УДК 550.834

В. С. Мостовой, С. В. Мостовой

Вариационный подход к решению обратной задачи при накоплении сейсмических сигналов в активном мониторинге

(Представлено академиком НАН Украины В. И. Старостенко)

In the approach to the solution of ill-posed problems such as the integral equations of convolution, it is important to construct such procedures of the solution which would be based on the additional information specifying a model and lead to a stable solution. These equations are a good model for a wide range of phenomena and are widely used in geophysics. Such an approach in the form of an estimation of these parameters by the chosen criterion is offered. It is based on the use of a priori distributions of free parameters of the model. The numerical example is given.

В подходе к решению некорректных задач типа интегральных уравнений свертки (в качестве хорошей геофизической модели для широкого круга явлений [1]) важно построить такие процедуры решения, которые бы основывались на дополнительной — уточняющей модель — информации и приводили к устойчивому решению. Данный подход основан на использовании априорных распределений свободных параметров модели [2] и предлагается в виде их оценки по выбранному критерию.

Модель процесса активного мониторинга подробно рассмотрена в статье [3]. Зондирующий сигнал $S(t,\boldsymbol{\lambda})$, развивающийся во времени и зависящий от множества флуктуирующих параметров $\boldsymbol{\lambda}$, является входным сигналом в тестирующую систему с передаточной функцией $H(t)$ и на выходе системы дает отклик в виде свертки $y(t,\boldsymbol{\lambda})$:

$$y_k(t,\lambda_k) = S(t,\lambda_k) * H(t) + n_k(t), \tag{1}$$

где t — аддитивная (всегда присутствующая) помеха; k — номер в серии из K экспериментов. Энергия сигнала выбирается такой, что отклик системы $y_k(t,\boldsymbol{\lambda})$ соизмерим с энергией аддитивной помехи. Наблюденные данные — это суперпозиция результатов из K экспериментов $y_k(t,\boldsymbol{\lambda})$:

$$\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} y_k(t,\lambda_k) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(S(t,\lambda_k) * H(t)) = \widetilde{S}(t) * H(t). \tag{2}$$

Усредненный сигнал $\widetilde{S}(t)$ (при больших значениях K) приближенно равен математическому ожиданию сигнала, зависящему от случайного вектора параметров $\boldsymbol{\lambda}$, распределенного с плотностью $P(\boldsymbol{\lambda})$, который опишем формулой:

$$\widetilde{S}(t) = \int\limits_{R_{\boldsymbol{\lambda}}} S(\tau,\boldsymbol{\lambda})P(\boldsymbol{\lambda})\,d\boldsymbol{\lambda}. \tag{3}$$

Усредненные данные как отклик системы, модель которой выбирается передаточной функцией определенной структуры $H(t, \boldsymbol{\alpha})$ и полностью задается вектором свободных параметров $\boldsymbol{\alpha}$:

$$y(t) = \int\limits_{R_\tau} \widetilde{S}(\tau) H(t-\tau, \boldsymbol{\alpha})\, d\tau. \qquad (4)$$

Среда $H(t, \boldsymbol{\alpha})$ в нашем предположении имеет отклик на зондирующий сигнал потоком из априори неизвестного количества Q сигналов различной амплитуды A_q с моментами вступления τ_q, т. е. выбираем такую модель среды, в которой ее передаточная функция имеет вид:

$$H(t, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{q=1}^{Q} A_q \delta(t - \tau_q), \qquad (5)$$

где $\alpha_{2q} = \tau_q$; $\alpha_{2q-1} = A_q$; $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k\}$, $k = \overline{1, 2Q}$.

Отметим, что параметры $\{A_q\}$ входят в модель линейно, а параметры $\{\tau_q\}$ — нелинейно. Величина Q, как и сами значения свободного вектора параметров $\boldsymbol{\alpha}$, подлежит вычислению.

Некорректность задачи определения передаточной функции из уравнения, описанного ниже, требует привлечения дополнительной информации, например в виде априорного распределения свободных параметров модели среды $P(\boldsymbol{\alpha})$.

Предлагается решить уравнение (4) вариационным методом [4], когда в качестве альтернативного решения выбирается вектор параметров, который задает $H(t, \boldsymbol{\alpha})$ и минимизирует функционал $F(\boldsymbol{\alpha})$ на множестве допустимых значений вектора свободных параметров $\boldsymbol{\alpha}$ модели среды $H(t, \boldsymbol{\alpha})$:

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = \min_{\boldsymbol{\alpha}} \|y(t) - H(t, \boldsymbol{\alpha}) * \widetilde{S}(t)\|. \qquad (6)$$

В формуле (6) минимизируется в выбранной метрике расстояние между результатом эксперимента $y(t)$ и нашими модельными представлениями:

$$M(t, \boldsymbol{\alpha}) = H(t, \boldsymbol{\alpha}) * \widetilde{S}(t). \qquad (7)$$

Следовательно, наши гипотезы относительно представления передаточной функции (5) не связаны с соответствующим спектральным представлением диапазона сигнала и отклика среды, как описано в статье [3], а связаны с согласием наших модельных представлений с наблюденными данными по критерию (6).

Можно проверить любые гипотезы о различных моделях $M(t, \boldsymbol{\alpha})$ на их согласие с наблюденными данными, например типа (4), т. е. критерием согласия наблюденных данных $y(t)$ с нашей гипотезой будет величина критерия — функционала $F(\boldsymbol{\alpha}^*)$, где $\boldsymbol{\alpha}^*$ — точка в пространстве свободных параметров модели $M(t, \boldsymbol{\alpha})$, минимизирующая уравнение (10). В частности, $M(t, \boldsymbol{\alpha})$ может иметь и вид уравнения (4). Если эта величина превосходит выбранный нами априори уровень, то гипотеза отвергается. Если же критерий (10), приведенный ниже, имеет уровень, с нашей точки зрения, достаточно малый, то гипотеза принимается. Если принять гипотезу (5), то передаточную функцию (6) преобразуем к виду:

$$M(t, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{q=1}^{Q} A_q \widetilde{S}(t - \tau_q), \qquad (8)$$

где неизвестными являются не только векторы $\boldsymbol{A} = \{A_q\}$ и $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_q\}$, но и их размерность Q.

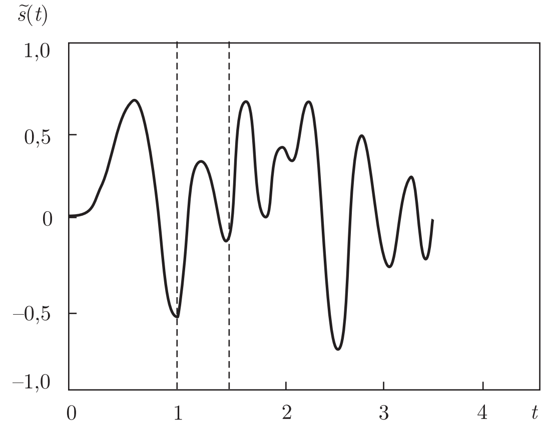

Рис. 1

Процедура поиска глобального минимума (6) сводится к решению системы нелинейных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_q}[F(\boldsymbol{\alpha})] = 0, \qquad q = \overline{1, 2Q}. \tag{9}$$

Реализация априорных знаний о векторе параметров, определяющих модель, в модели (6) заключается в выборе точки в пространстве параметров, в окрестности которой отыскивается локальный минимум функционала (6). Решение задачи поиска глобального минимума (6) мы будем осуществлять по алгоритму [5] в окрестности точки, выбранной методом Монте-Карло [6] по априорному ее распределению. Это значит, что по априорному распределению случайного вектора параметров $\boldsymbol{\alpha}$ методом Монте-Карло симулируется псевдослучайная точка $\boldsymbol{\alpha}$, в окрестности которой отыскивается локальный минимум критерия (6). Итак, эта процедура повторяется N раз, с ростом N вероятность пропуска глобального минимума критерия падает [6]. Используя априорное распределение случайного вектора параметров $\boldsymbol{\alpha}$ значений свободных параметров модели, мы вычисляем псевдослучайное значение вектора параметров, затем методом скорейшего спуска находим ближайший локальный минимум критерия (6). Далее на множестве локальных минимумов отыскиваем глобальный.

Фрагмент смоделированной методом Монте-Карло модели (3) — это отклик среды с передаточной функцией (5), где в качестве свободных параметров модели являются псевдослучайные числа, а результат эксперимента имеет вид:

$$y(t) = \int\limits_{R_\tau} \widetilde{S}(\tau) \sum_{q=1}^{Q} A_q \delta(t - \tau_q)\, d\tau, \tag{10}$$

где $\widetilde{S}(\tau)$ — математическое ожидание свип-сигнала с равномерно распределенными параметрами [3]. Псевдослучайные параметры в формуле (10) следующие:

$$Q = 3; \qquad A_1 = 1,0; \qquad A_2 = 0{,}5; \qquad A_3 = 1,0; \qquad \tau_1 = 0; \qquad \tau_2 = 1,0; \qquad \tau_3 = 1{,}5. \tag{11}$$

Оптимальная оценка модели (6) для примера A_1 совпадает с равенствами (11). Значение критерия (6) (критерий $F(\boldsymbol{\alpha})$) — функция линейно входящих в модель параметров A_1 и τ_1

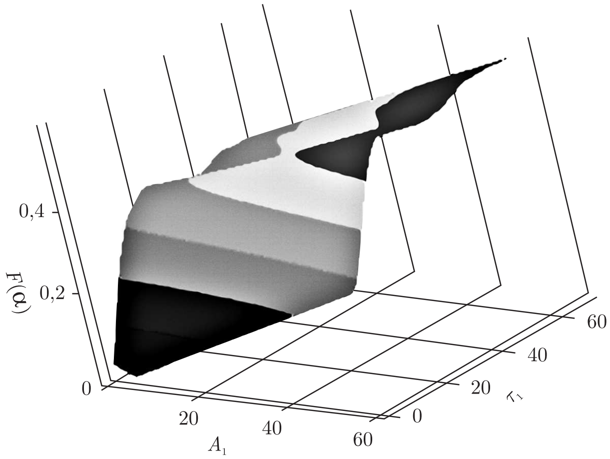

Рис. 2

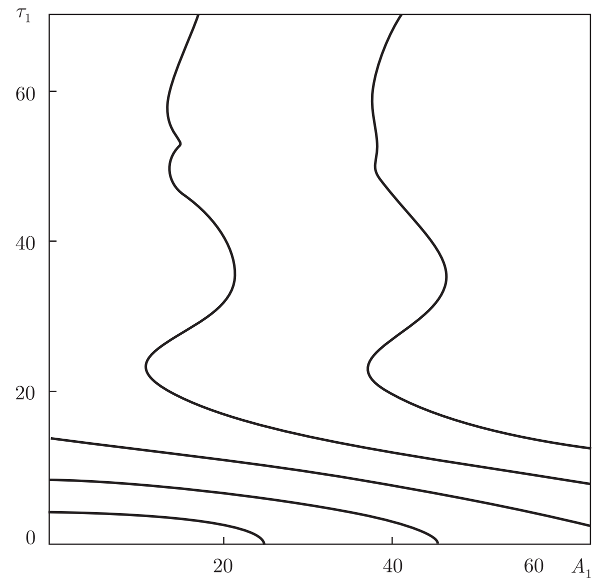

Рис. 3

в окрестности оптимальных параметров модели при фиксированных оптимальных значениях в формуле (6) остальных параметров; на рис. 3 топография поверхности этого критерия (момент вступления τ_1, амплитуда A_1). Оптимальная оценка параметров, т. е. глобальный минимум критерия достигается в точке с координатами 5,0 на рис. 2 и 3. Данная точка соответствует точке 1,0 с учетом масштаба и сдвига по оси A_1 и оси τ_1.

Таким образом, вариационный подход к решению обратной задачи при накоплении сейсмических сигналов в активном мониторинге является достаточно эффективным при условии априорного знания распределения свободных параметров модели передаточной функции системы.

1. *Dahlman O., Israelson H.* Monitoring Underground nuclear explosions. – Amsterdam – Oxford – New York, 1977. – 440 p.
2. *Мостовой С. В., Старостенко В. И.* Интерпретация геофизических данных при нечеткой информации // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1987. – № 5. – С. 31–40.
3. *Мостовой В. С.* Математическая модель накопления сейсмических сигналов при активном мониторинге // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 132–136.
4. *Мостовой В. С.* Оптимальное обнаружение сигналов на фоне микросейсмического шума // Там само. – 2008. – № 1. – С. 106–109.
5. http://mathworld.wolfram.com/Levenberg-MarquardtMethod.html.
6. *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – Москва: Наука, 1975. – 471 с.

Институт геофизики им. С. И. Субботина
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 16.01.2008