

## **ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА УПАКОВКИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕЛКОПАРТИОННЫХ ПОТОКОВ В МНОГОПРОДУКТОВЫХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ КОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЯХ И ЕЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ**

*В.А. Васянин, канд. техн. наук  
(Институт телекоммуникаций и глобального  
информационного пространства НАН Украины)*

*В работе предложена математическая модель обобщенной задачи упаковки и распределения мелкопартионных потоков, в которой учитывается целый ряд важнейших факторов, характерных для обработки и транспортировки (передачи) потоков в реальных многопродуктовых иерархических сетях. Проведена ее декомпозиция к совокупности четырех самостоятельных задач, последовательное решение которых позволяет получить схемы формирования и распределения потоков для обобщенной задачи.*

*У роботі запропонована математична модель узагальненої задачі упакування й розподілу дрібнопартійних потоків, у які враховується цілий ряд найважливіших факторів, характерних для обробки й транспортування (передачі) потоків у реальних багатопродуктових ієрархічних мережах. Проведена її декомпозиція до сукупності чотирьох самостійних задач, послідовне рішення яких дозволяє одержати схеми формування й розподілу потоків для узагальненої задачі.*

*In work the mathematical model of the generalized problem of packing and distribution a small packages of flows in which a lot of the major factors being characteristic for processing and transfer of flows in real multicommodity hierarchical networks is taken into account is offered. Her decomposition to a set of four independent problems, which consecutive decision allows to receive circuits of formation and distribution of flows for the generalized problem is carried out.*

### **ВВЕДЕНИЕ**

Состояние экономики Украины в период мирового финансового кризиса характеризуется падением объемов промышленного и сельскохозяйственного

### **Розділ 3. Науково-технологічна безпека та інтелектуальні ресурси**

производства, высоким уровнем монополизма и государственной собственности в важнейших отраслях, ростом неплатежей, стремительным падением уровня жизни населения, негативной реструктуризацией и свертыванием инвестиций. В этих условиях необходим поиск новых эффективных путей выхода из кризиса. Одним из таких путей является развитие и оптимизация функционирования коммуникационных сетей в различных отраслях хозяйства и структурах организационного управления, применение современного инструментария исследования операций и системного анализа для формирования и исследования математических моделей сложных сетевых объектов, внедрение различных по функциональному назначению и организационно-экономическому уровню информационно-аналитических систем управления, базирующихся на новейших высокоинтеллектуальных информационных технологиях и распределенных вычислительных сетях (семантических Grid – сетях).

Как правило, существующие и проектируемые территориально-распределенные коммуникационные сети (системы) - транспортные, информационно-вычислительные, почтовые, топливно-энергетические и пр. имеют иерархическую структуру. Число уровней иерархии может определяться административным делением территории, структурой органов территориального управления, принятой технологией обработки и распределения потоков грузов и информации и др. В большинстве случаев такие сети состоят из децентрализованной распределенной сети верхнего уровня (магистральной сети) и низовых сетей (зональных и внутренних сетей). Структура сети каждого уровня может обладать своей внутренней иерархией.

В данной работе мы будем рассматривать в основном транспортные многопродуктовые коммуникационные сети, а также базирующиеся на использовании технологии виртуальных контейнеров перспективные крупномасштабные общенациональные и интернациональные сети на основе сверхширокополосных каналов и схем типа опорной сети – backbone (в настоящее время в Украине последних пока нет). Для таких сетей характерно наличие множества источников и стоков мелкопартионных потоков продуктов или требований. Под продуктом или требованием понимается пара различных узлов сети, между которыми имеется направленный (адресный) дискретный поток элементов (например, неделимых грузов унифицированного размера, пакетов сообщений). В многопродуктовой сети все мелкопартионные потоки продуктов подлежат единовременной передаче из источников в стоки в некоторых транспортных блоках (контейнерах) заданного объема. При этом объемы отдельно взятых потоков, выраженные количеством единиц потока из узлов источников в узлы стоки, значительно меньше объема транспортного блока.

Проектирование таких сетей должно отражать характерную для сложных систем невозможность полной централизации в одном звене обработки

информации и принятия решений по управлению процессами их развития и функционирования. Это приводит к необходимости формирования иерархической структуры системы автоматизированного управления ресурсами и распределением потоков в сети. Проектирование иерархических сетевых структур имеет, как правило, нисходящий характер. На верхнем уровне решаются задачи структурного синтеза и перспективного развития сети, для которых используются крупноагрегированные модели распределения потоков. На низших уровнях проектирования детализация объектов должна увеличиваться с целью наиболее адекватного описания их функционирования и принятия рациональных решений. Это обуславливает итерационно-циклический характер процессов проектирования и управления, включающих процедуры синтеза и анализа возможных решений на всех уровнях сети. Поскольку решения принимаются в условиях неопределенности, связанных с неполнотой имеющейся информации, а также с огрублением математических моделей, необходимо разделять решения на перспективные, текущие и оперативные. В этой связи представляется актуальной разработка комплекса взаимосвязанных многоуровневых моделей перспективного развития, текущего планирования и оперативного управления, отображающих иерархию сети и соответствующую ей степень агрегирования показателей.

В теории управления распределением потоков в многопродуктовых сетях наукой накоплен значительный теоретический материал и практический опыт, причем весомый вклад в развитие моделей и методов управления сетевыми ресурсами сделали зарубежные и отечественные ученые, среди которых, в первую очередь, следует выделить таких как Kleinrock L., Gallager R., Ford L.R., Fulkerson D.R., Assad A.A., Kennington J.L., Fratta L., Gerla M., Garcia-Luna-Aceves J.J., Vutukury S., Глушков В.М., Захаров Г.П., Вишневский В.М., Зайченко Ю.П., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. и др.

В большинстве из известных работ, непосредственно посвященных распределению многопродуктовых потоков и связанных с задачами анализа и синтеза многопродуктовых сетей, предлагаются линейные и нелинейные модели и соответствующие методы решения в основном для непрерывных переменных и параметров элементов сети. Кроме того, рассматриваемые модели являются, как правило, довольно грубыми математическими описаниями функционирования сложной сетевой структуры и не учитывают целый ряд физических характеристик и параметров, присущих реальным системам (т.е. являются сильно агрегированными).

Вместе с тем, в случае упаковки мелкопартионных потоков в транспортные блоки и их последующего распределения в многопродуктовой сети, сама постановка общей проблемы и отдельных задач управления сетевыми ресурсами существенно изменяется из-за необходимости учета ряда общих, одновременно действующих факторов. К ним, в первую очередь, следует отнести:

### **Розділ 3. Науково-технологічна безпека та інтелектуальні ресурси**

1) организацию процессов сортировки мелкопартионных потоков в узлах сети, которые непосредственно связаны с их транспортировкой в узлы назначения;

2) ограничения на контрольные сроки доставки исходных потоков (грузов или сообщений);

3) ограничения на провозные возможности (грузоподъемность) магистрального транспорта или пропускную способность каналов связи;

4) ограничения на время погрузки и выгрузки транспортных блоков (контейнеров) в пунктах следования транспортных средств (объемы погрузки - выгрузки в транзитных пунктах следования) или на время перекоммутации транзитных транспортных блоков в узлах сети передачи данных;

5) нелинейность приведенных (эксплуатационных и капитальных) затрат на обработку и транспортировку потоков.

Поэтому актуальной остается проблема разработки методологии проектирования многопродуктовых коммуникационных сетей, обобщающей полученные ранее результаты и позволяющей с использованием моделей различной степени агрегирования и для всех уровней иерархии успешно решать практические задачи перспективного развития, текущего планирования и оперативного управления для сетей большой размерности с дискретными потоками и дискретными параметрами элементов сети.

В первую очередь, необходимо разработать математические модели и алгоритмы, учитывающие вышеприведенные факторы для решения задач текущего планирования, так как они нацелены на оптимизацию использования имеющихся ресурсов сети. Для транспортных предприятий и сетей передачи данных всех форм собственности это означает, что снижение общих затрат за счет оптимизации схем потокораспределения позволяет уменьшать тарифы на перевозку или передачу мелкопартионных потоков, привлекать дополнительную клиентуру и обеспечивать постоянный прирост прибыли. Кроме того, решение этих задач, осуществляемое в реальном масштабе времени при изменении потоковых нагрузок на сеть и возникающих отказах узлов и дуг, позволяет использовать модели текущего планирования для решения задач оперативного управления, а также получать входные данные (загрузку узлов, дуг, выделенных полигонов сети; технико-экономические показатели функционирования сети и др.) для решения задач перспективного развития сети с учетом выделенных инвестиций на модернизацию и строительство ее структурных элементов.

#### **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Перейдем к формальной постановке задачи. Пусть  $G(N,P)$  – иерархическая магистральная многопродуктовая сеть с множеством неориентированных топологических дуг  $P$ ,  $p \in P$ , множеством узлов  $N$ ,  $n \in N$  и  $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ , где  $N_i$ ,

$N_2, N_3$  - множества узлов первого, второго и третьего типов соответственно, “ $\cup$ ” - знак объединения множеств,  $|\cdot|$  - знак мощности множества. Под топологической дугой будем понимать физический отрезок линии связи: железной или автомобильной дороги, кабеля сети передачи данных, телефонного кабеля и т. д., соединяющий два любых узла из множества  $N$  так, что между рассматриваемыми узлами на данном отрезке нет больше ни одного узла из  $N$ . Узлы сети соответствуют пунктам отправления, получения, перегрузки (перекоммутации) грузов или информационных потоков. В работе [1] были предложены структурная схема автоматизированной системы поддержки принятия решений для многопродуктовых коммуникационных сетей с мелкопартионными дискретными потоками с использованием новейших технологий инфраструктуры пространственных данных (SpatialDataInfrastructure - SDI, StorageAreaNetwork - SAN) и геоинформационных систем (geoinformationalsystems – GIS) и принципы организации сортировки и транспортировки (передачи) мелкопартионных потоков в зонально-узловой структуре транспортной сети или сети передачи данных. Согласно этим принципам в сети выделены магистральный, зональный и внутренний уровни и четыре типа узлов (см. рис.).

Зоны обслуживания узла (ЗОУ) любого типа строятся по следующим правилам: 1) от узла проводятся все пути через узлы 2-го и 3-го типов до первых встретившихся узлов первого типа и тупиковых узлов второго и третьего типов; 2) определенные по правилу 1) узлы первого типа и тупиковые узлы соединяются условной границей зоны обслуживания узла. Определенные таким образом

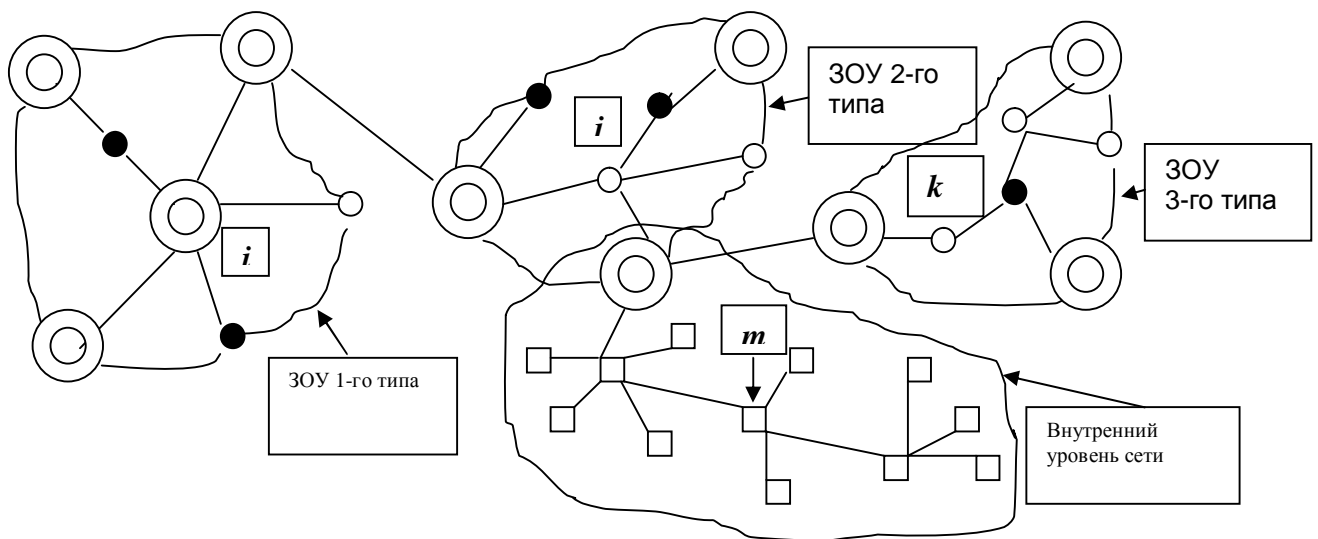


Рис. Где  $i, j, k, m$  - соответственно узлы 1-го, 2-го, 3-го и 4-го типов

### **Розділ 3. Науково-технологічна безпека та інтелектуальні ресурси**

области ЗОУ представляют зональные уровни иерархической сети или зональные сети. Внутренние уровни сети представлены централизованными подсетями с различными структурами (радиальными, древовидными, радиально-узловыми) и содержат только узлы 4-го типа. Узлы 4-го типа явно не входят в рассматриваемую модель, однако всегда подразумевается, что создаваемые ими исходящие потоки и входящие в них потоки обрабатываются в главном узле (1-го, 2-го или 3-го типа) внутренней сети.

В соответствии с принципами зонально-узловой сортировки узлы 2-го и 3-го типов могут отправлять потоки требований, адресованные за свою зону обслуживания только через узлы 1-го типа, лежащие на границе своей зоны. Аналогично в соответствующих узлах 1-го типа обрабатываются и входящие потоки в узлы 2-го и 3-го типов, поступающие от узлов в других зонах обслуживания. В реальных транспортных сетях и сетях передачи данных узлы 1-го типа являются, как правило, крупными предприятиями связи, обладающими мощной материально-технической базой. В узлах этого типа достигается максимальный уровень концентрации потоков. Узлы 2-го и 3-го типов могут отличаться между собой функциональными возможностями, уровнем технической оснащенности, числом обслуживающего персонала и пр. Так, например, в узлах 3-го типа, в отличие от узлов 2-го типа, может быть запрещена обработка транзитных потоков транспортных блоков.

Для решения задач перспективного развития, текущего планирования и оперативного управления на магистральном, зональном и внутреннем уровнях сети необходима информация о межузловых потоках в полной сети, включающей все типы узлов. Для постоянно развивающейся сети неизбежно периодическое изменение ее структуры с переводом узлов с одного типа на другой. Перестройка структуры сети вызывает определенные трудности в организации системы сбора данных в крупных узлах, так как сбор данных должен осуществляться с учетом принципов зонально - узловой сортировки. В этом случае возникает также задача перестройки информационной базы данных сети. Поэтому узлы всех типов должны являться независимыми источниками информации. Тогда перестройка структуры сети не вызовет никаких изменений в организации и обработке данных на уровне узлов, а все функции, связанные с переработкой данных в соответствии с иерархической структурой выбранной магистральной сети, могут быть выполнены процедурами редукции централизованно автоматизированным способом. Таким образом принимаем, что потоки узлов 4-го типа учтены в межузловых потоках магистральной сети.

В задачах текущего планирования предполагается, что структура сети задана, однако в дальнейших работах авторов будет показано, что ее оптимизация (выбор состава узлов 1-го, 2-го и 3-го типов) может быть выполнена с использованием моделей и алгоритмов текущего планирования, если на данный

момент времени нет жесткой необходимости в дополнительных инвестициях на модернизацию и развитие сети.

Важным вопросом в задачах текущего планирования является выбор дискретности времени планирования. Если перспективные планы разрабатываются на пятилетия и более долгосрочные периоды, то для задач текущего планирования характерно построение схем формирования и распределения потоков для нескольких периодов на протяжении года в зависимости от колебаний потоков. При этом, в качестве мгновенных потоков, распределяемых по сети в заданную единицу времени, можно использовать среднесуточные планируемые потоки, рассчитанные для конкретных периодов. Использование среднесуточных потоков в задачах текущего планирования на транспортных сетях связано с двумя важными факторами, сопутствующими обработке и перевозке мелкопартионных грузов: ритмичностью производственных процессов и стремлением связать текущее планирование с задачами оперативного управления, где в качестве дискретности времени принимаются одни сутки. Первый фактор наиболее сильно проявляется при сортировке потоков и связан с контрольными сроками обработки мелкопартионных грузов в узловых предприятиях, а также с расписанием движения магистрального транспорта. В этом смысле ежедневное курсирование транспортных средств через узловые предприятия на всех маршрутах является наиболее приемлемым, так как позволяет установить четкую ритмичность отправления потоков транспортных блоков (контейнеров), сформированных за сутки. Периодичность курсирования транспортных средств по маршрутам должна согласовываться с периодичностью отправления грузов адресату. Второй фактор обусловлен тем, что в реальных условиях управления граница между текущими и оперативными решениями стирается. Например, задача распределения порожних контейнеров должна решаться как на уровне текущего планирования, так и при оперативном управлении.

Для определенности в моделях текущего планирования в качестве дискретности времени отправления потоков будем принимать одни сутки для транспортных сетей и одну секунду для сетей передачи данных. При этом, в качестве мгновенных потоков, распределяемых по сети, будем использовать средние планируемые потоки, рассчитанные для конкретных периодов.

Итак, на сети задана целочисленная матрица потоков  $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$ , в которой учтены потоки  $om$  и  $в$  узлы 4-го типа в полной сети. Потоки  $a_{ij}$  представляют внутренние потоки между узлами 4-го типа в зоне обслуживания  $i$ -го узла. Они не подлежат распределению по магистральной сети, но должны учитываться при расчете затрат на сортировку мелкопартионных потоков в узлах 1, 2 и 3-го типов. Предполагается, что число узлов 4-го типа во внутренней зоне каждого  $i$ -го узла 1, 2 и 3-го типа, а значит и число внутренних направлений сортировки  $q_{вн}^i$  из этих узлов на внутренние узлы 4-го типа известны и относительно постоянны.

### Розділ 3. Науково-технологічна безпека та інтелектуальні ресурси

Если на транспортной сети распределяется некоторое подмножество видов или категорий продуктов, отличающихся габаритом, весом, ценностью, срочностью доставки конечному адресату и другими характеристиками, то для каждой категории продуктов задается отдельная матрица потоков и для нее решается конкретная задача с новыми ограничениями. Для сетей передачи данных может быть задано несколько потоковых матриц с различными классами (ClassofService) и категориями качества (QualityofService) обслуживания потоков, которые будут распределяться по общим широкополосным каналам связи с учетом приоритетов потоков и скоростных режимов передачи данных.

Потоки  $a_{ij}$  из источников  $i$  в стоки  $j$ ,  $i, j=1, n$  должны одновременно передаваться в некоторых транспортных блоках (контейнерах) объема  $\omega \gg a_{ij}$  заданной периодичностью. При этом предполагается, что каждый поток может быть упакован в транспортный блок только целиком. Пусть далее:

- $S$  - множество пар индексов потоков  $(i, j)$ , определенное на декартовом произведении  $n \times n$ ;

- $x_{ij}, u_{ij}$  – переменные, определяющие соответственно величину потока (количество единиц потока) из  $i$  в  $j$  в исходных единицах и транспортных блоках. Первоначально все  $x_{ij} = a_{ij}$ , а  $u_{ij} = \lceil x_{ij} / \omega \rceil$ ,  $ij \in S$ , где знаки  $\lceil \cdot \rceil$  - означают округление числа до большего целого. Будем считать, что для транспортных сетей к потокам  $u_{ij}$  добавлены потоки  $u_{ij}^{nop}$  порожних транспортных блоков (контейнеров) из  $i$  в  $j$ , полученные после решения задачи балансировки межузловых потоков в транспортных блоках;

- $y_{kl}, i=1, n, kl \in S$  – переменные, определяющие количество единиц исходных потоков  $a_{kl}$ , проходящих дополнительную сортировку в узле  $i$ . Напомним, что транзитная сортировка исходных потоков разрешена только в узлах 1-го типа. Так как по условию задачи дробление исходных потоков запрещено, т. е. они запаковываются в транспортный блок только целиком, то

$a_{kl}$ , если в узле  $i$ ,  $i \neq k \neq l$  дополнительная сортировка исходного

$y_{kl} = \begin{cases} \text{потока } a_{kl} \text{ производится,} \\ \end{cases}$

0, в противном случае;

- $t_{ij}, T_{ij}, ij \in S$  – расчетное и заданное время на доставку исходных потоков  $a_{ij}$  из  $i$  в  $j$ ;

- $t_{cp}, T_{\max}$  – расчетная средняя и заданная максимальная задержка в передаче потоков в сети;

- $h_i, i=1, n$  - максимальная пропускная способность  $i$ -го узла в исходных единицах потока. Пропускная способность задается для транзитных потоков, так как исходящие и входящие потоки для каждого узла должны быть обработаны безусловно;



- $v_{ij}, ij \in S, v_{\max}$  – число слияний потока  $a_{ij}$  с другими потоками и максимально допустимое число слияний;

- $\{ m_k \}, k=1, l$  – множество маршрутов транспортных средств (ТС) или каналов связи (КС), каждый из которых в терминах теории графов представляет из себя простой путь и состоит из последовательности узлов и топологических дуг сети  $G$ , соединяющих начальный и конечный узлы маршрута или канала связи. В конкретной задаче оптимизации множество маршрутов может быть не заданным, а искомым. Для сетей передачи данных (СПД) маршруты могут быть представлены простыми каналами связи, соединяющими смежные узлы, или коммутируемыми каналами связи, соединяющими любую последовательность узлов (выделенными каналами). В частном случае, все заданные маршруты могут совпадать с топологическими дугами сети. Множество  $\{ m_k \}$  может содержать несколько маршрутов, соединяющих любую пару узлов. С каждым маршрутом ТС связаны его характеристики: тип и стоимость единицы пробега груженого и порожнего транспортного средства, курсирующего по маршруту; периодичность курсирования; грузоподъемность; узел приписки; место прибытия и отправления для крупных узлов; время прибытия и отправления транспортного средства для каждого узла в маршруте. Для каждого маршрута СПД заданы длина, стоимость и пропускная способность;

- $G_M ( N, P_M)$  – маршрутная мультисеть, где  $N$  – множество узлов сети,  $P_M$  – множество ее ориентированных маршрутных дуг. Между любыми узлами  $i$  и  $j$  сети  $G_M$  существует маршрутная дуга, если они связаны хотя бы одним маршрутом транспортного средства или каналом связи из  $\{ m_k \}$ ;

- $b_i, i=1, n$  – максимальная пропускная способность  $i$ -го узла в транспортных блоках. Пропускная способность задается для транзитных потоков, так как исходящие и входящие потоки для каждого узла должны быть обработаны безусловно;

- $U_{ij}^{\alpha\beta}, k$  – поток транспортных блоков из  $i$  в  $j$ , проходящий по дуге  $p_{\alpha\beta} \in P_M$ , полученной из маршрута  $m_k$  ( $U_{ij}^{\alpha\beta}, k$  определяют дуговые потоки в транспортных блоках на маршрутной сети  $G_M$ ). Поток  $U_{ij}^{\alpha\beta}, k$  может отличаться от полного потока  $U_{ij}$ , так как дробление потоков транспортных блоков в обобщенной задаче не запрещено;

- $U_{ij}^{\eta\xi}, k$  – поток транспортных блоков из  $i$  в  $j$ , проходящий по топологической дуге  $p_{\eta\xi} \in P$  на маршруте  $m_k$ . Соответственно потокам  $U_{ij}^{\alpha\beta}, k$  потоки  $U_{ij}^{\eta\xi}, k$  также могут отличаться от полных потоков  $U_{ij}$ ;

- $q_k$  – упорядоченное множество дуг из  $P$ , составляющих маршрут  $m_k$ ;

- $v_k$  – упорядоченное множество узлов из  $N$  на маршруте  $m_k$ ;

- $\Phi : u_{ij}^{\alpha\beta}, k \rightarrow \{ u_{ij}^{\eta\xi}, k \}, p_{\alpha\beta} \in P_M, p_{\eta\xi} \in P, ij \in S, k=1, l$ , где  $\Phi$  – некоторый оператор, отображающий поток по маршрутной дуге на соответствующее подмножество топологических дуг;

### Розділ 3. Науково-технологічна безпека та інтелектуальні ресурси

•  $C_{\text{тр}}^k$  – нелинейная и, в общем случае, не сепарабельная функция, определяющая зависимость транспортных затрат от количества транспортных блоков, передаваемых по маршруту  $m_k$  и длины маршрута  $d_k$ ;

•  $C_{\text{сорт}}^i$  – нелинейная функция затрат на сортировку исходных потоков в узле  $i$ ;

•  $C_{\text{груз}}^\beta$  – нелинейная функция затрат на обработку транспортных блоков в узле  $\beta$ ;

•  $W^k$  – грузоподъемность транспортного средства на маршруте  $m_k$  или пропускная способность канала  $m_k$ ;

•  $t^0$  – время на погрузку-выгрузку или перекоммутацию одного транзитного транспортного блока в узле сети;

•  $t_\alpha^k$  – ограничения на время стоянки транспортного средства или занятость канала на маршруте  $m_k$  в узле  $\alpha$ .

•  $b_\alpha^k$  – максимальное суммарное количество транспортных блоков, которое можно погрузить и выгрузить или перекоммутировать в узле  $\alpha$  на маршруте  $m_k$ .

Требуется минимизировать функционал:

$$\sum_{k=1}^l C_{\text{тр}}^k((\sum_{\eta^\xi \in q_k} \sum_{i \in S} u_{ij}^{\eta^\xi}, d_k)) + \sum_{i=1}^n C_{\text{сорт}}^i(a_i, q_i) + \sum_{\beta=1}^n C_{\text{груз}}^\beta(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^l \sum_{i \in S} (u_{ij}^{\alpha\beta}, k + u_{ij}^{\beta\alpha}, k)), \quad (1)$$

где

$$a_i = a_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} + a_{ji}) + y_i, \quad y_i = \sum_{kl \in S} y_{kl}, \quad i=1, n,$$

$$q_i = q_{\text{вн}}^i + \sum_{j=1}^n \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } u_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{если } u_{ij} = 0, i=1, n, \end{cases}$$

при ограничениях:

$$y_i \leq h_i, \quad i=1, n, \quad (2)$$

$$\sum_{\beta=1}^n \sum_{k=1}^l u_{ij}^{\alpha\beta}, k - \sum_{\beta=1}^n \sum_{k=1}^l u_{ij}^{\beta\alpha}, k = \begin{cases} u_{ij}, & \text{при } i=\alpha, \\ 0, & \text{при } i \neq \alpha, j \neq \alpha, \\ u_{ij}, & \text{при } j=\alpha, \text{ для } \alpha=1, n, ij \in S; \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^l \sum_{i \in S} (u_{ij}^{\alpha\beta}, k + u_{ij}^{\beta\alpha}, k) - (\sum_{\beta=1}^n u_{\beta j} + \sum_{j=1}^n u_{j\beta}) \leq 2b_\beta, \beta=1, n; \quad (4)$$

$$\sum_{ij \in S} u_{ij}^{\eta^\xi}, k \leq W^k, \text{ для всех } \eta^\xi \in q_k, k=1, l; \quad (5)$$

$$\sum_{\beta=1}^n \sum_{ij \in S} (u_{ij}^{\alpha\beta} + u_{ij}^{\beta\alpha}) t^k \leq t_{\alpha}^k, \alpha \in v_k, k=1, l, \text{ или} \quad (6)$$

$$\sum_{\beta=1}^n \sum_{ij \in S} (u_{ij}^{\alpha\beta} + u_{ij}^{\beta\alpha}) \leq b_{\alpha}^k, \alpha \in v_k, k=1, l;$$

$$t_{cp} = 1 / u_{\Sigma} \sum_{k=1}^l \sum_{\eta\xi \in q_k} f_{\eta\xi}^k / (W^k - f_{\eta\xi}^k) \leq T_{\text{макс}}, \text{ где } u_{\Sigma} = \sum_{ij \in S} u_{ij}, f_{\eta\xi}^k = \sum_{ij \in S} u_{ij}^{\eta\xi}, \quad (7)$$

$$t_{ij} \leq T_{ij}, ij \in S; \quad (8)$$

$$v_{ij} \leq v_{\text{макс}}, ij \in S. \quad (9)$$

$$x_{ij}, u_{ij}, u_{ij}^{\alpha\beta}, u_{ij}^{\eta\xi}, k - \text{целые неотрицательные числа.} \quad (10)$$

Первая составляющая функционала определяет транспортные затраты, вторая – затраты на сортировку, а третья - затраты на обработку транспортных блоков (контейнеров). Условия (2), (4) представляют собой ограничения на пропускные способности узлов, (5) - пропускные способности маршрутов, (6) – время (объемы) погрузки-выгрузки транзитных контейнеров в узлах следования транспортного средства или время перекоммутации (число перекоммутируемых) транспортных блоков с одного канала связи на другой в узлах сети передачи данных, (7) - среднюю задержку в передаче транспортных блоков, (8) - время доставки исходных потоков адресату, (9) - число слияний исходных потоков с другими потоками. Условия (3) обеспечивают неразрывность потока.

Отметим несколько особенностей сформулированной задачи. В условиях (6) для транспортных сетей величины  $t_{\alpha}^k$  могут быть получены из расписания движения магистрального транспорта. Однако, при практическом определении  $t_{\alpha}^k$  необходимо учитывать и другие факторы, такие, например, как наличие условий для обмена грузами в данном узле (наличие подходящих платформ, подъездных путей, погрузочно-разгрузочного оборудования, тупиков и др.). Поскольку ограничения (6) зависят не только от расписания движения, при решении конкретной задачи можно использовать их вторую форму записи. Из постановки задачи видно, что любой поток транспортных блоков может быть подвергнут дроблению. Под дроблением понимается разбиение потока на несколько частей, транспортировка каждой из которых может выполняться на разных маршрутах и поразличным путям. В свою очередь, любая часть потока также может быть подвергнута дроблению. Процесс дробления может продолжаться до тех пор, пока части потоков не будут представлены неделимыми элементами, т. е. одним

### Розділ 3. Науково-технологічна безпека та інтелектуальні ресурси

транспортним блоком. Очевидно, что дробление потока значительно усложняет решение задачи и увеличивает объемы информации, хранимой в процессе решения. Кроме того, в условиях колебания потоков, сложные схемы перевозок могут создать серьезные затруднения диспетчерам при практическом управлении перевозками и привести к ухудшению качества транспортных сообщений. Поэтому в случае транспортных сетей учет возможности дробления потока целесообразен на уровне оперативного управления магистральными перевозками при решении задач локальной оптимизации, имеющих значительно меньшую размерность. Условия запрета дробления потока при решении (1) - (10) могут быть записаны в виде :

$$\begin{aligned} &U_{ij}, \text{ если поток транспортируется по дуге } \alpha\beta, \text{ полученной из} \\ &U_{ij}^{\alpha\beta}, k \in \text{ маршрута } m_k; \\ &0, \text{ противном случае.} \end{aligned} \tag{11}$$

Напротив, для сетей передачи данных дробление потоков необходимо разрешать для получения наилучшего решения задачи. В этом случае усложнение схемы маршрутизации потоков не приводит к ухудшению качества функционирования сети, так как управление потоками полностью автоматизировано.

Сформулированная обобщенная задача (1)-(10) относится к классу дискретных многопродуктовых задач с нелинейным и невыпуклым функционалом, содержит огромное число переменных и несколько отдельных подзадач, решение которых необходимо на каждом шаге преобразования и распределения потоков. Для анализа приведенной модели рассмотрим сущность преобразования мелкопартионных потоков в процессе оптимизации их упаковок в транспортные блоки. Преобразование любого исходного потока  $X_{ij}$  заключается в выполнении следующих действий :

$$\begin{aligned} &X'_{ik} \leftarrow X_{ik} + X_{ij}, \\ &X'_{kj} \leftarrow X_{kj} + X_{ij}, \\ &Y^k_{ij} \leftarrow X_{ij}, X_{ij} \leftarrow 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Где " $\leftarrow$ " знак операции присваивания;  $k$  - узел, через который выполняется преобразование,  $k \in K$ ,  $K$  - множество узлов-претендентов, через которые может быть выполнено преобразование потока  $X_{ij}$  без нарушения всех заданных ограничений. При этом поток  $X_{ij}$  сливается с потоками  $X_{ik}$  и  $X_{kj}$ , а в узле  $k$  появляется транзитный поток. Соответственно изменяются и переменные  $U_{ij}, U_{ik}$  и  $U_{kj}$ . На последующих итерациях алгоритма для потоков  $X'_{ik}$  и  $X'_{kj}$  вновь может быть выполнено преобразование (12). Независимо от того, как будет осуществляться преобразование потоков на каждом шаге алгоритма упаковки - выбираться только

один поток или некоторое подмножество потоков, ясно, что на каждой итерации алгоритма решения обобщенной задачи, необходимо решать задачу балансировки матрицы межузловых потоков в транспортных блоках (ММП)  $U = \| \| u_{ij} \| \|_{n \times n}$  (такая задача возникает для транспортных сетей из-за образования в отдельных узлах сети избытка и недостатка порожних транспортных блоков - контейнеров) и задачу маршрутизации потоков. Поскольку из-за размерности и сложности сформулированной обобщенной задачи решать эти дополнительные задачи на каждой итерации просто невыполнимо, возникает вопрос – можно ли отказаться от их решения на каждой итерации алгоритма оптимизации упаковок и решить их после завершения решения задачи оптимизации упаковок? Интуитивно ясно, что если в процессе работы алгоритма оптимизации упаковок на каждой его итерации будет происходить уменьшение числа транспортных блоков, то в сети будут возрастать только затраты на сортировку исходных потоков, транспортные затраты и затраты на обработку транспортных блоков будут уменьшаться. В работе [2] было показано, что в качестве критерия выбора исходных потоков для преобразования (12) следует использовать неувеличение транспортных блоков после операции преобразования. Там же, а также в работе [3] был предложен ряд алгоритмов решения задачи оптимизации упаковок, основанных на общей схеме метода последовательного анализа вариантов и эвристических соображениях, существенно опирающихся на специфику комбинаторной структуры задачи. С помощью этих алгоритмов можно максимально сократить число транспортных блоков, необходимых для транспортировки или передачи всех исходных потоков в сети. Это дает возможность разделить обобщенную задачу и решать задачи маршрутизации потоков транспортных блоков после решения задачи оптимизации упаковок.

Следуя вышеизложенным соображениям, разделим обобщенную задачу на следующие.

**Задача 1.** Формирование потоков транспортных блоков для узлов 2-го и 3-го типов в зональных сетях. Преобразование потоковой матрицы  $A$  должно учитывать принципы направления потоков для узлов второго и третьего типов, согласно которым исходящий поток из этих узлов направляется (рассортировывается) в узлы первого типа, лежащие на границе зон их обслуживания. Пусть  $Y = \| \| y_{\xi} \| \|$ ,  $\xi = 1, n$  - вектор, в котором суммируются дополнительные объемы обработки от преобразованных потоков узлов второго и третьего типов (первоначально  $Y$  обнулен);  $Z_i$  зона обслуживания, построенная на сети  $G$  для  $i$ -го узла;  $l, k$  - узлы первого типа в ЗО  $j$ -го и  $i$ -го узлов, обслуживающие соответственно  $j \in N_2 \cup N_3$ ,  $i \in N_2 \cup N_3$ ; " $\leftarrow$ " знак операции присваивания;  $\forall, \exists$  - кванторы всеобщности и существования;  $\&, !$  - знаки логического умножения и сложения. Тогда содержательная постановка задачи формирования (распределения) потоков для узлов 2-го и 3-го типов в зональных

### Розділ 3. Науково-технологічна безпека та інтелектуальні ресурси

сетях заключается в преобразовании матрицы  $A$ , которое выполняется следующим образом:

1)  $\forall ij \in S, i, j \in N_1$  соответствующие потоки  $a_{ij}$  не изменяются;

2)  $\forall ij \in S, i \in N_1, j \in N_2 \cup N_3, l \neq i$  выполнить:

$$a_{il} \leftarrow a_{il} + a_{ij},$$

$$a_{lj} \leftarrow a_{lj} + a_{ij},$$

$$y_l \leftarrow y_l + a_{ij},$$

$$a_{ij} = 0;$$

3)  $\forall ij \in S, i \in N_2 \cup N_3, j \in N_1, k \neq j$  выполнить:

$$a_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij},$$

$$a_{kj} \leftarrow a_{kj} + a_{ij},$$

$$y_k \leftarrow y_k + a_{ij},$$

$$a_{ij} = 0;$$

4)  $\forall ij \in S, i, j \in N_2 \cup N_3, k \neq l$  выполнить:

$$a_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij},$$

$$a_{kl} \leftarrow a_{kl} + a_{ij},$$

$$a_{lj} \leftarrow a_{lj} + a_{ij},$$

$$y_k \leftarrow y_k + a_{ij},$$

$$y_l \leftarrow y_l + a_{ij},$$

$$a_{ij} = 0;$$

5)  $\forall ij \in S, i, j \in N_2 \cup N_3, k = l, j \notin Z_i$  выполнить 3);

6)  $\forall ij \in S, i, j \in N_2 \cup N_3, k = l, j \in Z_i$  преобразование  $a_{ij}$  не выполняется.

Как видно из постановки задачи для всех требований, потоки которых подвергаются операции преобразования, необходимо указать узлы  $k$  и  $l$ . Эти узлы определяются при решении задачи структурно - топологической оптимизации, которая относится к задачам перспективного развития.

Уровень агрегирования задач перспективного развития не позволяет получить оптимальную схему адресации потоков из узлов второго и третьего типов для периодов текущего планирования вследствие значительного колебания потоков. Поэтому для зональных сетей целесообразно иметь отдельную модель для решения задачи распределения потоков на уровне текущего планирования.

В последующих работах авторов будет показано, что такая задача может быть сведена к задаче линейного программирования без учета ограничений на пропускные способности дуг и для ее решения могут быть использованы методы декомпозиции Данцига - Вулфа [4] и релаксации ограничений Розена [5,6]. Для реальных сетевых структур, всегда функционирующих в условиях неопределенности, воздействия случайных факторов, динамически изменяющихся с течением времени ресурсов, а также при недостаточно точной исходной информации, для практического решения рассматриваемой задачи

будут предложены алгоритмы, основанные на методах построения кратчайших путей.

**Задача 2.** Формирование потоков транспортных блоков в магистральной сети (или задача упаковки транспортных блоков). На вход задачи, после решения Задачи 1, поступают преобразованная матрица потоков  $A$  и вектор  $Y = \{y_i\}, i = 1, n$ , в котором суммируются дополнительные объемы обработки исходных потоков от преобразованных потоков узлов второго и третьего типов. Формальная постановка задачи заключается в следующем. Требуется минимизировать функционал:

$$\sum_{ij \in S} C_{\text{тр}}^j(u_{ij}, d_{ij}) + \sum_{i=1}^n C_{\text{сорт}}^i(a_i, q_i) + \sum_{i=1}^n C_{\text{груз}}^i(u_i), \quad (13)$$

при ограничениях (2,8,9). Где:  $C_{\text{тр}}^j(u_{ij}, d_{ij})$  – в общем случае нелинейная и невыпуклая функция транспортных затрат, зависящая от объемов транспортируемых (передаваемых) потоков  $u_{ij}$  и расстояний  $d_{ij}$  между  $i$  и  $j$  для всех  $ij \in S$ ;  $a_i$  и  $q_i$  определяются также, как и в обобщенной задаче; а

$$u_i = \sum_{j=1}^n (u_{ij} + u_{ji}), i = 1, n.$$

Отметим, что при решении задачи, к правым частям ограничений (2) необходимо добавить значения вектора  $Y$ , так как распределение потоков из узлов 2-го и 3-го типа осуществляется по принципам зонально-узловой сортировки и эти потоки должны быть обработаны безусловно.

Как уже упоминалось, в работах [2,3] были предложены различные алгоритмы решения задачи (13),(2,8,9), а также проведено экспериментальное сравнение их вычислительной эффективности. Кроме того, в работе [7] рассмотрена и исследована дискретная задача выбора пропускных способностей дуг при оптимизации упаковок мелкопартионных потоков в многопродуктовой сети, в которой по сравнению с задачей (13),(2,8,9) учитываются ограничения вида (5) и (7). Следует отметить, что при решении Задачи 2 рассчитываются и сравниваются только нижние оценки транспортных затрат и затрат на обработку транспортных блоков. Реальные оценки этих затрат могут быть получены только после решения задачи маршрутизации потоков (распределения сформированных потоков транспортных блоков на транспортной сети или сети передачи данных). Как видно из постановки задачи, в затратах на обработку транспортных блоков в узлах сети учитываются только исходящие и входящие потоки, - транзитные потоки не учитываются. Для транспортных сетей не учитываются затраты на перевозку и обработку порожних контейнеров. Затраты на сортировку исходных потоков в узлах сети отражают реальные затраты, при условии, что при решении задачи используются адекватные процессам сортировки функции затрат.

### Розділ 3. Науково-технологічна безпека та інтелектуальні ресурси

**Задача 3.** Балансировка матрицы межузловых потоков в транспортных блоках(или задача развозки порожних контейнеров). Такая задача возникает для транспортных сетей в случае, если мелкопартионные грузы перевозятся в многооборотной таре – жестких контейнерах. Если в качестве контейнера используется одноразовая пленочная упаковка (достаточно прочная для возможности работы с автопогрузчиками), то необходимость решения задачи отпадает. На вход задачи поступает матрица межузловых потоков  $U = \| u_{ij} \|_{n \times n}$ , полученная после решения задачи формирования потоков транспортных блоков в магистральной сети. Матрица  $U$  не сбалансирована, поскольку для большинства узлов не выполняется условие

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} - \sum_{j=1}^n u_{ji} = 0, \quad i = 1, n. \quad (14)$$

Разделим все множество узлов, для которых не выполняется условие (14), на два подмножества  $A$  и  $B$  так, чтобы выполнялось  $\Delta_i < 0, i \in A, \Delta_i > 0, i \in B$  и  $A \cup B \subseteq N$ . Тогда в терминах транспортной задачи множество  $B$  является множеством потребителей порожних контейнеров, а  $A$  - множеством их поставщиков. образуем вектор потребителей  $b_j, j = 1, k$  с объемами потребления  $b_j = \Delta_{\xi_j}$ , для  $\forall \xi_j \in B$  и вектор поставщиков  $a_i, i = 1, l$  с объемами предложения  $a_i = \Delta_{\xi_i}$ , для  $\forall \xi_i \in A$ . Где  $k$  и  $l$  получены счетным перечислением множеств  $B$  и  $A$  соответственно. Векторам  $a_i$  и  $b_j$  поставим во взаимно-однозначное соответствие векторы номеров узлов  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  из  $A$  и  $B$ . Сформулируем транспортную задачу. Требуется минимизировать

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k C_{\text{тр}}^{ij}(x_{ij}, d_{ij}) \quad (15)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^k x_{ij} = a_i, \quad i = 1, l, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^l x_{ij} = b_j, \quad j = 1, k, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^l a_i = \sum_{j=1}^k b_j, \quad (18)$$

где  $x_{ij} \geq 0$  - число порожних контейнеров, отправляемых  $i$ -ым поставщиком  $j$ -ому потребителю;  $d_{ij}$  - расстояние перевозки от  $i$  до  $j$ ;  $C_{\text{тр}}^{ij}(\cdot)$ - нелинейная функция, зависящая в общем случае от перевозимого объема, расстояния, типа транспортного средства, выделенного для перевозки  $ij$ , маршрута перевозки,



скорости движения и других факторов. Учет всех перечисленных факторов при решении задачи (15) - (18) не представляется возможным, поскольку перевозка порожних контейнеров должна выполняться вместе с грузеными. Поэтому предположим, что любая перевозка  $ij \in S$ , включающая перевозку порожних контейнеров с объемом  $X_{ij}$ , выполняется при полностью загруженном транспортном средстве. Такое предположение позволяет не учитывать на этапе решения задачи развозки порожних контейнеров нелинейность функции  $C_{тр}^j(\cdot)$  от перевозимого объема и интерпретировать задачу (15) - (18) как задачу минимизации перевозок порожних контейнеров, подставив вместо  $C_{тр}^j(\cdot)$  длины  $d_{ij}^*$  кратчайших путей из  $i$  в  $j$ .

2.1 Итак, задача преобразуется к линейному виду : минимизировать

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k d_{ij}^* x_{ij} \quad (19)$$

при ограничениях (16)-(18). После решения задачи (19), (16)-(18) балансировка осуществляется следующим образом :

$$\begin{aligned} u'_{ij} &= u_{ij}, \quad i, j = 1, n; \\ u'_{\alpha i \beta j} &= u_{\alpha i \beta j} + x_{ij}, \quad i=1, l, j = 1, k, \quad x_{ij} \neq 0. \end{aligned}$$

Известно множество работ, связанных спостановкой и решением транспортных задач. Среди них следует выделить работы [8,9], посвященные классификации и детальному рассмотрению существующих методов и алгоритмов решения транспортной задачи. В работах [10-13] предложены эффективные методы и алгоритмы для решения классической транспортной задачи. Большинство из указанных алгоритмов прошло экспериментальную апробацию на всесоюзном конкурсе «Транспорт – 81» [14]. Как показали экспериментальные исследования, наилучшей оказалась программа, реализующая вариант метода потенциалов, предложенного в [12].

**Задача 4.** Маршрутизация потоков транспортных блоков. На вход задачи поступает несбалансированная или сбалансированная матрица межузловых потоков  $U = \| u_{ij} \|_{n \times n}$ . Формальная запись задачи имеет следующий вид: требуется минимизировать функционал

$$\sum_{k=1}^l C_{тр}^k \left( \sum_{\eta \xi \in Q_k} \sum_{i \in S} u_{ij}^{\eta \xi}, d_k \right) + \sum_{\beta=1}^l C_{груз}^{\beta} \left( \sum_{\alpha=1}^l \sum_{k=1}^l \sum_{i \in S} (u_{ij}^{\alpha \beta}, k + u_{ij}^{\beta \alpha}, k) \right), \quad (20)$$

при ограничениях (3-8), (10).

Сформулированная задача относится к классу дискретных многопродуктовых задач с нелинейным и невыпуклым функционалом. Задачи такого типа являются **NP**- полными и для их решения неизвестны точные

### **Розділ 3. Науково-технологічна безпека та інтелектуальні ресурси**

полиномиально ограниченные по трудоемкости алгоритмы. В связи с этим, были предложены метод сведения исходной задачи (20), (3-8), (10) к совокупности линейных многомерных задач о ранце с окаймляющими ограничениями и группа алгоритмов, основанных на эвристических подходах к решению многомерной задачи о ранце и эффективной технике представления структур данных задачи. Методы и алгоритмы решения задачи будут подробно изложены авторами в последующих работах.

В заключение отметим, что для решения Задач 1-4 разработан пакет программ оптимизации распределения дискретных потоков в многопродуктовых сетях большой размерности, который зарегистрирован в Государственном департаменте интеллектуальной собственности Украины при Министерстве образования и науки Украины ( Свидетельство про регистрацию авторского права за № 5978 © Vasyanin V. A. 2001)[15 ]. Рабочий макет пакета программ вместе с руководством пользователя доступны для бесплатного скачивания на сайте <http://vovvas.narod.ru>.

#### **Выводы**

1. Предложена математическая модель обобщенной задачи упаковки и распределения мелкопартионных потоков в многопродуктовых иерархических коммуникационных сетях, в которой учитываются важнейшие параметры управления сетевыми ресурсами на уровне текущего планирования, характерные для обработки и транспортировки (передачи) потоков в реальных сетях.

2. Ввиду экспоненциальной сложности решения и на основании анализа обобщенной задачи проведена ее декомпозиция к совокупности четырех самостоятельных задач, последовательное решение которых позволяет получить схемы формирования и распределения мелкопартионных потоков для исходной задачи.

3. Для практического апробирования решения задач упаковки и распределения мелкопартионных потоков на сетях различной размерности, генерируемых датчиком случайных чисел, приведены ссылки на “закачку” из Интернета рабочего макета программ.

\* \* \*

1. Васянин В.А., Трофимчук А.Н. Автоматизация процессов принятия решений в многопродуктовых коммуникационных сетях с мелкопартионными дискретными потоками // Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць, Київ, 2010, вип. 5, С. 172-213.

2. Васянин В. А. Об одной задаче дискретной оптимизации в процессах управления перевозками на мультипоточковых транспортных сетях // Кибернетика и вычислит. техника.- 1983.- Вып. 60.- С. 82-87.

3. Васянин В. А. Сравнительная эффективность алгоритмов оптимизации упаковок в мультипоточковых сетях // Дискретные системы управления: Сб. науч. тр.- Киев : Ин-т кибернетики им В.М. Глушкова АН УССР, 1988.- С. 36-45.
4. Dantzig G. B., Wolfe Ph. Decomposition Algorithm for linear programming // Econometrica.- 1961.- v. 29, № 4.- P. 767-778.
5. Rosen J. B. Convex partition programming // In Recent advances in mathematical programming.- New York, 1963.- P. 159-176.
6. Rosen J. B. Primal partition programming for block-diagonal matrices // Numerische Mathematik.- 1964.- v. 6, №. 3.- P. 250-264.
7. Васянин В.А., Трофимчук А.Н. Выбор пропускных способностей дуг при оптимизации упаковок мелкопартионных потоков в многопродуктовых коммуникационных сетях // Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць, Київ, 2012, вип. 9, С.181-200.
8. Габасов Р., Кириллова Р. М. Методы линейного программирования. Часть 2. Транспортные задачи. - Минск : Изд – во Белорусск . ун - та, 1978.- 236 с.
9. Гольштейн Е. Г. , Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. - М.:Наука, 1969.- 374 с.
10. Грибов А. В. Рекурсивное решение транспортных задач линейного программирования // Математика, Механика. Астрономия: Вестн. ЛГУ. - Л., 1978.- Вып. 4, № 19.- С. 11-19.
11. Диниц Е. А. Алгоритм поразрядного сокращения невязок и транспортные задачи // Исследования по дискретной математике. -М. : Наука, 1973.- С. 46 – 57.
12. Ким И. В. Об эффективности алгоритмов решения двухкомпонентных задач линейного программирования // Экономика и матем. методы. – М . , 1974 . - Т . 10 , вып. 3.- С. 621-631 .
13. Прыгичев А.Н. Эффективная реализация метода потенциалов для транспортной задачи // Применение математики в экономике .- Л.: Изд - во ЛГУ, 1977.- Вып. 12.- С. 125-131.
14. Бушуева С. Ф, и др. Результаты конкурса "Транспорт - 81" // Экономика и матем. методы. -М., 1983.- Т. 19, вып. 1.- С. 176 - 181.
15. Комп'ютерна програма " Пакет програм для рішення задач оптимізації розподілу дискретних потоків у багатопродуктових мережах " А. с. від 23.07.2002 № 5978, Україна, Міністерство освіти і науки України, Державний департамент інтелектуальної власності; заявка від 06.06.02 № 5772 про реєстрацію авторського права на твір.

**Отримано: 10.07.2012 р.**