

Ант. А. Букатов, Анд. А. Букатов

## Скорости движения жидких частиц под плавающим ледяным покровом при распространении периодической волны конечной амплитуды

На основе потенциала скорости, полученного методом многомасштабных асимптотических разложений до величин третьего порядка малости, рассмотрена зависимость составляющих скорости движения однородной жидкости под плавающим ледяным покровом от его толщины и модуля упругости при распространении периодической волны конечной амплитуды. Показано, что битый лед обуславливает уменьшение амплитудных значений составляющих скорости частиц жидкости и отставание фазы формируемых колебаний. Влияние упругости льда, усиливающееся с уменьшением длины волны начальной гармоники, проявляется как в увеличении максимальных значений составляющих скорости, так и в смещении фазы колебаний в направлении распространения волны.

**Ключевые слова:** волны конечной амплитуды, изгибно-гравитационные волны, движение частиц жидкости.

**Введение.** В линейной постановке влияние битого льда на скорость волновых течений в однородной жидкости рассмотрено в статье [1]. Исследование скорости поступательного перемещения жидкости в направлении распространения волн конечной амплитуды, предсказанного теорией Стокса [2], выполнено в работах [3 – 5] при бесконечной и в [6 – 8] при конечной глубине бассейна со свободной поверхностью, а в статье [9] для жидкости с плавающим битым льдом без количественного анализа распределений составляющих скорости жидких частиц по длине волны. Изучению зависимости составляющих орбитальной скорости движения частиц однородной жидкости с открытой поверхностью от волнового числа и крутизны бегущей периодической волны конечной амплитуды посвящена работа [10].

В настоящей работе на основе асимптотического разложения потенциала скорости, полученного в [11] методом многих масштабов [12] до величин третьего порядка малости по крутизне волны, проведен анализ зависимости распределений составляющих скорости движения жидких частиц по длине волны от характеристик ледяного покрова.

**Постановка задачи.** Пусть поверхность однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный бассейн постоянной глубины  $H$ , покрыта плавающим льдом. Рассмотрим влияние ледяного покрова на орбитальные скорости движения жидких частиц, формируемые бегущей периодической волной конечной амплитуды, предполагая движение жидкости потенциальным, а колебания ледяного покрова неотрывными. В безразмерных переменных  $x = kx_1$ ,  $z = kz_1$ ,  $t = \sqrt{kg}t$  задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq \zeta \quad (1)$$

для потенциала скорости  $\varphi(x, z, t)$  с граничными условиями на поверхности лед – вода ( $z = \zeta$ )

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \zeta - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = P, \quad (2)$$

$$P = D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \kappa k \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right]$$

и на дне бассейна ( $z = -H$ )

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

В начальный момент времени ( $t = 0$ )

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \kappa = h \frac{\rho_1}{\rho},$$

$E, h, \rho_1, \nu$  – модуль нормальной упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона льда;  $\zeta(x, t)$  – прогиб льда или возвышение поверхности лед – вода;  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение силы тяжести,  $k$  – волновое число. Потенциал скорости и прогиб льда связаны кинематическим условием ( $z = \zeta$ )

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

В динамическом условии (2) выражение с множителем  $\kappa$  представляет собой инерцию вертикальных смещений льда. Причем первое слагаемое обусловлено нелинейностью ускорения его вертикальных смещений.

**Выражения для составляющих орбитальной скорости движения частиц жидкости.** Решая задачу (1) – (5) методом многих масштабов в случае периодической бегущей в отрицательном направлении оси  $x$  волны конечной амплитуды, аналогично работе [11] найдем выражение

$$\varphi = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n b_n \sin n\theta, \quad (6)$$

определяющее потенциал скорости с точностью до третьего приближения.

Здесь

$$\theta = x + \sigma, \quad \sigma = \tau(1 + \varepsilon^2 \sigma_0), \quad \tau^2 = (1 + D_1 k^4)(1 + \kappa k \operatorname{th} H)^{-1} \operatorname{th} H,$$

$$b_1 = \frac{\tau \operatorname{ch}(z+H)}{\operatorname{sh}H}, \quad b_2 = \frac{\tau v_2 \operatorname{ch}2(z+H)}{4\mu_2 \operatorname{ch}2H \operatorname{th}H}, \quad b_3 = \frac{\tau v_3 \operatorname{ch}3(z+H)}{3\mu_3 \operatorname{ch}3H},$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \left[ l_3 - l_4 (\kappa k + \operatorname{cth}H)^{-1} \right], \quad v_2 = \tau^2 (5 \operatorname{th}H - \operatorname{cth}H + 2\kappa k) - 2(1 + 16D_1 k^4),$$

$$\mu_2 = (1 + 16D_1 k^4) \operatorname{th}2H - 2\tau^2 (1 + 2\kappa k \operatorname{th}2H),$$

$$v_3 = 3\tau^2 l_1 - l_2 (1 + 81D_1 k^4), \quad \mu_3 = (1 + 81D_1 k^4) \operatorname{th}3H - 3\tau^2 (1 + 3\kappa k \operatorname{th}3H),$$

$$l_1 = \kappa k l_{11} + l_{12}, \quad l_2 = (1/2) a_2 (3 \operatorname{cth}H + 6 \operatorname{cth}2H) - (3/2) \operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H + 5/8,$$

$$l_{11} = a_2 (5 \operatorname{cth}2H - (1/2) \operatorname{cth}H) + (1/2) (\operatorname{cth}H - 5 \operatorname{cth}2H) \operatorname{cth}H - 1/8,$$

$$l_{12} = a_2 (11/2 - \operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H) + ((1/2) \operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H - 15/8) \operatorname{cth}H,$$

$$l_3 = (1/2) a_2 (\operatorname{cth}H + 2 \operatorname{cth}2H) - (1/2) \operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H - 3/8,$$

$$l_4 = \kappa k l_{41} - l_{42}, \quad l_{41} = a_2 (\operatorname{cth}2H - (5/2) \operatorname{cth}H) +$$

$$\quad + (1/2) (\operatorname{cth}H - \operatorname{cth}2H) \operatorname{cth}H - 3/8,$$

$$l_{42} = a_2 (1/2 + \operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H) - (1/2) (\operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H - 5/4) \operatorname{cth}H,$$

$$a_2 = 3\tau^2 (\operatorname{th}H - \operatorname{cth}H - 2\kappa k) \operatorname{th}2H / (4\mu_2 \operatorname{th}H).$$

В размерных переменных ( $\varphi = \varphi \sqrt{kg} / k^2$ ,  $\varepsilon = ak$ ,  $a$  – амплитуда начальной гармоники) имеем

$$\varphi = a \sqrt{g/k} b_1 \sin \theta + a^2 \sqrt{kg} b_2 \sin 2\theta + a^3 k \sqrt{kg} b_3 \sin 3\theta,$$

$$\theta = kx + \sigma_1 (1 + \sigma^0) t, \quad \sigma^0 = a^2 k^2 \sigma_0, \quad \sigma_1 = \tau \sqrt{kg},$$

$$\tau^2 = (1 + D_1 k^4) (1 + \kappa k \operatorname{th}kH)^{-1} \operatorname{th}kH,$$

$$b_1 = \frac{\tau \operatorname{chk}(z+H)}{\operatorname{shkH}}, \quad b_2 = \frac{\tau v_2 \operatorname{ch}2k(z+H)}{4\mu_2 \operatorname{ch}2kH \operatorname{thkH}}, \quad b_3 = \frac{\tau v_3 \operatorname{ch}3k(z+H)}{3\mu_3 \operatorname{ch}3kH},$$

а в выражениях для  $\sigma_0$ ,  $v_{2,3}$ ,  $\mu_{2,3}$  аргумент гиперболических функций заменяется на  $kH$ . Отсюда для горизонтальной ( $u$ ) и вертикальной ( $w$ ) составляющих скорости движения жидкости получим

$$u = a \sqrt{kg} (b_1 \cos \theta + 2akb_2 \cos 2\theta + 3a^2 k^2 b_3 \cos 3\theta),$$

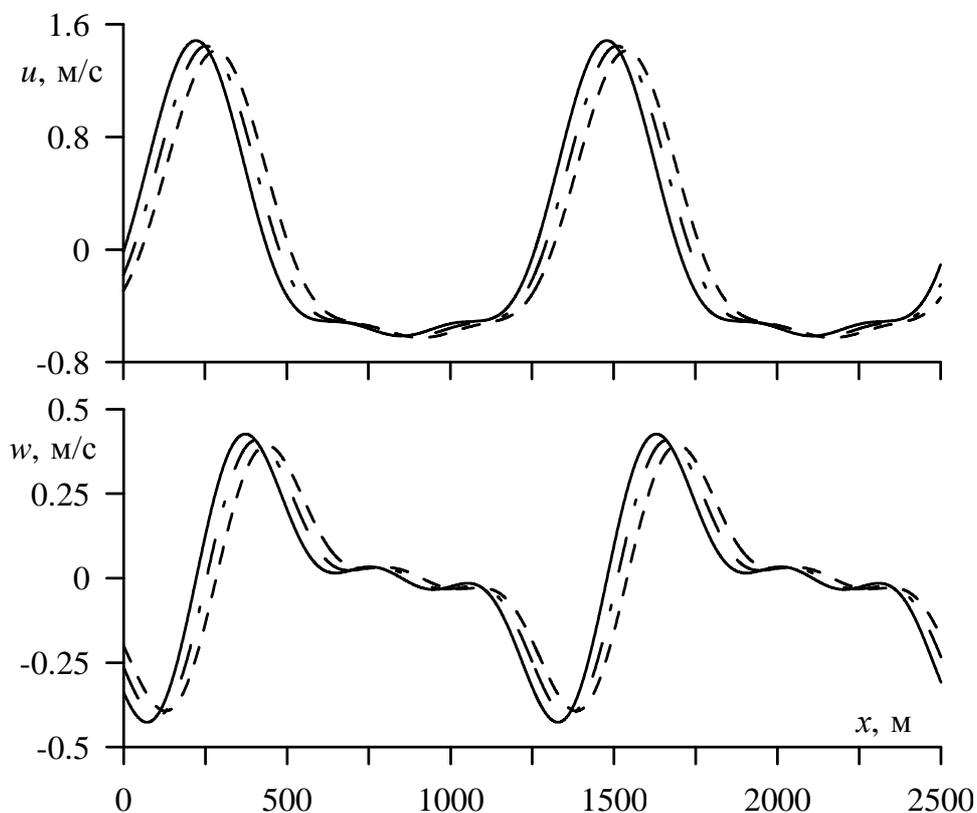
$$w = a \sqrt{kg} (b_{11} \sin \theta + 2akb_{21} \sin 3\theta + 3a^2 k^2 b_{31} \sin 3\theta),$$

$$b_{11} = \frac{\tau \operatorname{shk}(z+H)}{\operatorname{shkH}}, \quad b_{21} = \frac{\tau v_2 \operatorname{sh}2k(z+H)}{4\mu_2 \operatorname{ch}2kH \operatorname{thkH}}, \quad b_{31} = \frac{\tau v_3 \operatorname{sh}3k(z+H)}{3\mu_3 \operatorname{ch}3kH}.$$

Отметим, что полученное решение справедливо вне малых окрестностей значений волнового числа  $k = k_1$  и  $k = k_2$ , являющихся корнями уравнений  $\mu_2 = 0$ ,  $\mu_3 = 0$  соответственно.

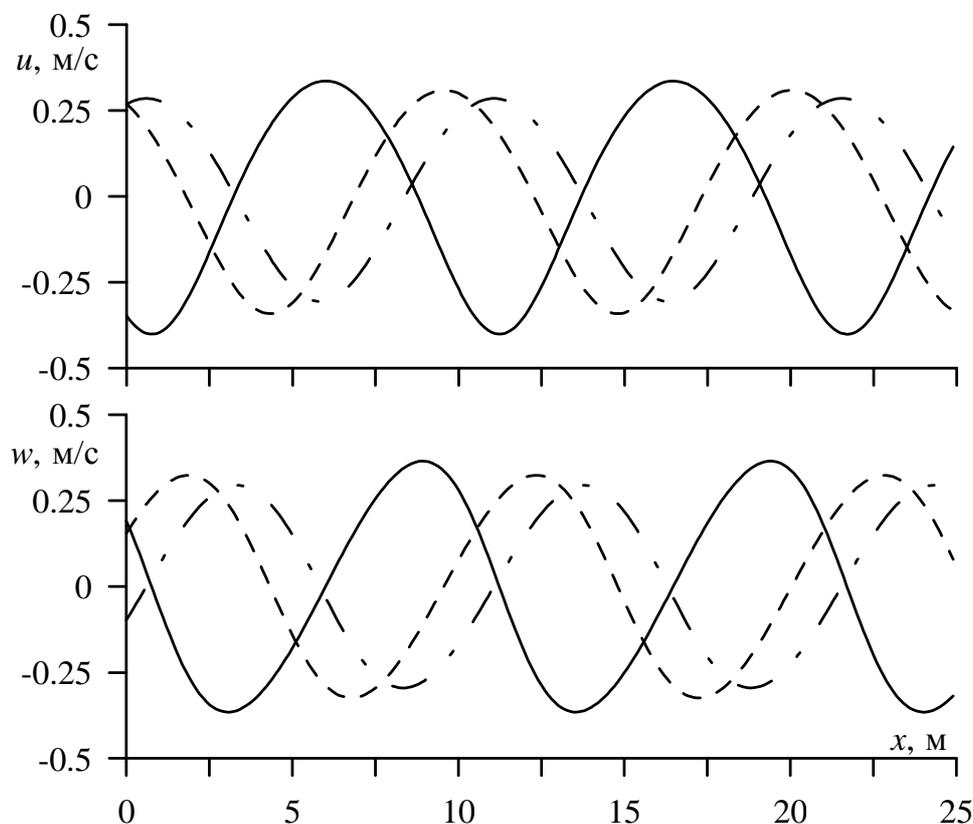
**Анализ влияния характеристик ледяного покрова на составляющие скорости движения жидкости.** Для количественной оценки влияния плавающего льда на величины составляющих скорости и их распределения вдоль направления перемещения волны проводились численные расчеты при  $\rho_1/\rho = 0,87$ ;  $\nu = 0,34$ ;  $0 \leq h \leq 2$  м;  $z = 0$  и значениях модуля нормальной упругости  $E$ , равных  $0$ ;  $10^8$ ;  $5 \cdot 10^8$ ;  $10^9$ ;  $3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>.

На рис. 1 приведены распределения  $u$  и  $w$  вдоль профиля волны при  $t = 1120$  с,  $a = 2$  м,  $\lambda = 1256$  м,  $H = 50$  м. Сплошные, штрихпунктирные и штриховые линии соответствуют толщине битого ( $E = 0$ ) льда 0, 1, 2 м. Видно, что с ростом толщины льда происходит отставание фазы и уменьшение значений составляющих скорости. В точках экстремальных значений на профиле  $u(x)$  вертикальная составляющая скорости, как и в линейном случае, равна нулю. Однако точкам экстремальных значений на профиле  $w(x)$  соответствуют ненулевые величины горизонтальной составляющей скорости при рассмотренных толщинах льда.



**Р и с. 1.** Влияние толщины битого льда на распределение составляющих скорости движения жидкости вдоль профиля волны при  $\lambda/H = 25,12$

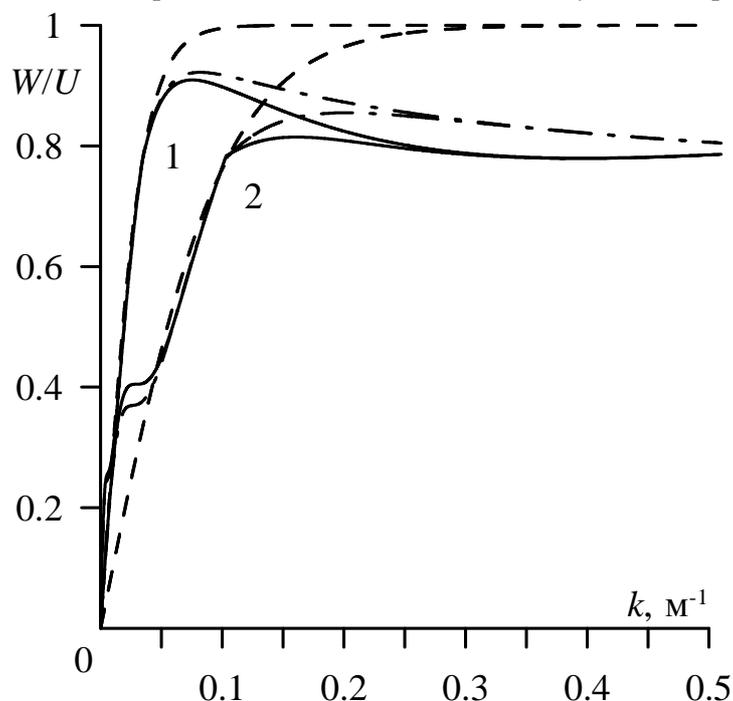
В случае коротких волн увеличение толщины битого льда также уменьшает амплитудные значения составляющих скорости и обуславливает отставание фазы колебаний. При этом вид профилей их распределений вдоль направления распространения волны приближается к синусоидальному. Это иллюстрируют графики на рис. 2, где сплошным, штриховым и штрихпунктирным линиям соответствуют толщины льда 0; 0,5; 1 м при  $t = 300$  с,  $H = 50$  м,  $a = 0,15$  м,  $\lambda = 10,47$  м.



**Р и с. 2.** Влияние толщины битого льда на распределение составляющих скорости движения жидкости вдоль профиля волны при  $\lambda/H = 0,2094$

Отношение максимальных по длине волны значений вертикальной ( $W$ ) и горизонтальной ( $U$ ) составляющих скорости для  $a = 1$  м приведено на рис. 3 в случае битого льда ( $E = 0$ ). Линии 1 и 2 соответствуют здесь значениям глубины бассейна 30 и 10 м, сплошные и штрихпунктирные линии – толщинам льда 0 и 1 м. Штриховые линии характеризуют распределения  $W/U$  по  $k$  в линейном случае. Графики показывают, что рассмотренное отношение всегда меньше единицы. Следовательно, вертикальная составляющая скорости не превышает горизонтальную. При изменении  $k$  в области малых значений в нелинейном случае отношение изменяется немонотонно. При уменьшении

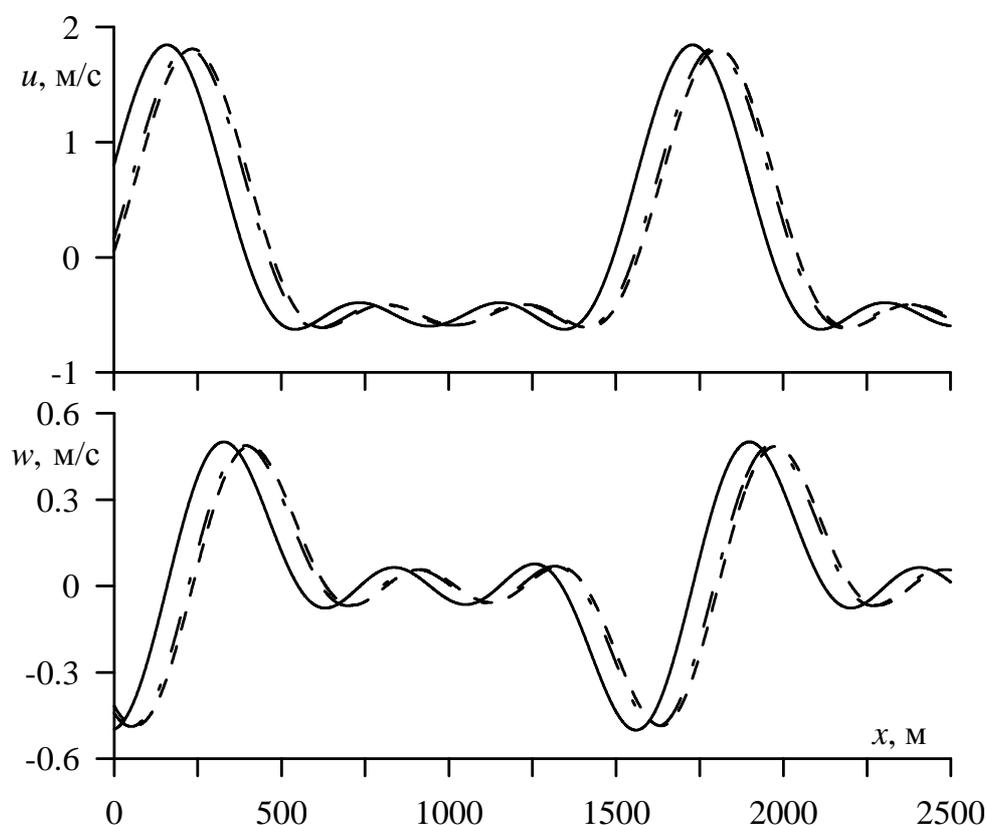
длины волны величина отношения приближается к единице, что свидетельствует об уменьшении влияния нелинейности. Кроме того, в нелинейном случае распределение отношения  $W/U$  по волновому числу имеет экстремумы. Наличие битого льда приводит к их увеличению. Однако в области коротких волн влияние льда на величину отношения убывает. С уменьшением глубины бассейна положение экстремумов смещается в сторону больших значений волнового числа. В коротковолновой области влияние глубины не проявляется.



**Р и с. 3.** Распределение величины отношения максимальных значений вертикальной и горизонтальной составляющих скорости по волновому числу

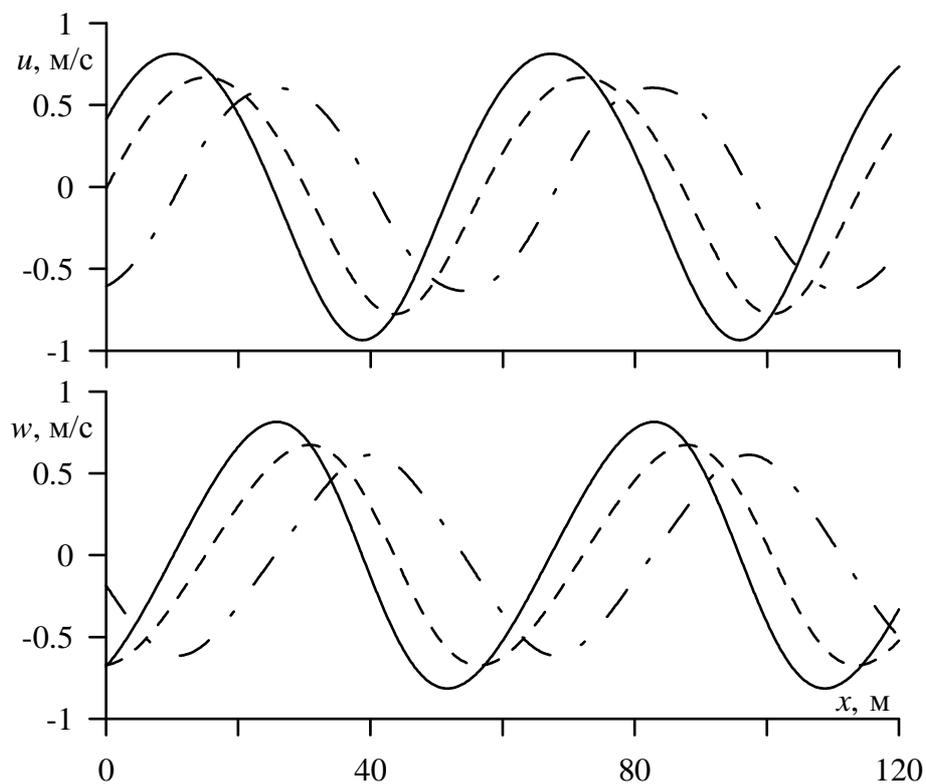
Влияние упругости сплошного ледяного покрова на распределение составляющих скорости вдоль профиля волны иллюстрируют графики на рис. 4, 5. На рис. 4 штриховым, штрихпунктирным и сплошным линиям соответствуют значения модуля упругости, равные  $0$ ;  $5 \cdot 10^8$ ;  $3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup> при  $t = 7200$  с,  $\lambda = 1570$  м,  $h = 2$  м при тех же величинах  $a$  и  $H$ , что и для рис. 1. Поведение графиков свидетельствует о том, что изменение жесткости ледяного покрова практически не проявляется в изменениях максимальных значений составляющих скорости движения жидкости, но приводит к заметному сдвигу фазы колебаний в направлении распространения длинной изгибно-гравитационной волны конечной амплитуды. С уменьшением длины волны влияние упругости льда усиливается. Оно проявляется как в увеличении мак-

симальных значений  $w$  и  $u$ , так и в увеличении фазовой скорости. Это видно из графиков на рис. 5, где сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями обозначены распределения  $w$  и  $u$  по  $x$  при  $E = 3 \cdot 10^9; 10^9; 10^8 \text{ Н/м}^2$  для значений  $t = 270 \text{ с}$ ,  $\lambda = 57,1 \text{ м}$ ,  $h = 0,6 \text{ м}$ ,  $a = 0,6 \text{ м}$ ,  $H = 15 \text{ м}$ .

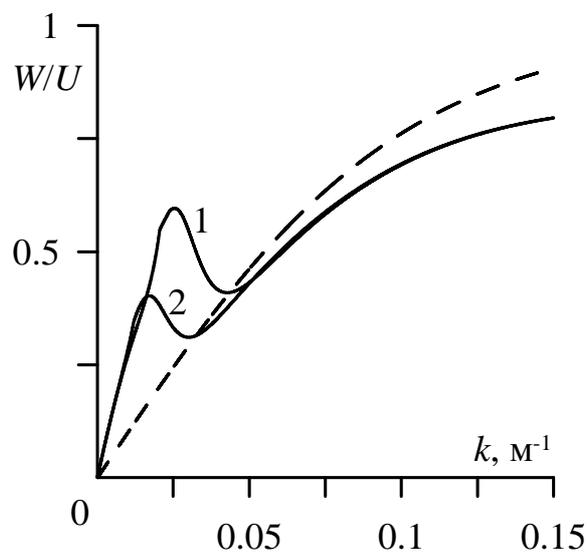


**Р и с. 4.** Зависимость распределений составляющих скорости вдоль профиля волны от модуля упругости льда при  $\lambda/H = 31,4$

Распределение отношения  $W/U$  по волновому числу для значений  $E = 10^9; 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$  показано на рис. 6 кривыми 1 и 2 при  $t = 0$ ,  $H = 10 \text{ м}$ ,  $h = 1 \text{ м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ,  $\lambda = 628 \text{ м}$ . Штриховая линия соответствует линейному приближению, для которого отношение при указанных величинах модуля упругости одно и то же. Анализ графиков показывает, что экстремальные значения на распределениях  $W/U$  по  $k$  уменьшаются с увеличением модуля упругости и смещаются в сторону больших значений волнового числа. Однако, начиная с некоторого значения  $k$ , рассматриваемое отношение не меняется с изменением  $E$ , оставаясь меньшим, чем в линейном случае.



**Р и с. 5.** Зависимость распределений составляющих скорости вдоль профиля волны от модуля упругости льда при  $\lambda/H = 3,81$



**Р и с. 6.** Влияние модуля упругости льда на распределение отношения максимальных значений вертикальной и горизонтальной составляющих скорости по волновому числу

**Заключение.** Таким образом, на основе потенциала скорости, полученного методом многих масштабов в виде асимптотического разложения с точностью до величин третьего порядка малости по крутизне бегущей периодической волны конечной амплитуды, рассмотрена зависимость составляющих скорости орбитального движения жидких частиц под плавающим ледяным покровом от толщины и модуля нормальной упругости льда. Показано, что битый лед обуславливает уменьшение амплитудных значений составляющих скорости и отставание фазы формируемых колебаний. Влияние упругости льда, усиливающееся с уменьшением длины волны начальной гармоники, проявляется как в увеличении максимальных значений составляющих скорости жидких частиц, так и в смещении фазы колебаний в направлении распространения волны.

При распространении длинной волны в точках максимальных значений на профиле горизонтальной составляющей скорости вертикальная составляющая, как и в линейном случае, равна нулю. В то же время точкам максимальных значений на профиле вертикальной составляющей соответствуют ненулевые величины горизонтальной составляющей скорости. Величина отношения максимального по длине волны значения вертикальной составляющей скорости к максимальному значению горизонтальной составляющей не превышает единицы. В линейном приближении наличие льда не влияет на величину этого отношения. Однако при распространении волны конечной амплитуды величина отношения может быть как большей, так и меньшей аналогичного значения в линейном приближении в зависимости от длины волны, толщины и модуля упругости льда.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Букатов А.Е., Жарков В.В.* Влияние битого льда на скорость волновых течений при прохождении прогрессивных волн над уступом дна // Морской гидрофизический журнал. – 2001. – № 5. – С. 3 – 14.
2. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // Math. Phys. Pap. Cambr. Univ. Press. – 1847. – 1. – P. 197 – 229.
3. *Нестеров С.В.* Возбуждение волн конечной амплитуды бегущей системой давления // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1968. – 4, № 10. – С. 1123 – 1125.
4. *Ньюмен Дж.* Морская гидродинамика. – Л.: Судостроение, 1985. – 386 с.
5. *Longuet-Higgins M.S.* Lagrangian moments and mass transport in Stokes waves // J. Fluid Mech. – 1987. – 179. – P. 547 – 555.
6. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 304 с.
7. *Алешков Ю.З.* Течения и волны в океане. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1996. – 228 с.
8. *Longuet-Higgins M.S.* Lagrangian moments and mass transport in Stokes waves. Part 2. Water of finite depth // J. Fluid Mech. – 1988. – 186. – P. 321 – 336.
9. *Bukatov A.E., Bukatov A.A.* Propagation of surface waves of finite amplitude in a basin with floating broken ice // Int.J. Offshore and Polar Eng. – 1999. – 9, № 3. – P. 161 – 166.

10. *Букатов Ант.А., Букатова О.М.* Скорости движения жидкости в бегущей периодической волне конечной амплитуды // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2008. – С. 269 – 271.
11. *Букатов А.Е., Букатов А.А.* Волны конечной амплитуды в однородной жидкости с плавающей упругой пластиной // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – 50, № 5. – С. 67 – 74.
12. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
Севастополь

Материал поступил  
в редакцию 24.11.09  
После доработки 21.12.09

**АНОТАЦІЯ** На основі потенціалу швидкості, отриманого методом багатомасштабних асимптотичних розкладань до величин третього порядку малості, розглянута залежність складових швидкості руху однорідної рідини під плаваючим льодяним покривом від його товщини і модуля пружності при розповсюдженні періодичної хвилі скінченної амплітуди. Показано, що бита крига обумовлює зменшення амплітудних значень складових швидкості частинок рідини і відставання фази формованих коливань. Вплив пружності льоду, що посилюється із зменшенням довжини хвилі початкової гармоніки, проявляється як в збільшенні максимальних значень складових швидкості, так і в зміщенні фази коливань у напрямі розповсюдження хвилі.

**Ключові слова:** хвилі скінченної амплітуди, згинально-гравітаційні хвилі, рух частинок рідини.

**ABSTRACT** Based on the velocity potential obtained by the method of multi-scale asymptotic expansion to the values of the third order infinitesimal, considered is the dependence of the velocity components of the homogeneous motion under a floating ice cover upon its thickness and elasticity modulus at propagation of a periodic wave of finite amplitude. It is shown that broken ice conditions decrease of the amplitude values of the liquid particles' velocity components and a phase lag of the formed oscillations. The effect of ice elasticity intensifying with decrease of the initial harmonic wavelength is manifested both in growth of maximum values of the velocity components and in shift of the oscillation phase in the direction of a wave propagation.

**Keywords:** waves of finite amplitude, flexural-gravity waves, motion of liquid particles.