

## Накат поверхностных волн различной формы на наклонный берег

В длинноволновом приближении выполнен численный анализ плоской задачи о накате волн различной формы на наклонный берег. Рассмотрена трансформация формы волн при затоплении берега и их последующем откате. Проведено исследование зависимости максимальных повышений и понижений уровня моря от параметров волны при подходе к берегу, глубины шельфа и угла наклона дна. Показано, что форма волны влияет на амплитудные характеристики колебаний уреза воды. Вертикальные заплески волн на наклонный берег могут в несколько раз превышать высоту волны на входе в шельфовую зону.

**Ключевые слова:** волны нелинейные, накат волн на берег, длинные волны, плоская задача, численное моделирование.

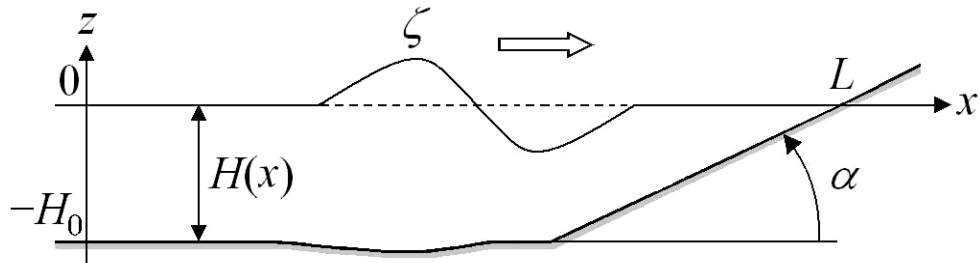
**Введение.** Накат поверхностных волн на берег является заключительным и наиболее важным этапом эволюции волн цунами. Именно он определяет уровень цунамиопасности морского побережья. Сложность математического моделирования этой стадии распространения волн определяется существенной нелинейностью процесса и необходимостью описания движения жидкости вверх (накат волны) и вниз (откат волны) по сухой границе бассейна. Наиболее широкое распространение в исследованиях этого направления получили нелинейные модели длинных поверхностных волн.

Точные аналитические решения одномерной задачи наката волны и аналитические оценки вертикальных заплесков волн типа цунами в линейной и нелинейной постановках содержатся в работах [1 – 7]. Численные модели одномерного и двумерного наката нелинейных длинных волн предложены и применялись во многих работах, в том числе в [8 – 12]. Лабораторное моделирование наката волн на берег и сопоставление экспериментальных данных с результатами математического моделирования проводилось в [2, 13 – 15] и др.

Ниже в рамках нелинейной теории длинных волн без дисперсии выполнен численный анализ одномерного распространения на шельфе постоянной глубины и последующего наката на плоский наклонный берег знакопостоянных и знакопеременных волн. Предшествующие исследования дополнены более детальным анализом зависимости вертикальных заплесков цунами от формы и параметров волны на входе в шельфовую зону, глубины шельфа и угла наклона берега.

**Математическая модель задачи.** Рассматривается плоская задача о распространении к берегу и накате на него ограниченной по горизонтальной ко-

ординате  $x$  длинной поверхностной волны без дисперсии. Бассейн схематически изображен на рис. 1. Волна входит в область  $0 \leq x \leq L$  через открытую левую границу  $x = 0$  и распространяется в бассейне переменной глубины  $H = H(x)$  по направлению к береговой черте  $x = L$ . Волна накатывается на плоский подводный откос с углом наклона дна к горизонту  $\alpha$  и движется вверх по сухому берегу в область  $x > L$ . Затем волна откатывается от берега и выходит из рассматриваемой области через открытую левую границу  $x = 0$ .



Р и с. 1. Схема шельфовой зоны с плоским береговым откосом

Цель данного исследования – рассмотреть на основе численных расчетов особенности распространения длинных волн различной формы на мелководье, включая их динамику в окрестности береговой черты с учетом движения по сухому берегу. Это позволяет дать количественные оценки максимальных подъемов и понижений свободной поверхности жидкости у берега и сравнить их значения для волн различной формы. Входящая волна на левой границе  $x = 0$  рассматриваемой области предполагается известной.

Для описания процесса распространения волны на шельфе и ее выхода на сухой берег воспользуемся нелинейной моделью длинных волн без дисперсии. Движение жидкости при  $x \geq 0$  описывается системой двух уравнений [16]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(Du)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $u(x, t)$  – горизонтальная скорость частиц жидкости;  $\zeta(x, t)$  – смещения свободной поверхности жидкости от невозмущенного горизонтального положения  $z = 0$ ;  $D(x, t) = H(x) + \zeta(x, t)$  – полная (динамическая) глубина жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения.

В качестве начальных условий для системы уравнений (1) примем

$$u = 0, \quad \zeta = 0 \quad (t = 0), \quad (2)$$

что означает отсутствие возмущений жидкости в области  $0 \leq x \leq L$ .

На левой границе  $x = 0$  зададим граничные условия

$$\zeta = \zeta_0(t), \quad u = \sqrt{\frac{g}{H_0}} \zeta_0 \quad (0 \leq t \leq T_0), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - C_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (t > T_0), \quad (4)$$

где  $C_0 = \sqrt{gH_0}$  – скорость распространения длинных волн в окрестности левой границы бассейна глубиной  $H_0$ ;  $T_0 = \lambda_0/C_0$  – длительность прохождения входящей волной точки  $x = 0$ . Условия (3) моделируют вход в расчетную область волны длиной  $\lambda_0$  путем задания при  $x = 0$  изменений со временем смещений свободной поверхности и скорости течения. Условие (4) является точным для распространяющихся линейных длинных волн в бассейне постоянной глубины, оно обеспечивает свободный выход отраженных волн из бассейна через левую границу [3, 4, 8, 9, 12].

На отрезке  $0 \leq x \leq L$  начально-краевая задача (1) – (4) решалась методом конечных разностей по явно-неявной схеме, как это описано в работах [9, 10, 17]. Для численного моделирования наката волны на сухой берег и ее отката был применен близкий к описанному в работах [9, 10] алгоритм, в котором используется замена плоского откоса ступенчатой функцией. В отличие от этих работ в нашем случае в области берегового откоса использовалась более мелкая расчетная сетка. В качестве граничных значений на левой свободной границе принимались смещения свободной поверхности жидкости и значения горизонтальной скорости, определенные с использованием грубой сетки.

Смещения поверхности жидкости  $\zeta_0(t)$  в граничных условиях (3) на жидкой границе  $x = 0$ , моделирующих входение в расчетную область гладкой волны высотой  $a_0$  и длиной  $\lambda_0$ , задавались двух типов:

$$\zeta_0(t) = \begin{cases} a_0 \sin^2(\pi C_0 t / \lambda_0), & 0 \leq t \leq T_0, \\ 0, & t \leq 0, t \geq T_0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\zeta_0(t) = \begin{cases} a_0 \sin^2(2\pi C_0 t / \lambda_0), & 0 \leq t \leq T_0 / 2, \\ -a_0 \sin^2[2\pi C_0 (t - T_0 / 2) / \lambda_0], & T_0 / 2 \leq t \leq T_0, \\ 0, & t \leq 0, t \geq T_0. \end{cases} \quad (6)$$

Волна (5) имеет постоянный знак и представляет собой одиночную волну повышения ( $a_0 > 0$ ) или понижения ( $a_0 < 0$ ), сосредоточенную на отрезке  $C_0 t - \lambda_0 \leq x \leq C_0 t$ . Формула (6) описывает модельную волну, включающую поднятие и понижение свободной поверхности. При  $a_0 > 0$  головная волна является волной повышения. При  $a_0 < 0$  знак волны изменяется на противоположный и первой в расчетную область через границу  $x = 0$  входит волна понижения.

**Результаты численного анализа наката волн на берег.** Рассмотрим бассейн, глубина которого изменяется по закону

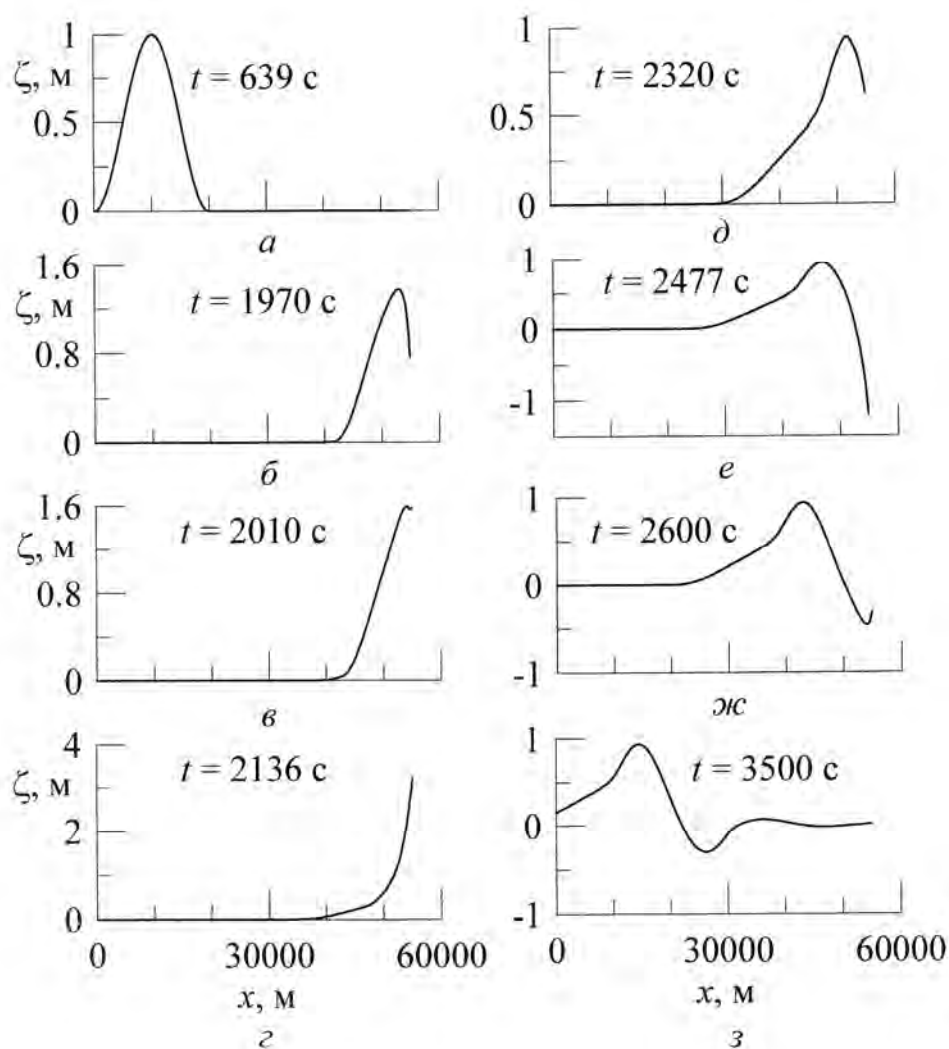
$$H = H_0 \quad (x < x_0), \quad H = H_0 - k(x - x_0) \quad (x \geq x_0), \quad (7)$$

где  $x = x_0$  – горизонтальная координата глубоководной границы берегового откоса;  $k = H_0/(L - x_0) = \text{tg } \alpha > 0$ . Распределение глубин (7) описывает шель-

фовую зону постоянной глубины  $H_0$ , переходящую в точке  $x_0$  в плоский береговой откос с береговой линией  $x = L$ .

При заданной по формулам (5) и (6) форме волны основными параметрами задачи являются глубина шельфа  $H_0$ , угол наклона берегового откоса  $\alpha$ , амплитуда  $a_0$  и длина  $\lambda_0$  входящей в расчетную область поверхностной волны.

Трансформация волн различной формы при накате на берег. Рассмотрим изменение формы волн (5) и (6) при накате и откате от наклонного берега без обрушения.

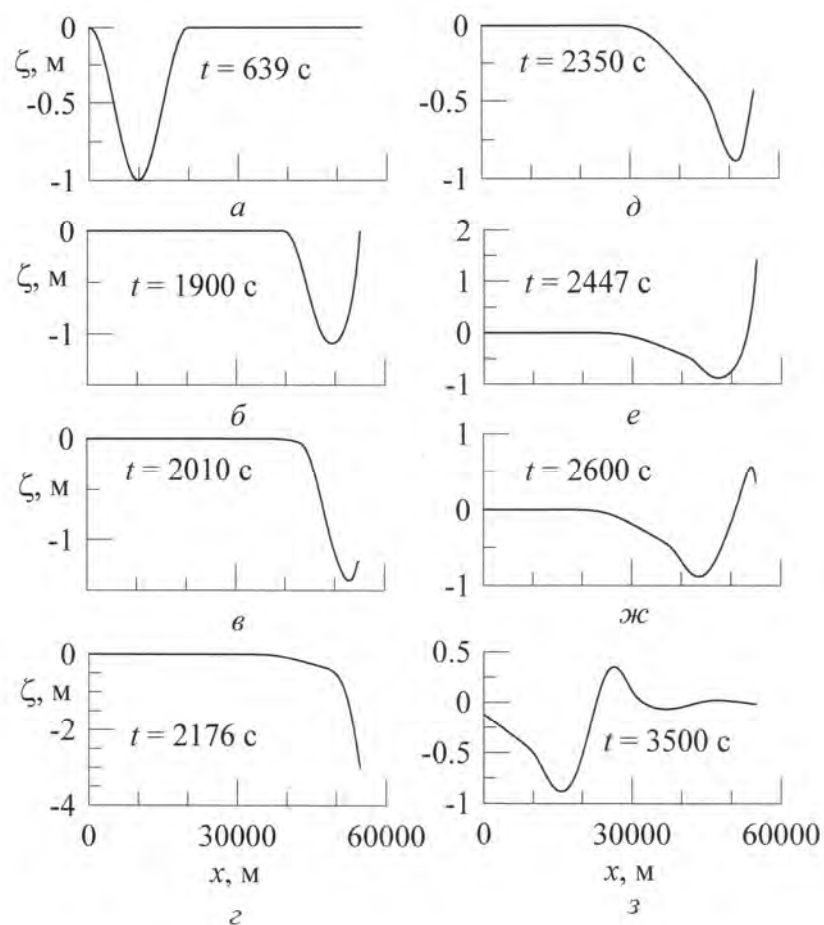


**Р и с. 2.** Трансформация волны повышения высотой  $a_0 = 1$  м и длиной  $\lambda_0 = 20$  км при распространении к берегу (а), накате (б – г) и откате от него (д – з)

Характер трансформации одиночной волны повышения показан на рис. 2. При достижении длинной волной подводного склона ее форма начи-

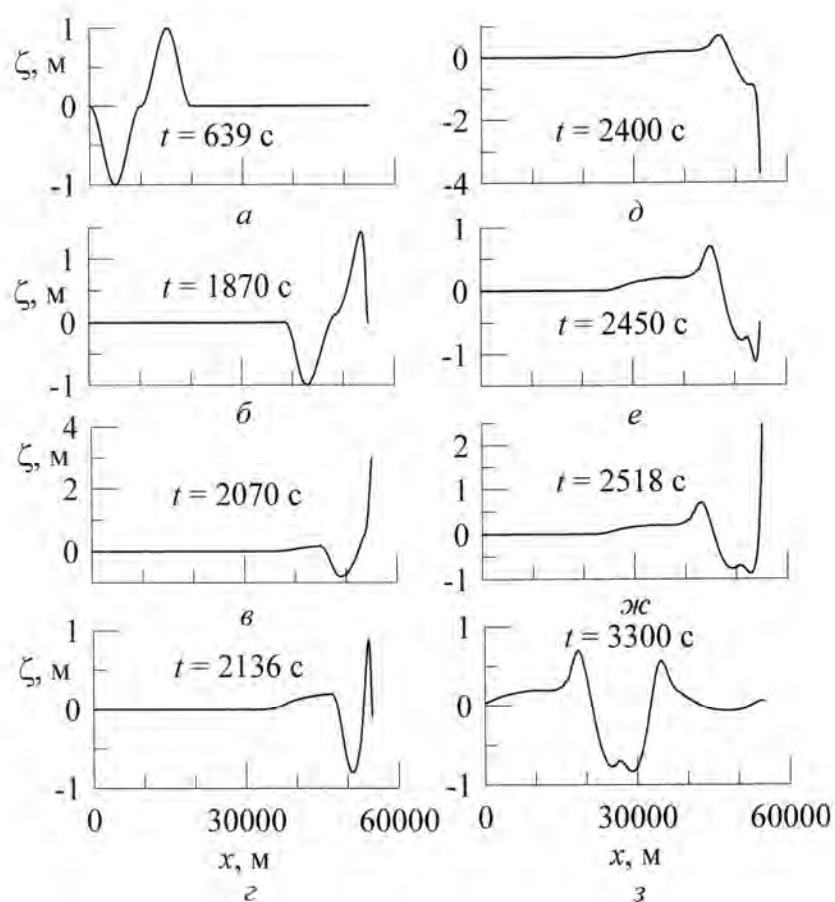
нает изменяться вследствие уменьшения глубины бассейна и нелинейности волнового процесса. Трансформация исходной волны на начальной стадии наката (рис. 2, б) выражается в увеличении ее высоты и сжатии, а также в усилении асимметрии, при которой передний склон волны становится более крутым, чем задний. Стадию наката волны на наклонный берег без обрушения иллюстрируют профили волн на рис. 2, б – з.

После максимального подъема уровня вдоль наклонного берега (рис. 2, з), когда заплеск волны превышает  $3a_0$ , начинается откат волны (рис. 2, д). Он выражается в осушении берега (рис. 2, е) и образовании (рис. 2, ж, з) отраженной знакопеременной волны. Таким образом, в рассматриваемом случае знакопостоянная волна повышения (рис. 2, а) трансформируется в знакопеременную (рис. 2, з), что характерно для процесса отражения волн от наклонных берегов [3, 4]. Профиль волны на рис. 2, з подтверждает правильность описания с помощью краевого условия (4) свободного выхода волны из расчетной области.



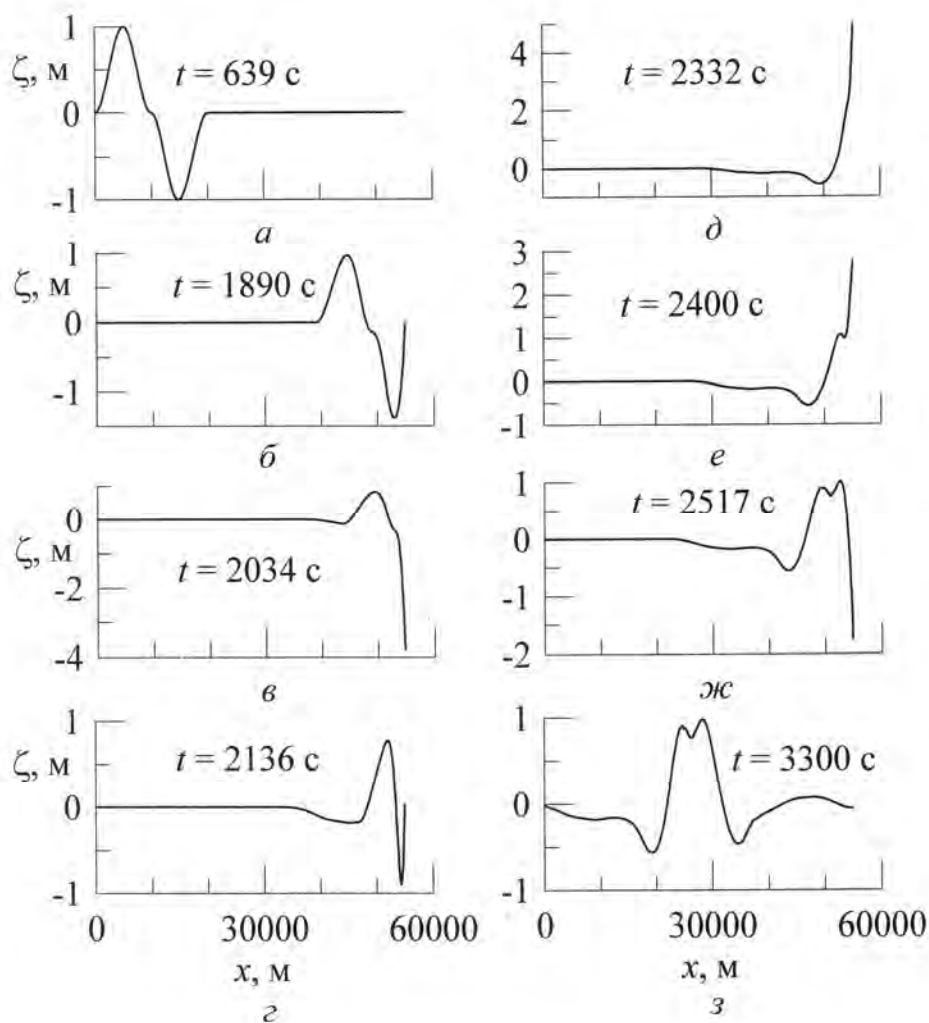
**Р и с. 3.** Трансформация волны понижения высотой  $a_0 = -1$  м и длиной  $\lambda_0 = 20$  км при распространении к берегу (а), накате (б – з) и откате от него (д – з)

Рис. 3, *а* иллюстрирует распространение и накат на наклонный берег одиночной волны понижения. При достижении глубоководной части подводного склона волна начинает трансформироваться, при этом передний склон ложбины становится круче заднего (рис. 3, *б*). В бассейне постоянной глубины наблюдается иная трансформация волны понижения, обусловленная нелинейностью длинных волн: в процессе эволюции депрессии увеличивается крутизна заднего склона впадины. Тем самым при движении волны понижения над откосом доминирующим фактором является уменьшение глубины бассейна. Начальная стадия взаимодействия волны понижения с наклонным берегом – движение уреза воды вниз, сопровождающееся осушением берега (рис. 3, *в, г*). Максимальная глубина впадины почти в три раза превышает начальную высоту волны. Далее происходит подъем свободной поверхности и движение уреза воды вверх (рис. 3, *д, е*), а затем вниз (рис. 3, *ж*) с образованием знакопеременной отраженной волны (рис. 3, *з*) с головной волной понижения.



**Рис. 4.** Трансформация знакопеременной волны высотой  $a_0 = 1$  м и длиной  $\lambda_0 = 20$  км с головной волной повышения при распространении к берегу (*а*), взаимодействии с наклонным берегом (*б – ж*) и откате от него (*з*)

Процесс взаимодействия знакопеременной волны с берегом, включающий этапы повышения и понижения свободной поверхности, более сложен (рис. 4, 5). Трансформация формы свободной поверхности жидкости при накате на берег гребня или впадины знакопеременной волны качественно напоминает трансформацию соответствующих одиночных волн. Максимальные подъемы и понижения уровня моря вдоль склона могут превышать исходную высоту волны более чем в три раза (рис. 4, в и 5, в). В результате отражения от берега формируется знакопеременная волна (рис. 4, з и 5, з), имеющая большее число гребней, чем в случае падающих на берег одиночных поверхностей волн различных знаков.

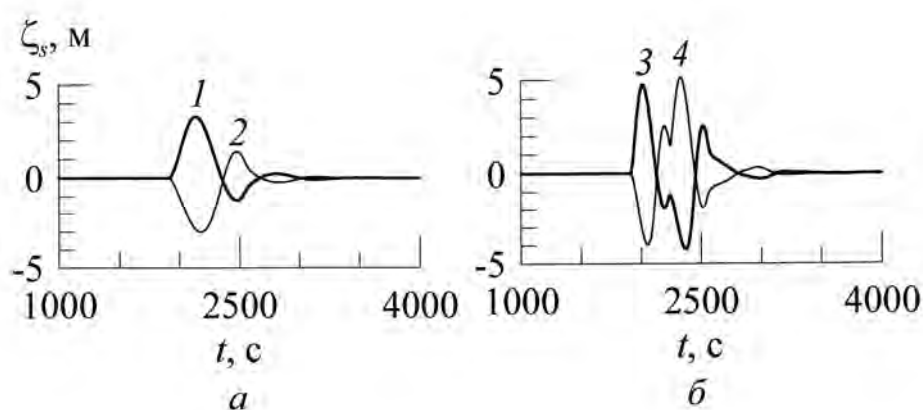


**Р и с. 5.** Трансформация знакопеременной волны высотой  $a_0 = -1$  м и длиной  $\lambda_0 = 20$  км с головной волной понижения при распространении к берегу (а), взаимодействии с наклонным берегом (б – ж) и откате от него (з)

Колебания уреза воды. Для плоского наклонного берега горизонтальные  $x_s = x - L$  и вертикальные  $\zeta_s$  смещения береговой черты от положения равновесия ( $x = L, \zeta_s = 0$ ) связаны прямо пропорциональной зависимостью

$$\zeta_s = kx_s, k = \operatorname{tg} \alpha.$$

На рис. 6 показаны типичные изменения со временем вертикальных смещений береговой черты при накате на берег знакопостоянных (рис. 6, *a*) и знакопеременных (рис. 6, *б*) поверхностных волн. Положительные значения  $\zeta_s$  соответствуют накату волны на сухой берег, отрицательные – откату волны от берега с осушением прибрежного участка дна бассейна. Накат одиночной волны повышения (понижения) характеризуется первоначальным накатом (откатом) и последующим откатом (накатом) волны. В результате отражения образуется знакопеременная волна [3, 4, 7]. Взаимодействие с берегом знакопеременной волны, включающей гребень и впадину, сопровождается несколькими подъемами или понижениями уреза воды [7].

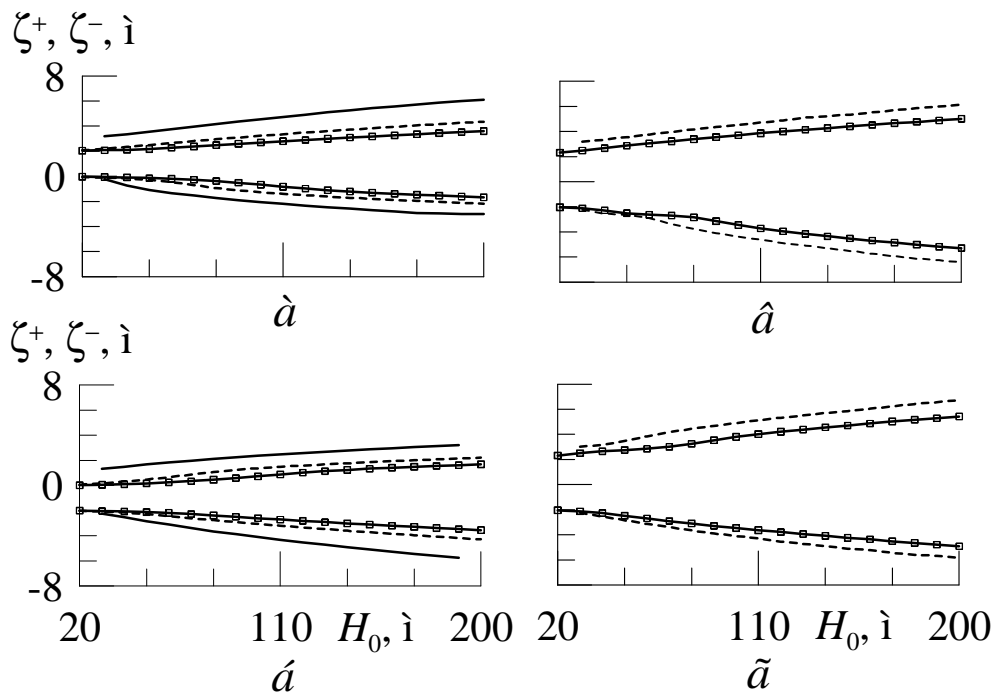


**Р и с. 6.** Вертикальные колебания уреза воды при накате на берег ( $\operatorname{tg} \alpha = 0,02$ ) одиночных (*a*) и знакопеременных (*б*) поверхностных волн длиной  $\lambda_0 = 20$  км: 1 – (5),  $a_0 = 1$  м; 2 – (5),  $a_0 = -1$  м; 3 – (6),  $a_0 = 1$  м; 4 – (6),  $a_0 = -1$  м

Амплитудные характеристики колебаний уреза воды. Максимальный подъем боковой границы жидкости вдоль наклонного берега при накате волны (вертикальный заплеск) обозначим через  $\zeta^+$ . Крайнее нижнее положение уреза воды в процессе отражения волны обозначим как  $\zeta^-$ . Эти величины являются наиболее важными динамическими характеристиками интенсивности цунами у берега, они позволяют оценивать уровень цунамиопасности морского побережья.

При заданных по формулам (5), (6) и (7) форме волны и рельефе дна значения  $\zeta^\pm$  зависят от высоты  $a_0$  и длины  $\lambda_0$  волны на входе в шельфовую зону, глубины шельфовой зоны  $H_0$  и угла наклона  $\alpha$  берегового откоса к горизонту. В соответствии с рис. 7 уменьшение начальной длины волны и/или увеличение глубины шельфа приводят к увеличению максимальных вертикальных подъемов и модуля понижений уреза воды при ее движении вдоль наклонной боковой границы.





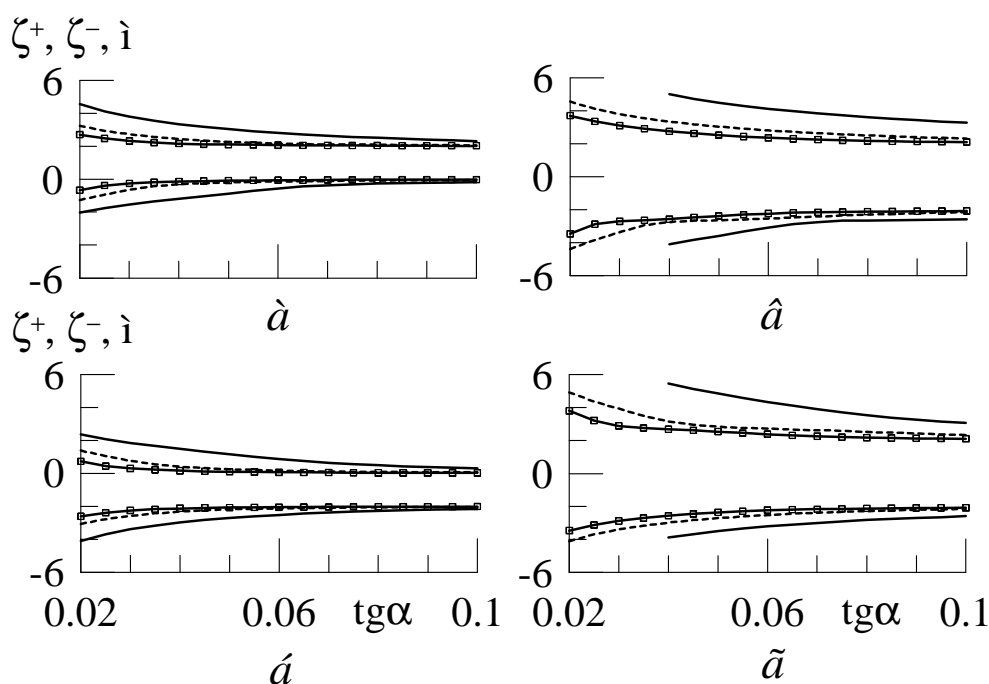
**Р и с. 7.** Зависимости от глубины шельфа  $H_0$  максимальных подъемов ( $\zeta^+ > 0$ ) и понижений ( $\zeta^- < 0$ ) уреза воды при накате на берег ( $\text{tg}\alpha = 0,02$ ) знакопостоянных (5) и знакопеременных (6) волн длиной  $\lambda_0 = 10$  км (—),  $\lambda_0 = 20$  км (---),  $\lambda_0 = 30$  км (-□-): а - (5),  $a_0 = 1$  м; б - (5),  $a_0 = -1$  м; в - (6),  $a_0 = 1$  м; г - (6),  $a_0 = -1$  м

На рис. 7, в, г отсутствуют кривые для наиболее коротких знакопеременных волн ( $\lambda_0 = 10$  км), что обусловлено их обрушением при накате или откате от берега. Уменьшение длины при постоянной высоте волны фактически означает рост крутизны склонов отдельных волн. Поэтому увеличение крутизны набегающих волн вызывает рост максимальных подъемов и понижений уреза воды при движении волны вдоль берегового откоса. Этот вывод ранее был получен в работе [18].

Сравнение абсолютных значений максимальных подъемов и понижений уровня воды у берега показывает, что  $\zeta^+$  значительно превышают  $|\zeta^-|$  в случае наката на берег одиночных волн повышения. При накате на берег волны понижения наблюдается противоположный эффект:  $|\zeta^-|$  значительно превышает  $\zeta^+$ .

Зависимости  $\zeta^\pm$  от длины волны на входе в шельфовую зону и крутизны берегового откоса  $k = \text{tg}\alpha$  показаны на рис. 8. Уменьшение начальной длины волны и/или уклонов дна приводит к увеличению как максимальных заплесков, так и максимальных понижений уровня воды у наклонной боковой границы бассейна. Аналогичный вывод получен в работах [2 – 5, 12, 19]. Для крутых береговых откосов (угол  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ ) вертикальный заплеск волн близок к удвоенной высоте  $2a_0$  падающей волны на подходе к берегу. Как показывает рис. 8, с ростом крутизны дна  $k$  ( $\alpha = 1,1 - 5,7^\circ$ ) максимальные вертикальные смещения уреза воды от равновесного положения убывают. Зависимость

$\zeta^+$  от длины волны наиболее существенна для коротких (крутых) волн и выражается в уменьшении  $\zeta^+$  с ростом  $\lambda_0$ . При малых глубинах шельфа (рис. 7, *a, б*) и больших уклонах дна (рис. 8, *a, б*) отраженные от берега волны повышения или понижения свободной поверхности жидкости фактически являются знакопостоянными, а не знакопеременными (рис. 6, *a*).



**Р и с. 8.** Зависимости от крутизны берега максимальных подъемов ( $\zeta^+ > 0$ ) и понижений ( $\zeta^- < 0$ ) уреза воды при накате на берег знакопостоянных (5) и знакопеременных (6) волн длиной  $\lambda_0 = 10$  км (—),  $\lambda_0 = 20$  км (---),  $\lambda_0 = 30$  км (-□-): *a* – (5),  $a_0 = 1$  м; *б* – (5),  $a_0 = -1$  м; *в* – (6),  $a_0 = 1$  м; *г* – (6),  $a_0 = -1$  м

В соответствии с рис. 7 и 8 при накате знакопостоянных и знакопеременных волн на наклонный берег может происходить увеличение высоты волны в несколько раз.

**Основные выводы.** Нелинейная модель длинных волн без дисперсии применена для численного анализа одномерного наката волн на плоский наклонный берег. Использована явно-неявная конечно-разностная аппроксимация уравнений математической модели. Численная процедура позволяет описать движение жидкости вверх по сухому наклонному берегу и осушение дна бассейна при откате волны. Выполненные расчеты позволили дополнить предшествующие исследования более детальным анализом зависимости процессов наката и отката волн от формы и параметров падающей волны, глубины шельфа и угла наклона берегового откоса.

Показано, что вертикальный заплеск волны зависит от ее формы, высоты и длины на внешней границе шельфа, глубины шельфовой зоны и угла на-

клона берега. Форма волны существенно влияет на характер колебаний уреза воды, а в результате – на величины вертикальных заплесков и максимальных понижений уровня моря у берега. Увеличение высоты волны и глубины шельфовой зоны, уменьшение длины волны и угла наклона берега приводят к росту как вертикальных заплесков волн, так и модулей максимальных понижений уровня моря. Для крутых берегов вертикальный заплеск близок к удвоенной высоте падающей на берег волны. При накате одиночной волны на пологий берег может происходить подъем уровня на берегу, превышающий исходную высоту волн в три раза и более. В случае коротких и относительно высоких волн, а также при достаточно малых углах наклона берега может происходить обрушение нелинейных волн.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carrier G.F., Greenspan H.P.* Water waves of finite amplitude on a sloping beach // *J. Fluid Mech.* – 1958. – 4, № 1. – P. 97 – 109.
2. *Synolakis C.E.* The runup of solitary waves // *Ibid.* – 1987. – 185. – P. 523 – 545.
3. *Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н.* Длинноволновая динамика прибрежной зоны. – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 272 с.
4. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. – 276 с.
5. *Yen H., Liu Ph., Synolakis C.* Long-wave runup models. – Singapore: World Scientific Publication, 1996. – 403 p.
6. *Massel S.R., Pelinovsky E.N.* Run-up of dispersive and breaking waves on beaches // *Oceanologia.* – 2001. – 43, № 1. – P. 61 – 97.
7. *Carrier G.F., Wu T.T., Yeh H.* Tsunami run-up and draw-down on a plane beach // *J. Fluid Mech.* – 2003. – 475. – P. 79 – 99.
8. *Шокин Ю.И., Чубаров Л.Б., Марчук Ан.Г., Симонов К.В.* Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. – Новосибирск: Наука, 1989. – 167 с.
9. *Kowalik Z.* Basic relations between tsunamis calculations and their physics // *Sci. Tsun. Hazar.* – 2001. – 19, № 2. – P. 99 – 115.
10. *Marchuk An.G., Anisimov A.A.* A method for numerical modeling of tsunami run-up on the coast of arbitrary profile // *ITS 2001 Proceedings. Session 7.* – 2001. – № 7 – 27. – P. 933 – 940.
11. *Федотова З.И., Чубаров Л.Б.* Численное моделирование наката цунами // Тр. Международной конференции RDAMM-2001. – 2001. – 6, ч. 2. Спец. выпуск. – С. 380 – 396.
12. *Доценко С.Ф.* Накат одиночной волны цунами на наклонный берег // *Морской гидрофизический журнал.* – 2005. – № 4. – С. 11 – 17.
13. *Кононкова Г.Е., Показеев К.В.* Динамика морских волн. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 298 с.
14. *Chanson H., Aoki S.-i., Maruyama M.* An experimental study of tsunami runup on dry and wet horizontal coastlines // *Sci. Tsun. Hazar.* – 2003. – 20, № 5. – P. 278 – 293.
15. *Grilli St.T., Gilbert R.W., Lubin P. et al.* Numerical modeling and experiments for solitary wave shoaling and breaking over a sloping beach // *Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Offshore and Polar Engineering Conference.* – Toulon, France, 2004. – 7 p.
16. *Стокер Дж.Дж.* Волны на воде. – М.: Иностранная лит-ра, 1959. – 618 с.
17. *Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В.* Основные океанологические задачи теории мелкой воды. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. – 300 с.

18. Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н. Накат длинных волн на берег: влияние формы подходящей волны // *Океанология*. – 2008. – 48, № 1. – С. 5 – 10.
19. Li Y., Raichlen F. Non-breaking and breaking solitary wave run-up // *J. Fluid Mech.* – 2002. – 456. – P. 295 – 318.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
Севастополь  
E-mail: sf\_dotsenko@mail.ru

Материал поступил  
в редакцию 14.09.09  
После доработки 12.10.09

**АНОТАЦІЯ** У довгохвильовому наближенні виконаний чисельний аналіз плоскої задачі про накат хвиль різної форми на похилий берег. Розглянута трансформація форми хвиль при затопленні берега та їх подальшому відкаті. Проведено дослідження залежності максимальних підвищень і понижень рівня моря від параметрів хвилі при підході до берега, глибини шельфу і кута нахилу дна. Показано, що форма хвилі впливає на амплітудні характеристики коливань урізання води. Вертикальні накати на похилий берег можуть у декілька разів перевищувати висоту хвилі на вході в шельфову зону.

**Ключові слова:** хвилі нелінійні, накат хвиль на берег, довгі хвилі, плоска задача, чисельне моделювання.

**ABSTRACT** Numerical analysis of one-dimensional run-ups of the waves of various forms on to a sloping beach is carried out within the framework of the long-wave theory. Transformation of a wave shape during the beach flooding and its following drying is considered. Dependencies of maximum elevation and lowering of the sea level upon the wave parameters at its approaching the beach, the shelf depth and the angle of the bottom slope are investigated. It is shown that the wave shape influences the amplitude characteristics of the shoreline oscillations. Vertical run-ups of the waves on to the sloping beach can exceed the wave height on the shelf zone boundary by a few times.

**Keywords:** Non-linear waves, wave run-up on the coast, long waves, plane problem, numerical modeling.