УДК 517.54

© 2008

А. Л. Таргонский

Экстремальные задачи о частично неналегающих областях на римановой сфере

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

We present new results on the maximization of products of positive powers of inner radii of some special systems of domains in the extended complex plane $\overline{\mathbb{C}}$ with respect to points of finite sets such that any two distinct points z, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ of such a set belong to different rays outgoing from the origin.

В геометрической теории функций комплексного переменного задачи об экстремальном разбиении римановой сферы составляют активно развивающееся направление. Возникновение этого направления связано с работой М. А. Лаврентьева [1], в которой была впервые поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно непересекающихся односвязных областей. Впоследствии эта тематика развивалась многими исследователями (см., напр., [2–12]).

В данной работе исследуются обобщения задач об экстремальном разбиении римановой сферы на случай, когда вместо систем попарно непересекающихся областей рассматриваются специальные наборы областей, некоторые из которых могут определенным образом пересекаться между собой.

Пусть, как обычно, $\mathbb{R}^+$ — множество положительных вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация, и пусть $r(B, a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$. В случае конечной точки a величина $r(B, a)$ понимается в обычном смысле (см., напр., [13, 14]), а при $a = \infty$ мы, следуя В. Н. Дубинину [14], полагаем $r(B, \infty) = e^{\gamma}$, где γ — постоянная Робена области B (см. [2]). Используемое в настоящей работе понятие квадратичного дифференциала и связанные с ним результаты подробно изложены в монографии [15].

Всюду в дальнейшем n — целое число, $n \geqslant 3$.

Конечное множество точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для которого выполняются соотношения $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$, мы будем называть лучевой системой точек. Для каждой такой системы обозначим

$$P_k(A_n) := \{w\colon \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}, \quad \sigma_k(A_n) := \frac{1}{\pi}(\arg a_{k+1} - \arg a_k), \quad k = \overline{1, n},$$

$$\mu(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{1/(2\sigma_k)}\right)|a_k|,$$

где $\chi(t) = (1/2)(t + t^{-1})$, $a_{n+1} = a_1$, $\arg a_{n+1} := 2\pi$. Ясно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2$.

Пусть D — открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащее лучевую систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$. Введем обозначения: если $a \in D$, то $D(a)$ — связная компонента D, содержащая точку a; $D_k(a_p)$ — связная компонента множества $D(a_p) \bigcap \overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку a_p, $p = k$,

$k+1$ $(k=\overline{1,n})$; $D_k(0)$ — связная компонента множества $D(0)\bigcap\overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку $w=0$; $D_k(\infty)$ — связная компонента множества $D(\infty)\bigcap\overline{P_k(A_n)}$, содержащая бесконечно удаленную точку.

Будем говорить, что множество D удовлетворяет первому условию неналегания относительно системы точек A_n, если для всех $k\in\{1,\ldots,n\}$ множества $D_k(a_k)$ и $D_k(a_{k+1})$ не пересекаются. Если D содержит точки $w=0$ и $w=\infty$ и для каждого $k\in\{1,\ldots,n\}$ множества $D_k(a_k)$, $D_k(a_{k+1})$, $D_k(0)$ и $D_k(\infty)$ попарно не пересекаются, то мы говорим, что открытое множество D удовлетворяет второму условию неналегания относительно лучевой системы точек A_n.

В принятых обозначениях сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha\in\mathbb{R}^+$, $\alpha\leqslant 0{,}195$. Тогда для каждой лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mu(A_n)=1$, и для произвольного открытого множества D, содержащего точки 0, ∞, $a_1,\ldots,a_n$ и удовлетворяющего второму условию неналегания относительно системы A_n, справедливо неравенство*

$$(r(D,0)\cdot r(D,\infty))^\alpha\cdot\prod_{k=1}^n r(D,a_k)\leqslant(r(D_0,0)\cdot r(D_0,\infty))^\alpha\cdot\prod_{k=1}^n r(D_0,d_k), \tag{1}$$

где $D_0=\bigcup\limits_{k=1}^n B_k\bigcup B_0\bigcup B_\infty$, а области B_0, B_∞, B_k и точки d_k являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{\alpha w^{2n}+(n^2-2\alpha)w^n+\alpha}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2$$

$(0\in B_0;\ \infty\in B_\infty;\ d_k\in B_k,\ k=\overline{1,n})$.

Теорема 2. *Если $\alpha\in\mathbb{R}^+$, $\alpha\leqslant n^2/8$, то для каждой лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mu(A_n)=1$, $\sigma_k\leqslant 1/\sqrt{2\alpha}$, $k=\overline{1,n}$, и для произвольного открытого множества D, содержащего точки 0, ∞, $a_1,\ldots,a_n$ и удовлетворяющего второму условию неналегания относительно системы A_n, справедливо неравенство* (1).

Приведем два следствия, вытекающие из теоремы 2. Первое из них получается с помощью предельного перехода при $\alpha\to 0$ и установлено в работе [10].

Следствие 1. *Для каждой лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mu(A_n)=1$ и для произвольного открытого множества $D\supset A_n$, которое удовлетворяет первому условию неналегания относительно системы A_n, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^n r(D,a_k)\leqslant\prod_{k=1}^n r(D_0,d_k),$$

где $D_0=\bigcup\limits_{k=1}^n B_k$, а области B_k и точки d_k, $d_k\in B_k$, являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Следствие 2. *Пусть ε, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, $\varepsilon\leqslant 1/n$, $\alpha\leqslant(1/2)(n/(2+\varepsilon n))^2$. Тогда для каждой лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mu(A_n)=1$, $|\sigma_k(A_n)-2/n|\leqslant\varepsilon$, $k=\overline{1,n}$,* *и для произвольного открытого множества D, содержащего точки 0, ∞, $a_1, \ldots, a_n$ и удовлетворяющего второму условию неналегания относительно системы A_n, справедливо неравенство* (1).

Отметим, что сформулированные утверждения являются прямым обобщением результатов работ [11, 12]. Другие результаты подобного типа содержатся в работах [3–10, 14].

Приведем доказательство теоремы 1. Для этого воспользуемся методами работ [5, 6, 14]. При малых $t \in \mathbb{R}^+$ определим множества $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$, $\overline{U}_t = \{w \in \mathbb{C}\colon |w| \leqslant t\}$, $\Delta_t = \{w \in \mathbb{C}\colon |w| \geqslant t^{-1}\}$, $E_k(t) = \{w \in \mathbb{C}\colon |w - a_k| \leqslant t\}$ $(k = \overline{1,n})$ и рассмотрим порожденный ними конденсатор $C(t, D, A_n) = \{E_0, \overline{U}_t, \Delta_t, E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ с предписанными значениями 0, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha}$, $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n\text{раз}}$ соответственно. Напомним (см. [13]), что емкостью такого конденсатора называется величина

$$\operatorname{cap} C(t, D, A_n) = \inf \iint [(G'_x)^2 + (G'_y)^2] \, dxdy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных непрерывных в $\overline{\mathbb{C}}$ и липшицевых в $\mathbb{C}$ функций $G(z)$ таких, что в некоторых, зависящих от функции $G(z)$, окрестностях множеств E_0, $\overline{U}_t$, Δ_t и $E_k(t)$ выполняются соответственно равенства $G(z) = 0$, $G(z) = \sqrt{\alpha}$, $G(z) = \sqrt{\alpha}$ и $G(z) = 1$ $(k = \overline{1,n})$. Модуль конденсатора $|C(t, D, A_n)|$ определяется равенством $|C(t, D, A_n)| = [\operatorname{cap} C(t, D, A_n)]^{-1}$.

Из теоремы 1 работы [14] получаем асимптотическую формулу

$$|C(t, D, A_n)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n + 2\alpha} \cdot \log \frac{1}{t} + M(D, A_n) + o(1), \qquad t \to 0, \tag{2}$$

в которой

$$M(D, A_n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(n + 2\alpha)^2} \cdot \Bigg[\alpha \log r(D, 0) + \alpha \log r(D, \infty) + 2\alpha g_D(0, \infty) + \\ + \sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{\alpha}(g_D(0, a_k) + g_D(\infty, a_k)) + \sum_{k=1}^{n} \log r(D, a_k) + \sum_{k \neq p} g_D(a_p, a_k)\Bigg], \tag{3}$$

а обобщенная функция Грина $g_B(z, a)$ множества B с полюсом в точке a определяется равенством

$$g_B(z, a) = \begin{cases} g_{B(a)}(z, a), & z \in B(a), \\ 0, & z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(a)}, \\ \lim\limits_{\zeta \to z} g_{B(a)}(\zeta, a), \quad \zeta \in B(a), & z \in \partial B(a) \end{cases}$$

(существование предела вытекает из принципа максимума для гармонических функций), где $g_{B(a)}(z, a)$ обозначает обобщенную функцию Грина области $B(a)$ с полюсом в точке a (см., напр., [2]).

Выполним разделяющее преобразование (см. [14]) конденсатора $C(t, D, A_n)$ относительно семейства углов $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$ и семейства функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, где $z_k(w)$ — однозначная ветвь функции $(-1)^k i(e^{-i\arg a_k}w)^{1/\sigma_k}$, отображающая биссектрису угла $P_k(A_n)$ на множество $\{(-1)^{k+1}y\colon y\in\mathbb{R}^+\}$ $(k=\overline{1,n})$, и рассмотрим конденсатор

$$C_k(t,D,A_n)=(E_0^{(k)},\overline{U}_t^{(k)},\Delta_t^{(k)},E_1^{(k)},E_2^{(k)})$$

с предписанными значениями 0, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha}$, $1,1$ соответственно, где

$$E_0^{(k)}=z_k\Big(E_0\bigcap\overline{P}_k\Big)\bigcup\Big\{z_k\Big(E_0\bigcap\overline{P}_k\Big)\Big\}^*,$$

$$U_t^{(k)}=z_k\Big(\overline{U}_t\bigcap\overline{P}_k\Big)\bigcup\Big\{z_k\Big(\overline{U}_t\bigcap\overline{P}_k\Big)\Big\}^*,$$

$$\Delta_t^{(k)}=z_k\Big(\Delta_t\bigcap\overline{P}_k\Big)\bigcup\Big\{z_k\Big(\Delta_t\bigcap\overline{P}_k\Big)\Big\}^*,$$

$$E_1^{(k)}=z_k\Big(E_k(t)\bigcap\overline{P}_k\Big)\bigcup\Big\{z_k\Big(E_k(t)\bigcap\overline{P}_k\Big)\Big\}^*,$$

$$E_2^{(k)}=z_k\Big(E_{k+1}(t)\bigcap\overline{P}_k\Big)\bigcup\Big\{z_k\Big(E_{k+1}(t)\bigcap\overline{P}_k\Big)\Big\}^*\qquad(k=\overline{1,n}),$$

$$E_{n+1}(t)=E_1(t),\qquad\{A\}^*=\{w\in\overline{\mathbb{C}}\colon -\overline{w}\in A\}.$$

При таком разделяющем преобразовании конденсатору $C(t,D,A_n)$ соответствует набор конденсаторов $\{C_k(t,D,A_n)\}_{k=1}^n$, причем в силу результатов работ [5, 6, 14] справедливо неравенство

$$\operatorname{cap}C(t,D,A_n)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cap}C_k(t,D,A_n),\tag{4}$$

из которого выводим соотношение

$$|C(t,D,A_n)|\leqslant 2\left(\sum_{l=1}^{n}|C_k(t,D,A_n)|^{-1}\right)^{-1}.\tag{5}$$

С другой стороны, при всех $k\in\{1,\dots,n\}$ имеют место асимптотические равенства

$$|z_k(w)-z_k(a_m)|=\frac{1}{\sigma_k}|a_m|^{(1/\sigma_k)-1}|w-a_m|(1+o(1)),\qquad w\to a_m,\qquad m=k,k+1,$$

$$|z_k(w)|=|w|^{1/\sigma_k}(1+o(1)),\qquad w\to 0,\qquad w\to\infty.$$

Из этих соотношений, используя (2) и (3), получаем асимптотическое равенство

$$|C_k(t,D,A_n)|=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2+2\alpha\sigma_k}\cdot\log\frac{1}{t}+M_k(D,A_n)+o(1),\qquad t\to 0,\tag{6}$$

где

$$M_k(D,A_n)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(2+2\alpha\sigma_k)^2}\times$$

$$\times\left[\sigma_k^2\alpha\log(r(D_0^{(k)},0)r(D_\infty^{(k)},\infty))+\log\frac{r(D_k^{(1)},a_k^{(1)})\cdot r(D_k^{(2)},a_k^{(2)})}{\dfrac{1}{\sigma_k}|a_k|^{(1/\sigma_k)-1}\cdot\dfrac{1}{\sigma_k}|a_{k+1}|^{(1/\sigma_k)-1}}\right],\tag{7}$$

$z_k(a_k) =: a_k^{(1)}$, $z_k(a_{k+1}) =: a_k^{(2)}$, $D_0^{(k)}$, $D_\infty^{(k)}$ и $D_k^{(s)}$ — объединение связных компоненты множеств $z_k\bigl(D \bigcap \overline{P}_k\bigr)$, содержащих соответственно точки 0, ∞ и $a_k^{(s)}$, с образами их симметричных отражений относительно мнимой оси ($k = \overline{1,n}$, $s = 1,2$). Из формулы (6) следует, что при $t \to 0$ справедливо равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |C_k(t, D, A_n)|^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4\pi(n+2\alpha)} \cdot \log\frac{1}{t} + \frac{1}{(n+2\alpha)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+\alpha\sigma_k)^2 M_k(D, A_n) + o(1),$$

которое в сочетании с (2) и (5) дает оценку

$$M(D, A_n) \leqslant \frac{2}{(n+2\alpha)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+\alpha\sigma_k)^2 M_k(D, A_n). \tag{8}$$

Из этой оценки и из (3) и (7) следует неравенство

$$(r(D,0)\cdot r(D,\infty))^{\alpha} \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \sigma_k \cdot \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{r(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}) \cdot r(D_k^{(2)}, a_k^{(2)})}{\bigl(|a_k|^{1/\sigma_k} + |a_{k+1}|^{1/\sigma_k}\bigr)^2} \cdot (r(D_0^{(k)}, 0) \cdot r(D_\infty^{(k)}, \infty))^{\alpha\sigma_k^2} \right\}^{1/2}. \tag{9}$$

Отсюда, используя результаты и методы работ [5, 8, 11, 12, 14], получаем требуемое заключение. Теорема 1 доказана.

Теорема 2 доказывается аналогичным образом.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
4. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та АН. – 2001. – **276**. – С. 253–275.
5. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
6. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1 (295). – С. 3–76.
7. *Емельянов Е. Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та АН. – 2002. – **286**. – С. 103–114.
8. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Доп. НАН України. – 2004. – № 8. – С. 7–15.
9. *Бахтин А. К.* О некоторых экстремальных задачах геометрической теории функций комплексного переменного // Там само. – 2006. – № 9. – С. 7–11.
10. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Там само. – 2006. – № 10. – С. 7–13.
11. *Бахтин А. К., Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 3. – С. 298–303.

12. *Таргонський А. Л.* Екстремальні задачі теорії однолистих функцій: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2006. – 21 с.
13. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
14. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та АН. – 1997. – **237**. – С. 56–73.
15. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 27.12.2007