УДК 534.2

А.И.Гончар, И.Н.Титов, Н.И.Титова

Научно-технический центр
панорамных акустических систем НАН Украины, г.Запорожье

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ ГЕОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДАХ, СОДЕРЖАЩИХ КАРСТОВЫЕ ПОЛОСТИ

Рассматриваются вопросы моделирования распространения и рассеяния акустических волн с целью диагностики карстовых полостей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *моделирование, рассеяние, геоакустические волны, затухание, карстовая полость.*

Для предварительного анализа параметров геоакустических волновых полей и интерпретации результатов геоакустических исследований широко используются методы математического моделирования. Большинство используемых расчетных схем базируется на идеально упругой модели Гука, в которой среда описывается объемной плотностью ρ и модулями упругости λ и μ для объемных и сдвиговых деформаций (коэффициентами Ламе). В рамках такого подхода можно моделировать большинство основных типов сейсмо- и геоакустических волн, несущих информацию о неоднородном строении различных геологических сред [1, 2]. Но при решении целого ряда задач данный подход имеет ограниченное применение, поскольку реальные геологические среды (в том числе и карстовые породы) являются сложными материалами, отличающимися анизотропией свойств и являющимися неоднородными слоистыми и пористыми двух- или трехфазными структурами. Широкое распространение указанного подхода связано с относительной простотой реализации решения. Тем не менее, разработка новых подходов, сочетающих более адекватные модели среды с простотой реализации, является актуальной научно-технической задачей.

Основная проблема, решение которой невозможно в рамках упругой модели Гука – учет поглощения геоакустических волн. Кроме того, актуальным является и вопрос выбора адекватных граничных условий на поверхностях карстовых полостей, которые могут иметь как каноническую, так и неканоническую форму.

Поэтому целью работы было создание математической модели процесса распространения и рассеяния затухающих геоакустических волн для решения задачи диагностики карстовых полостей, а также проведение расчетов в рамках предложенной модели для случая сферической карстовой полости.

Постановка задачи. Распространение и рассеяние затухающих упругих волн в карстовой породе, содержащей сферическую полость, описывается уравнением Ламе для радиального смещения частиц среды с учетом сферической симметрии задачи (считаем, что начало координат совпадает с центром полости)

$$\rho\ddot{u} + \alpha\dot{u} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) - \mu\frac{2u}{r^2}, \qquad (1)$$

где α – коэффициент затухания. С учетом предварительного напряженно-деформированного состояния карста (u_0 – начальные смещения) начальные условия будут иметь вид:

$$\dot{u}\big|_{t=0} = 0,\quad u\big|_{t=0} = u_0\,. \tag{2}$$

Так как на бесконечности упругие волны затухают, а на границе полости имеет место состояние механического равновесия, то в качестве граничных условий возьмем следующие соотношения

$$u\big|_{r\to\infty} = 0\,;\qquad \sigma_{rr}\big|_{r=R} = -P'\big|_{r=R}\,, \tag{3}$$

где R – радиус полости.

С учетом того, что давление и радиальная компонента тензора напряжений определяются выражениями

$$P' = P - P_* = -3\gamma P_*\frac{u}{R},\qquad \sigma_{rr} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} + 2\lambda\frac{u}{r}\bigg|_{r=R},$$

где γ – показатель степени из уравнения состояния Тэта для воды, P_* – характерное давление воды в карстовой полости, граничное условие на полости примет вид

$$\frac{3\gamma P_* - 2\lambda}{R}u\big|_{r=R} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}. \tag{4}$$

Таким образом, решение задачи (1) – (4) определяет поля смещений в упругой волне, рассеянной сферической карстовой полостью.

Результаты расчетов и их обсуждение. Применим к уравнению (1) преобразование Лапласа. С учетом начальных условий (2) получим следующее уравнение

$$r^2\frac{d^2\tilde{u}}{dr^2} + 2r\frac{d\tilde{u}}{dr} - \left[2\left(1+\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) + \frac{s(s+\beta)}{c_l^2}r^2\right]\tilde{u} = -\frac{(s+\beta)u_0 r^2}{c_l^2}, \tag{5}$$

где $\tilde{u}(r,s)$ – лаплас-образ функции $u(r, t)$, s – параметр преобразования Лапласа, $\beta = \alpha/\rho$, $c_l = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ и $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости упругих продольных и поперечных волн.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{u}(r,s) = \frac{\tilde{A}(s)}{\sqrt{r}}I_\nu\left(\sqrt{s(s+\beta)}\frac{r}{c_l}\right) + \frac{\tilde{B}(s)}{\sqrt{r}}K_\nu\left(\sqrt{s(s+\beta)}\frac{r}{c_l}\right) + \frac{u_0(s+\beta)}{\sqrt{r}c_l^2}\times$$

$$\times\int r'^{7/2}\cdot\left[I_\nu\left(\sqrt{s(s+\beta)}\frac{r'}{c_l}\right)K_\nu\left(\sqrt{s(s+\beta)}\frac{r}{c_l}\right) -\right.$$

$$\left.-I_\nu\left(\sqrt{s(s+\beta)}\frac{r}{c_l}\right)K_\nu\left(\sqrt{s(s+\beta)}\frac{r'}{c_l}\right)\right]dr'$$

где $\nu = \dfrac{3}{2}\sqrt{1+\dfrac{8c_t}{9c_l}}$, I_ν и K_ν – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка ν, $\tilde{A}(s)$ и $\tilde{B}(s)$ – постоянные, определяемые граничными условиями.

Так как аргумент модифицированных функций Бесселя, входящих в решение уравнения (5) мал, воспользуемся известными асимптотиками этих функций при малых значениях аргумента [3]:

$$I_\nu(x) \quad \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \qquad K_\nu(x) \quad \frac{1}{2}\Gamma(\nu)(x/2)^{-\nu} \tag{6}$$

Используя соотношения (3), (4), (6), получим асимптотическое выражение для изображения механического смещения

$$\tilde{u}(r,s)=\frac{\beta^2 u_0 r^2}{c_l^2\left(\frac{25}{4}-\nu^2\right)}\left[\frac{3\gamma P_*-6\lambda-8\mu}{3\gamma P_*-2\lambda-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)(\lambda+2\mu)}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu-\frac{5}{2}}-1\right]\frac{s}{(s+\beta)^2} \tag{7}$$

Проводя обратное преобразование Лапласа для выражения (7), получим

$$u(r,t)=\frac{\beta^2 u_0 r^2}{c_l^2\left(\frac{25}{4}-\nu^2\right)}\left[\frac{3\gamma P_*-6\lambda-8\mu}{3\gamma P_*-2\lambda-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)(\lambda+2\mu)}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu-\frac{5}{2}}-1\right]\times$$
$$\times(1-\beta t)\exp(-\beta t)$$

Вводя безразмерную радиальную координату $x = r/R$, для безразмерного смещения точек среды $\bar{U}(x,t)=u(r,t)/u_0$, получим

$$\bar{U}(x,t)=\frac{\beta^2 R^2 x^2}{c_l^2\left(\frac{25}{4}-\nu^2\right)}\left[\frac{3\gamma P_*-6\lambda-8\mu}{3\gamma P_*-2\lambda-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)(\lambda+2\mu)}x^{\nu-\frac{5}{2}}-1\right]\times \tag{8}$$
$$\times(1-\beta t)\exp(-\beta t).$$

Радиальная компонента тензора напряжений определяется выражением

$$\sigma_{rr}(r,t)=\frac{2\beta^2 u_0 r}{c_l^2\left(\frac{25}{4}-\nu^2\right)}(1-\beta t)\exp(-\beta t)\times$$
$$\times\left[\left(2\lambda+\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)(\lambda+2\mu)\right)\frac{3\gamma P_*-6\lambda-8\mu}{3\gamma P_*-2\lambda-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)(\lambda+2\mu)}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu-\frac{5}{2}}-3\lambda-2\mu\right].$$

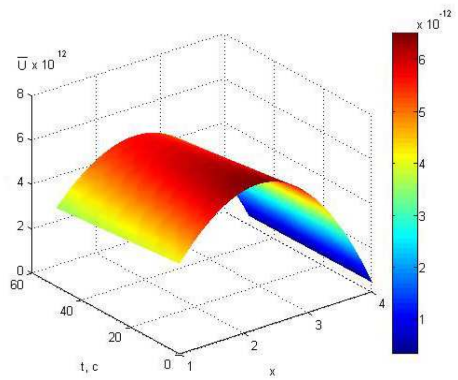
Для безразмерной радиальной компоненты тензора напряжений $\bar{\sigma}(x,t)=\sigma_{rr}(r,t)/\sigma_0$ (где $\sigma_0=\lambda u_0/R$) имеем

$$\bar{\sigma}(x,t)=\frac{2\beta^2 x}{c_l^2\left(\frac{25}{4}-\nu^2\right)}(1-\beta t)\exp(-\beta t)\times$$
$$\times\left[\left(2+\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(1+2\frac{\mu}{\lambda}\right)\right)\frac{3\gamma P_*-6\lambda-8\mu}{3\gamma P_*-2\lambda-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)(\lambda+2\mu)}x^{\nu-\frac{5}{2}}-3-2\frac{\mu}{\lambda}\right]. \tag{9}$$

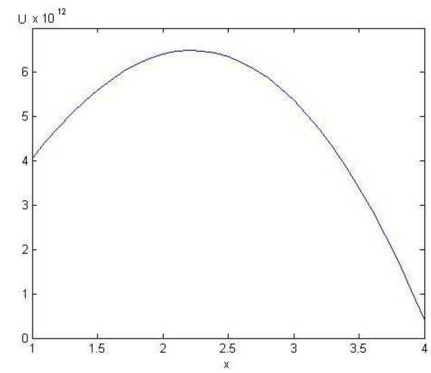
Расчеты проводились при следующих значениях радиуса карстовой полости R = 10 м акустических параметров карста [4] c_l = 5000 м/с, c_t = 3000 м/с, ρ = 2700 кг/м^3, β = 0,0014 с$^{-1}$ и термодинамических параметров воды, заполняющей полость [1] γ= 7, P_* = 3,2·10^8 Па. Результаты расчетов, проведенных по формулам (8) и (9), приведены на рис.1 – 4.

Результаты расчетов, приведенные на рис.1 и 2, свидетельствуют о наличии максимумов смещения точек среды на расстоянии r = 2,2R от центра полости. Поэтому в этой области пространства имеет смысл размещать приборы, регистрирующие смещения точек карстовой породы. На рис.3 и 4 видно, что радиальная компонента тензора напряжений максимальна на поверхности полости и спадает с увеличением расстояния от центра полости, меняя знак при r ≈ 1,8 R, что является свидетельством смены растягивающих напряжений сжимающими.

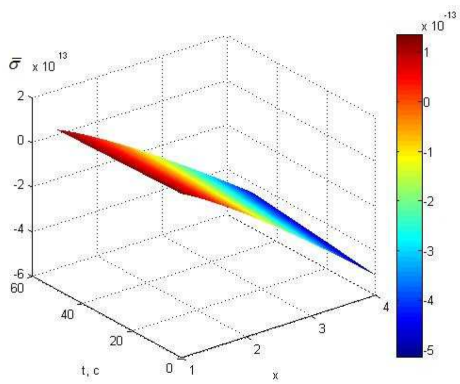
Выводы. Предложена новая математическая модель рассеяния затухающих упругих волн на карстовых полостях сферической формы.



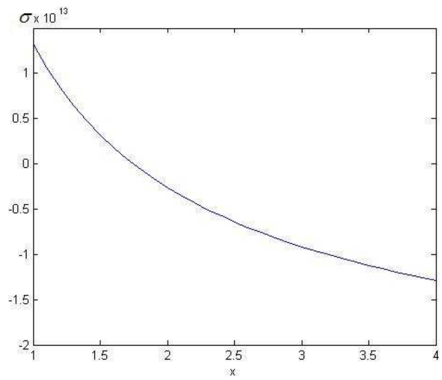
Р и с . 1 . Зависимость безразмерных смещений частиц карста от безразмерной радиальной координаты и времени.



Р и с . 2 . Радиальное распределение безразмерных смещений частиц карста в момент времени t = 1 с.



Р и с . 3 . Зависимость безразмерной радиальной компоненты тензора напряжений от безразмерной радиальной координаты и времени.



Р и с . 4 . Радиальное распределение безразмерной радиальной компоненты тензора напряжений в момент времени t = 1 с.

Максимум смещения точек среды находится на расстоянии $r = 2{,}2R$ от центра полости. Это позволяет говорить о практической целесообразности размещения сейсмодатчиков в этой области пространства с целью надежной регистрации рассеянной волны.

Радиальная компонента тензора напряжений меняет знак при $r \approx 1{,}8\ R$, что свидетельствует о имеющей место в этой области породы смене растягивающих напряжений сжимающими.

Зависимость характеристик рассеянной упругой волны (формулы (8), (9)) от параметров воды (γ, P_*), находящейся в полости, свидетельствуют о возможности идентификации карстовых полостей геоакустическими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике.– М.: Наука, 1990.– 237 с.
2. *Математическое* моделирование пространственной структуры геофизических сред и оценка возмущений акустических полей, обусловленных наличием локализованных структурных аномалий. Отчет о НИР / НТЦ ПАС НАН Украины.– Запорожье, 2005.– 47 с.
3. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стигана И.; пер. с англ. В.А.Диткин, Л.Н.Кармазина.– М.: Наука, 1979.– 832 с.
4. *Физические* величины: Справочник / Под ред. И.С.Григорьева, Е.З.Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991.– 1232 с.

Материал поступил в редакцию 13.06.2013 г.

АНОТАЦІЯ Розглядаються питання моделювання розповсюдження і розсіювання акустичних хвиль з метою діагностики карстових порожнин.

ABSTRACT In this paper, issues of modeling acoustic waves propagation and scattering for the purpose of karst cavities analysis are described