любой дуги (i, k_1), (k_1, k_2),..., (k_ξ, j) в сети G_D определяется суммой длин некоторого подмножества топологических дуг сети G. Если все топологические дуги, составляющие отрезки (i, k_1),..., (k_ξ, j) являются подмножеством множества топологических дуг, входящих в путь π'_{ij}, построенный на сети G и представленный в сети G_D одной дугой, то длины путей π_{ij} и π'_{ij} совпадают. В случае невыполнения последнего условия, длина пути рй; не может быть меньше длины π'_{ij}, так как тогда путь π'_{ij}; не был бы кратчайшим. Полученное противоречие и тот факт, что в алгоритме построения кратчайших путей, среди нескольких возможных кратчайших путей между заданными узлами, первым всегда будет определен путь, состоящий из меньшего числа дуг, доказывает утверждение 1). Доказательство 2) и 3) следует из правил формирования ЗО для узлов, построения сети G_D, а также из рассуждений, аналогичных приведенным для доказательства утверждения 1). Следует отметить, что для случаев (4)–(6) длины кратчайших путей между узлами i и j, построенных в сети G и G_D могут не совпадать. В случае (6), когда $j \in Z_i$ имеют место внутризонные требования, потоки которых не подвергаются дополнительной переработке в узлах первого типа, поэтому они не рассматриваются при формировании матрицы A.

Будем далее считать, что каждая неориентированная дуга $p \in P_D$ заменена на две дуги с противоположной ориентацией и p_D означает число всех ориентированных дуг в G_D.

Пусть $X^i = \| x^i_j \|$, $j = 1, p_D$, $i = 1, n$ — вектор-столбец, определяющий потоки продукта i по всем дугам сети G_D; $A = \| a_{ij} \|_{nxn}$ — матрица потоков, в которой сохранены только те элементы a_{ij}, для индексов которых справедливо одно из условий (4)–(6). Остальные элементы в A заменены на нули. Обозначим через $C^i = \| c^i_j \|$, $j = 1, p_D$, $i = 1, n$ вектор-строку затрат на перевозку единицы потока продукта i по дугам сети G_D. Построим для G_D матрицу инциденций $E = \| e_{ij} \|_{nxpD}$ узлы-дуги и определим матрицы $W^\xi = \| w^\xi_{ij} \|_{nxpD}$, $= 1, n$;

векторы-столбцы $V^i = \| v^i_j \|^T$, $j = 1, n$, $i = 1, n$; вектор-столбец пропускных способностей узлов $H^w = \| h_i \|^T$, $i = 1, n$. Знак «T» — означает транспонирование. Где соответственно:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если дуга } j \text{ направлена к узлу } I, \\ -1, \text{ если дуга } j \text{ направлена от узла } i, \\ 0, \text{ в противном случае;} \\ 1, \text{ если } e_{ij} = 1, \end{cases}$$

$$W^\xi_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } e_{ij} = -1 \text{ и } I = \xi, \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$V^i_j = \begin{cases} \sum_{\xi=1}^{n} a_{ij}, \text{ если } j = I, \\ a_{ij}, \text{ если } j = \xi. \end{cases}$$

Решение задачи распределения потоков в зональных сетях будем искать в классе задач линейного программирования вида:

$$\mathrm{Min}\ Z = C^1[p_D]X^1[p_D] + \ldots + C^n[p_D]X^n[p_D], \tag{7}$$

$$W^1[n,\ p_D]\ X^1[p_D] + \ldots + W^n[n, p_D]X^n[p_D] <= H^W[n], \tag{8}$$

$$\begin{aligned} E[n,\ p_D]\ X^1[p_D] &= V_1[n], \\ &\ \vdots \\ E\ [n,\ p_D]\ X^n\ [p_D] &= V^n[n] \end{aligned} \tag{9}$$

$$X^i\ [p_D] >= 0 \text{ и целые, } i = 1,\ n. \tag{10}$$

Рассмотрим особенности сформулированной задачи. Из утверждения леммы ясно, что для решения блочных задач можно использовать эффективные алгоритмы построения кратчайших путей по одному критерию — минимуму длины пути. Это следует из того, что любой путь для требований из класса (4) или (5) будет состоять из двух дуг, а для требований класса (6) — из двух или трех дуг. Поэтому выбор оптимального пути будет всегда производиться среди путей, содержащих одинаковое число дуг, то есть все пути эквивалентны с точки зрения числа транзитных узлов. Другая особенность задачи (7)—(10) заключается в том, что ограничения на пропускные способности узлов необходимо учитывать только для узлов первого типа, связанных с узлами второго и третьего типов в сети *Go* хотя бы одной дугой. Верхняя граница числа учитываемых ограничений (8) равна величине n_1 — числу узлов в множестве N_1. Последнее обстоятельство обеспечивает относительно невысокую размерность задачи (7)—(10) и позволяет использовать для ее решения различные модификации методов декомпозиции Данцига-Вулфа [2] и релаксации ограничений Розена [3, 4]. Отметим, что получаемые решения при использовании этих методов будут всегда целочисленными, поскольку матрицы ограничений в приведенной модели являются вполне унимодулярными, а правые части ограничений целочисленными векторами и выбор оптимального решения осуществляется на многограннике с целочисленными вершинами.

Учитывая, что реальные сетевые структуры всегда функционируют в условиях неопределенности, воздействия случайных факторов, динамически изменяющихся с течением времени ресурсов, а также при недостаточно точной исходной информации, для практического решения рассматриваемой задачи можно отказаться от точных методов и использовать алгоритмы, основанные на методах построения кратчайших путей. Приведем алгоритмы, позволяющие решить задачу в случаях заданных и неизвестных зон обслуживания узлов.

Пусть $C = \| c_{ij} \|_{nxn}$ — справочная матрица кратчайших путей, построенная для сети *Go,* где

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i = j \ ! \ i, j \in N_2 \cup N_3 \ \& \ j \in Z_i, \\ i, \text{ если } i \text{ и } j \text{ связаны одной дугой}, \quad (11) \\ k, \text{ если путь от } i \text{ до } j \text{ содержит более одной дуги,} \end{cases}$$

где k — предпоследний узел на кратчайшем пути от i до j; Γ_i^1 — множество узлов первого типа в Z_i; $\{\alpha|\beta\}$ — множество α, для которых верно утверждение β.

До описания алгоритмов уместно будет привести теорему, имеющую важное значение для построения кратчайших путей.

Теорема [5]. $\forall \ i \in N \ \exists \ \{\pi_{ij} \mid j \in (N \backslash i)\}$ такое, что в $\forall_j$ входит не более одной дуги, принадлежащей любому кратчайшему пути π_{ij}.

Таким образом, кратчайшие пути π_{ij}, построенные от узла i представляют собой дерево с корнем в i, которое может быть однозначно описано строкой справочной матрицы C.

Алгоритм 1. Распределение потоков при заданных ЗОУ.

1. Используя R построить в сети G кратчайшие пути от $\forall \, i \in N_2 \cup N_3$ до $\forall \, j \in \Gamma_i^1$ и между всеми узлами из множества N_1.

2. Используя D, построенную в шаге 1, найти кратчайшие пути в сети G_D. При построении путей сформировать справочную матрицу C в соответствии с (11).

3. $C' \leftarrow 0$; $Y \leftarrow 0$.

4. Для $\{i\ , j\ I\ (c_{ij} = i\ !\ c_{ij} = 0)\ \&\ i\ /= j\ , i, j = 1, n\}$ выполнить $c'_{ij}, \leftarrow i$.

5. Для $\{I, j\ I\ c_{ij}\ /= i\ !\ c_{ij}\ /= 0\ , i, j = 1, n\}$ выполнить 6–12.

6. $\xi \leftarrow j$; $I \leftarrow 0$; $k \leftarrow 0$.

7. Пока $c_i\xi$ /= I выполнить 8—10.

8. Если $I = 0$, то $I \leftarrow c_i\xi$.

9. $k \leftarrow c_i\xi$.

10. $\xi \leftarrow c_i$. Перейти к 7.

11. Если $k = I$, то выполнить преобразование (1), иначе выполнить преобразование (2).

12. $C'_{ij} \leftarrow k$. Перейти к 5.

13. Стоп.

Запись в строках 4 и 5 выражения $i, j = 1, n$ означает циклическое изменение индексов, причем второй индекс изменяется быстрее первого. Такая запись аналогична организации внутреннего цикла по j и внешнего по i, когда оба индекса изменяются от 1 до n с шагом 1.

В результате работы алгоритма 1 будут сформированы матрицы A, C' и вектор Y. Элементы справочной матрицы сортировки $C' = \|\ c'_{ij}\ \|_{nxn}$ определяются следующим образом:

$$C'_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i = j, \\ i, \text{ если поток } a_{ij} \text{ адресуется (сортируется) в узел } j, \\ k, \text{ если поток } a_{ij} \text{ адресуется (сортируется) в узел } k. \end{cases}$$

Матрица C' используется для запоминания схемы адресации (сортировки) потоков в узлах второго и третьего типов.

Для работы алгоритма 1 необходимо знать множества Γ_i^1, $i \in N_2 \cup N_3$. Ранее отмечалось, что множества Γ_i^1 определяются после решения задачи структурно-топологической оптимизации. Как правило, на практике, полученная структура сети всегда уточняется методом экспертного анализа с привлечением опытных специалистов. В случае, если процедура уточнения структуры сети по каким-либо причинам выполнена не была, может оказаться, что зоны обслуживания для узлов второго и третьего типов точно не известны. Поэтому целесообразно иметь алгоритм распределения потоков в зональных сетях, если задан только вектор $\theta = \| \theta_I \|$, $i = 1, n$, определяющий типы узлов, где

$$\theta_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in N_1, \\ 0, \text{ если } i \in N_2 \cup N_3. \end{cases}$$

Алгоритм 2. Распределение потоков при неизвестных ЗОУ.

1. Используя матрицу R построить на сети G кратчайшие пути между всеми узлами с одновременным формированием справочной матрицы C согласно (11).
2. $C' \leftarrow 0$; $Y \leftarrow 0$.
3. Для $\{i \mid i = 1, n, i <= n\}$ выполнить 4—23.
4. *Для* $\{j \ I \ j = 1, n \ , j <= n\}$ выполнить 5—22.
5. *Если* i /= j, перейти к 6, иначе перейти к 22.
6. Если $\theta_{i'} = 1$ & $\theta_i = 1$ выполнить c'_j ; $\leftarrow i$; перейти к 22.
7. $\xi \leftarrow j$; $l \leftarrow 0$; $k \leftarrow 0$.
8. Пока c_i /= i выполнить 9—12.
9. Если $\theta c_i = 1$ выполнить 10—11, иначе перейти к 12.
10. Если $I = 0$, то $I \leftarrow c_i \xi$.
11. $k \leftarrow c_i$.
12. $\xi \leftarrow c_i$. Перейти к 8.
13. Если $\theta_i = 0$, то перейти к 14, иначе к 21.
14. Если $\theta_j = 0$, то перейти к 15, иначе к 19.
15. Если I /= 0, то перейти к 16, иначе $C'_{ij} \leftarrow i$, перейти к 22.
16. Если I /= k, то выполнить 17, иначе перейти к 18.
17. $a_{kl} \leftarrow a_{kl} + a_{ij}$,

$a_{ij} a_{lj} + a_{ij}$,

$y_l \leftarrow y_l + a_{ij}$,

$L1$: $a_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij}$

$y_k \leftarrow y_k + a_{ij}$,

$c_{ij} \leftarrow k$,

$L2$: $a_{ij} \leftarrow 0$, перейти к 22.

18. Выполнить

$L3$: $a_{il} \leftarrow a_{il} + a_{ij}$,

$a_{lj} \leftarrow a_{lj} + a_{ij}$,

$y_l \leftarrow y_l + a_{ij}$,

$c'_{ij} \leftarrow l$, перейти к $L2$.

19. Если $k = 0$, то $c'_{ij} \leftarrow I$, перейти к *22.*

20. $a_{kj} \leftarrow a_{kj} + a_{ij}$. Перейти к $L1$.

21. Если $I = 0$, *то* $c'_{ij} \leftarrow i$, *иначе перейти к* $L3$.

22. Перейти к 4.

23. Перейти к 3.

24. Стоп.

В алгоритме 2 указатели k и I определяют соответственно первый и последний узлы первого типа, находящиеся на кратчайшем пути между i и j. Если между узлами i и j нет узлов первого типа, либо нет вообще никаких узлов, значения $k = l = 0$.

Сравнивая трудоемкость алгоритмов 1 и 2 с трудоемкостью решения (7)–(10) отметим, что использование простых процедур, основанных на построении кратчайших путей позволяет указать верхнюю границу асимптотической трудоемкости — $O(n^3)$, в то время как решение целочисленной задачи (7)–(10) имеет экспоненциальную оценку [б].

Резюмируя обсуждение решения задачи распределения потоков в зональных сетях, можно сделать следующие выводы:

1. Распределение потоков из узлов 2-го и 3-го типов, осуществляемое при решении задачи структурно-топологической оптимизации иерархической многопродуктовой сети нецелесообразно применять на уровнях текущего планирования функционирования сети.

2. Использование предложенной модели и известных декомпозиционных алгоритмов решения задачи (7)–(10) оправдано только при необходимости «жесткого» учета ограничений (8).

3. Преимущество при решении задачи распределения потоков в зональных сетях следует отдать алгоритмам 1 и 2 в силу их простоты, небольшой трудоемкости и, как показали практические исследования, приемлемой точности решения в смысле достижения оптимума (7).

* * *

1. Оре О. Теория графов / О. Оре. — М.: Наука, 1980. — 336 с.

2. Dantzig G. B. Decomposition Algorithm for linear programming / G.B. Dantzig, Ph. Wolfe // Econometrica. — 1961. — V. 29, № 4. — P. 767–778.

3. Rosen J.B. Convex partition programming / J.B. Rosen // In Recent advances in mathematical programming. — New York, 1963. — P. 159–176.

4. Rosen J.B. Primal partition programming for block-diagonal matrices / J.B. Rosen // Numerische Mathematik. — 1964. — N. 6, N 3. — P. 250–264.

5. Васильєва Е.М. Нелинейные транспортные задачи на сетях / Е.М. Васильєва, Б.Ю. Левит, В.Н. Лившиц. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 104 с.

6. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и трудно-решаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. — М.: Мир, 1982. — 416 с.

Отримано: 4.07.2011 р.