

Прогрессивные внутренние волны в двухслойном течении с вертикальным сдвигом скорости

В линейной постановке рассмотрена плоская задача о прогрессивных внутренних гравитационных волнах в течении двухслойной жидкости с вертикальным сдвигом скорости. Для нескольких модельных распределений скорости течения найдены аналитические решения задачи. Описаны возможные типы внутренних волн, условия их блокировки и критерии устойчивости волн, зависящие от вертикальной структуры течений. Показано, что распределение скорости фонового течения влияет на количество генерируемых волн, направления их распространения и условия блокировки. Скачок скорости течения на границе раздела слоев увеличивает количество точек блокировки и приводит к ограничению диапазона возможных частот внутренних волн. Для течений с разрывом распределения скорости на границе раздела слоев найдены кривые нейтральной устойчивости прогрессивных внутренних волн. Показано, что область устойчивости течения сужается при уменьшении относительного перепада плотности между слоями и увеличении скачка скорости фонового течения.

Ключевые слова: течения с вертикальным сдвигом скорости, двухслойная жидкость, линейные внутренние волны, волны прогрессивные, устойчивость волн, аналитические решения.

Введение. Перечень задач, связанных с динамикой внутренних волн в течениях с вертикальным сдвигом скорости, достаточно обширен. Учет сдвиговых течений, скорости которых соизмеримы со скоростями распространения внутренних волн, необходим при моделировании распространения внутренних волн в модельных и реальных бассейнах [1 – 4]. Анализ условий усиления внутренних волн в сдвиговых течениях непосредственно связан с решением двух взаимосвязанных задач [2, 5 – 9]: определением критериев устойчивости таких течений и нахождением условий роста амплитуд внутренних волн. Сдвиговые течения влияют на кинематику и динамику вынужденных внутренних волн, например, они вызывают изменения структуры бароклинных волновых следов за движущимися возмущениями [10 – 12].

Первая работа, показавшая существенное влияние переменных по глубине течений на динамику внутренних волн в двухслойных потоках, выполнена Г. Гельмгольцем [1, 13]. Во многих случаях в моделях задавались многослойные распределения плотности и линейные (постоянный сдвиг скорости) или кусочно-линейные распределения горизонтальной скорости течения по вертикали.

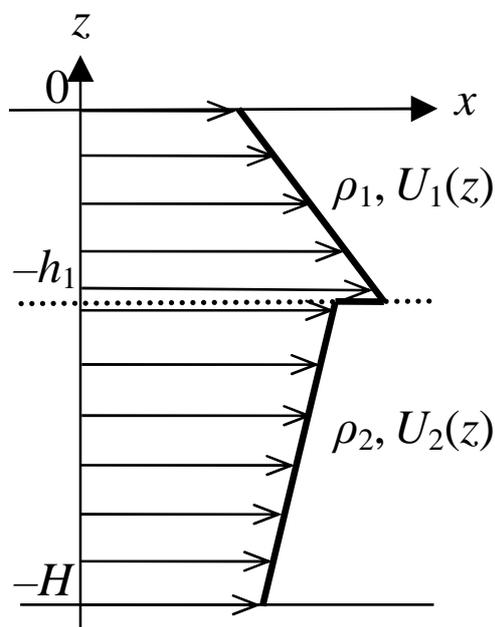
Двухслойное распределение плотности (простейшая аппроксимация вертикальной плотностной стратификации океана [1, 2]) в зависимости от положения границы раздела и перепада плотности между слоями позволяет моделировать сезонный или основной пикноклины. Задание в слоях горизонтальных сдвиговых течений приводит к простейшей модели стратифицированного течения с вертикальным сдвигом скорости. Такая модель используется в настоящей статье для анализа простых прогрессивных внутренних волн в сдвиговых течениях.

Ниже для нескольких типов вертикальных распределений скорости течения в двухслойной жидкости конечной глубины найдены аналитические решения задачи о прогрессивных внутренних волнах, дисперсионные зависимости для внутренних волн и на их основе определены возможные типы бароклинных волн, условия их существования, направления распространения, блокировки и критерии возникновения неустойчивых волновых режимов. Ранее характеристики стационарных внутренних волн в двухслойном сдвиговом течении рассматривались в работах [14 – 16] и др.

Математическая постановка задачи. В вертикальной плоскости Oxz , где x – горизонтальная, z – вертикальная координата, рассматривается горизонтальный поток $(U(z), 0)$ идеальной несжимаемой двухслойной жидкости постоянной глубины H . Толщины слоев h_1 и h_2 постоянны, скорость течения

$$U = U_1(z) \quad (-h_1 \leq z \leq 0), \quad U = U_2(z) \quad (-H \leq z \leq -h_1),$$

плотность верхнего слоя равна ρ_1 , нижнего – ρ_2 , $H = h_1 + h_2$ (рис. 1). Распределение скорости течения по z может быть как непрерывным, так и претерпевать разрыв первого рода при пересечении границы раздела слоев $z = -h_1$.



Р и с. 1. Схема задачи

В рамках линейной теории исследуем в таком сдвиговом течении возможные внутренние прогрессивные волны. Воспользуемся приближением «твердой крышки», заменяя свободную поверхность твердой горизонтальной плоскостью. Оно отфильтровывает поверхностные волны без существенного искажения внутренних [1, 2].

Нестационарные внутренние волны в двухслойном течении идеальной жидкости, занимающем область $-\infty < x < +\infty$, $-H < z < 0$, описываются сис-

темой из шести линеаризованных относительно среднего течения ($U(z)$, 0) уравнений с зависящими от вертикальной координаты z коэффициентами:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} + \frac{dU_j}{dz} \bar{w}_j = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial x} \quad (j=1, 2), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_j}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где $\bar{u}_j(x, z, t)$ – малые возмущения горизонтальной скорости потока в верхнем ($j = 1$) и нижнем ($j = 2$) слоях; $\bar{w}_j(x, z, t)$ – вертикальная скорость; $\bar{p}_j(x, z, t)$ – динамические возмущения гидростатического давления жидкости.

Систему уравнений (1) – (3) необходимо дополнить граничными условиями. На невозмущенной поверхности жидкости $z = 0$ и дне бассейна $z = -H$ при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и $t \geq 0$ должны выполняться условия скольжения (непротекания) жидкости:

$$\bar{w}_1 = 0 \quad (z = 0) \quad , \quad \bar{w}_2 = 0 \quad (z = -H). \quad (4)$$

На границе раздела слоев $z = -h_1$ задаются два условия согласования решений в слоях – кинематическое и динамическое. Первое условие

$$\bar{w}_1(-h_1) = \tilde{\theta} \bar{w}_2(-h_1), \quad (5)$$

в котором

$$\tilde{\theta} = \frac{\zeta_t + U_1(-h_1)\zeta_x}{\zeta_t + U_2(-h_1)\zeta_x},$$

вытекает из двух линеаризованных кинематических соотношений

$$\bar{w}_{1,2} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U_{1,2}(-h_1) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (z = -h_1) \quad (6)$$

на границе раздела слоев, где $\zeta(x, t)$ – смещение скачка плотности от горизонтального положения $z = -h_1$. Динамическое условие означает непрерывность при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и $t \geq 0$ полного давления жидкости при пересечении границы раздела слоев $z = -h_1$:

$$\bar{p}|_{z=-h_1+0} - \rho_1 g \zeta = \bar{p}|_{z=-h_1-0} - \rho_2 g \zeta, \quad (7)$$

где g – ускорение свободного падения.

Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим прогрессивные внутренние волны вида

$$\{\bar{u}_j, \bar{p}_j, \zeta\} = \{u_j(z), p_j(z), a\} \cos(kx - \sigma t), \quad \bar{w}_j = w_j(z) \sin(kx - \sigma t), \quad (8)$$

где k и σ – волновое число и частота волны, связанные между собой подлежащим нахождению дисперсионным соотношением; u_j, w_j, p_j – неизвестные амплитудные функции; a – неизвестная амплитуда смещений скачка плотности. Подстановка выражений (8) в (1) – (5), (7) и исключение из полученных соотношений всех неизвестных функций, кроме $w_{1,2}$, приводят к краевой задаче для нахождения собственных значений $\sigma = \sigma(k)$ и соответствующих им распределений по z амплитудных функций полей вертикальной скорости в слоях:

$$w_1'' - [k^2 + \alpha_1(z)]w_1 = 0 \quad (-h_1 < z < 0), \quad (9)$$

$$w_2'' - [k^2 + \alpha_2(z)]w_2 = 0 \quad (-H < z < -h_1), \quad (10)$$

$$w_1(0) = 0, \quad (11)$$

$$w_1(-h_1) = \theta w_2(-h_1), \quad w_2'(-h_1) - \eta w_2(-h_1) - \gamma \theta w_1'(-h_1) = 0, \quad (12)$$

$$w_2(-H) = 0, \quad (13)$$

где штрих означает производную по вертикальной координате z ;

$$\alpha_j = \frac{U_j''(z)}{U_j(z) - c},$$

$$\eta = \frac{\varepsilon g}{[U_2(-h_1) - c]^2} + \frac{U_2'(-h_1) - \gamma \theta U_1'(-h_1)}{U_2(-h_1) - c}, \quad \theta = \frac{U_1(-h_1) - c}{U_2(-h_1) - c},$$

$\gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\varepsilon = 1 - \gamma$; $c = \frac{\sigma}{k}$ – фазовая скорость внутренней волны. При $c > 0$ волна распространяется вправо, при $c < 0$ – влево.

Внутренние волны в сдвиговых течениях с модельными распределениями скорости по глубине. Рассмотрим несколько вертикальных распределений горизонтальной скорости двухслойного течения, для которых решение задачи (9) – (13) может быть найдено аналитическими методами.

Введем обозначения: $U_{00} = U_1(0)$ – скорость течения на верхней границе двухслойной жидкости; $U_{10} = U_1(-h_1)$ – скорость течения на нижней границе верхнего слоя; $U_{11} = U_2(-h_1)$ – скорость течения на верхней границе нижнего слоя; $U_{22} = U_2(-H)$ – скорость течения на дне бассейна.

Пусть распределения скорости сдвигового течения в слоях удовлетворяют условиям $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv 0$. Уравнения (9) и (10) имеют постоянные коэффициенты, что позволяет найти аналитическое решение в виде

$$\begin{aligned} \{u_1; w_1\} &= -\frac{A\theta}{\operatorname{sh}kh_1} \{\operatorname{ch}kz; \operatorname{sh}kz\}, \\ \{u_2; w_2\} &= \frac{A}{\operatorname{sh}kh_2} \{\operatorname{ch}k(z+H); \operatorname{sh}k(z+H)\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$a = -\frac{A}{kU_{11} - \sigma};$$

A – произвольная константа. Волновое число k и частота волны σ должны удовлетворять трансцендентному уравнению

$$ka_2 + \gamma\theta^2 ka_1 = \eta,$$

где $a_j = \text{cth}kh_j$. Из этого уравнения находим пару дисперсионных зависимостей

$$\sigma = \frac{\mu + (\gamma a_1 U_{10} + a_2 U_{11})k \pm \sqrt{\Delta}}{\gamma a_1 + a_2}, \quad (15)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2}[\gamma U_1'(-h_1) - U_2'(-h_1)], \quad \delta = U_{10} - U_{11},$$

$$\Delta = \mu^2 + \{\varepsilon g(\gamma a_1 + a_2) - \gamma \delta [a_1 U_2'(-h_1) + a_2 U_1'(-h_1)]\}k - \gamma a_1 a_2 \delta^2 k^2.$$

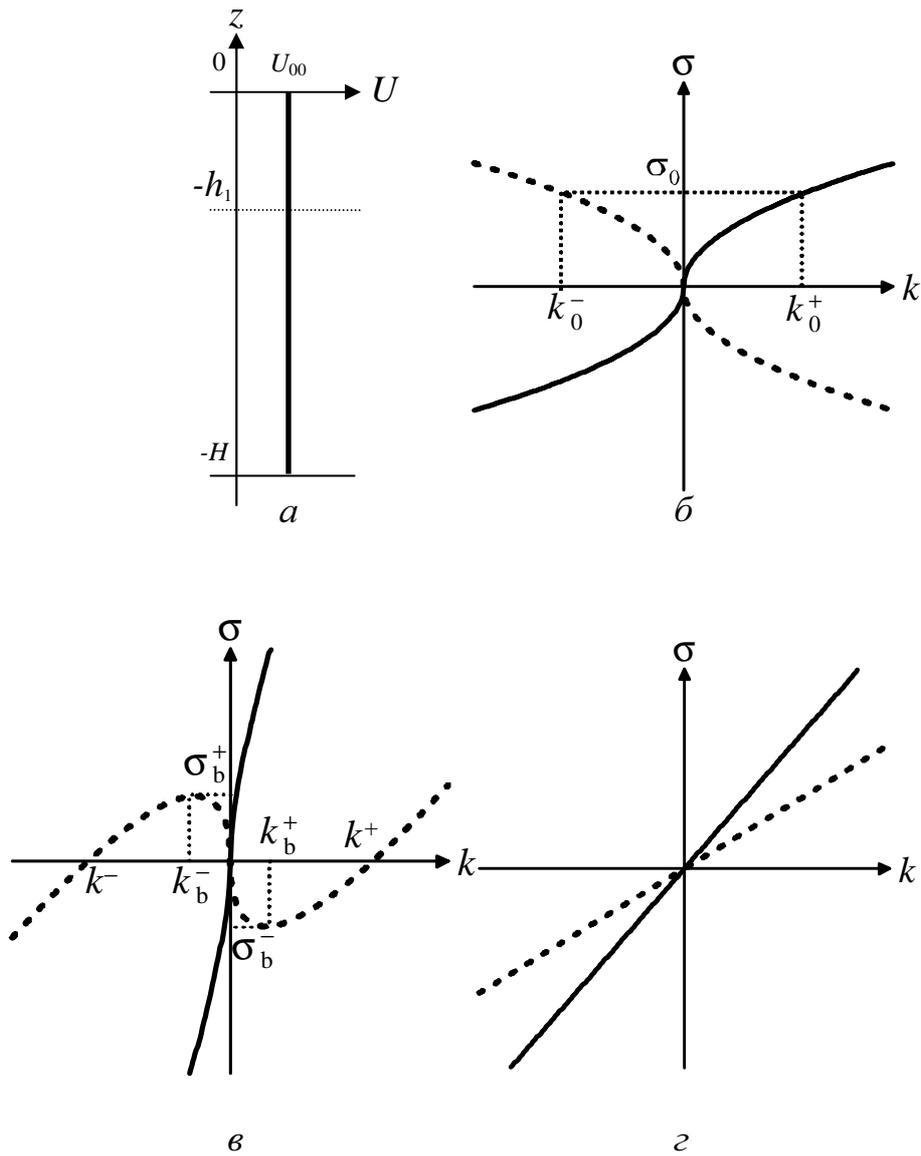
Условия $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv 0$ выполняются для течений с кусочно-постоянными и кусочно-линейными распределениями скорости. Простейшие из них рассмотрены ниже.

Течение с постоянной скоростью по глубине. В этом случае $U_{1,2}(z) \equiv U_{00} \geq 0$ (рис. 2, а). Дисперсионные соотношения (15) принимают вид

$$\sigma = kU_{00} \pm \sqrt{\Delta_0(k)}, \quad \Delta_0 = \frac{\varepsilon g k}{\gamma a_1 + a_2}. \quad (16)$$

Если фоновое течение отсутствует ($U_{00} = 0$), то дисперсионная зависимость $\sigma = \sigma(k)$ представляет собой две кривых, вдоль каждой из которых групповая скорость внутренних волн $c_g = d\sigma(k)/dk$ сохраняет свой знак (рис. 2, б). Для заданной частоты волны σ_0 уравнение $\sigma_0 = \sigma(k)$ имеет два корня $k = k_0^\pm$ ($k_0^- = -k_0^+$), которым соответствуют прогрессивные волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

При $U_{00} \neq 0$ вид дисперсионных кривых изменяется. Если $U_{00} < \sqrt{\varepsilon g/s}$, где $s = \gamma/h_1 + 1/h_2$, на дисперсионной кривой существуют точки экстремума – так называемые точки блокировки волн (k_b^-, σ_b^+) и (k_b^+, σ_b^-) , в которых групповая скорость $c_g = 0$, т. е. отсутствует передача волновой энергии (рис. 2, в). При таких параметрах может происходить резонансный рост высоты внутренней волны. В режимах блокировки волны распространяются против течения ($c < 0$). Для описания подобных режимов необходимо рассмотрение волн в рамках более сложных моделей, а именно, нелинейных или учитывающих диссипацию энергии волнового поля.



Р и с. 2. Течение без сдвига скорости (а) и дисперсионные кривые в случаях $U_{00} = 0$ (б), $U_{00} < \sqrt{eg/s}$ (в) и $U_{00} > \sqrt{eg/s}$ (г)

При $\sigma < \sigma_b^-$ и $\sigma > \sigma_b^+$ уравнение $\sigma_0 = \sigma(k)$ имеет два корня одного знака. Для таких частот в жидкости возможны две внутренних волны, распространяющиеся вниз по течению ($c > 0$).

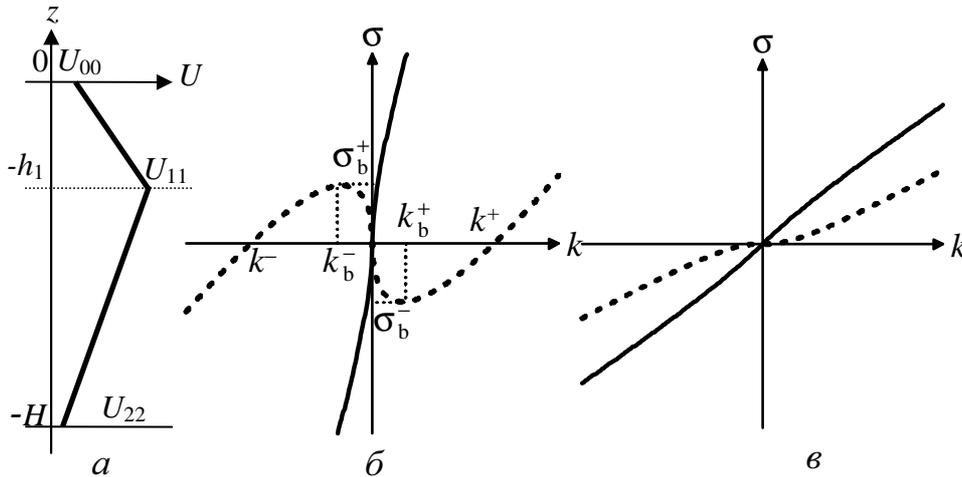
Если частота волны лежит в диапазоне $\sigma_b^- < \sigma < \sigma_b^+$, в жидкости могут существовать четыре прогрессивных внутренних волны, две из которых распространяются вниз по течению, а остальные – против течения.

При $U_{00} > \sqrt{\varepsilon g / s}$ точки экстремума отсутствуют и дисперсионные кривые представляют собой две возрастающие функции (рис. 2, з). Для заданной частоты волны σ_0 уравнение $\sigma_0 = \sigma(k)$ имеет два корня по k одного знака, которым соответствуют прогрессивные волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x .

Течение с непрерывным распределением скорости, являющимся линейным в каждом слое. В этом случае (рис. 3, а)

$$U_1(z) = d_1 z + U_{00} \quad (-h_1 \leq z \leq 0), \quad U_2(z) = d_2(z + h_1) + U_{11} \quad (-H \leq z \leq -h_1), \quad (17)$$

где постоянные сдвиги скорости $d_1 = (U_{00} - U_{11})/h_1$, $d_2 = (U_{11} - U_{22})/h_2$.



Р и с. 3. Сдвиговое течение с непрерывным кусочно-линейным распределением скорости (а) и возможные дисперсионные зависимости для внутренних волн (б, в)

Дисперсионные соотношения для внутренних волн находятся из (15):

$$\sigma = kU_{11} + \frac{\mu \pm \sqrt{\Delta_1(k)}}{(\gamma a_1 + a_2)}, \quad (18)$$

$$\Delta_1 = \mu^2 + \varepsilon g (\gamma a_1 + a_2) k, \quad \mu = (d_2 - \gamma d_1) / 2.$$

Поведение дисперсионных кривых качественно аналогично предыдущему случаю, т. е. при $U_{11} < (\sqrt{\Delta_1(0)} - \mu) / s$ существуют две точки блокировки волн $k = k_b^\pm$, а волны с волновыми числами k из диапазона $k_b^- < k < k_b^+$ с соответствующими частотами для дисперсионной зависимости, обозначенной штриховой линией на рис. 3, б, распространяются вверх по потоку ($c < 0$) и переносят энергию в этом же направлении ($c_g < 0$). Случай $U_{11} > (\sqrt{\Delta_1(0)} - \mu) / s$ соответствует дисперсионным кривым без точек блокировки (рис. 3, в).

Перейдем к рассмотрению внутренних волн в течениях с разрывами вертикального распределения скорости на границе раздела слоев.

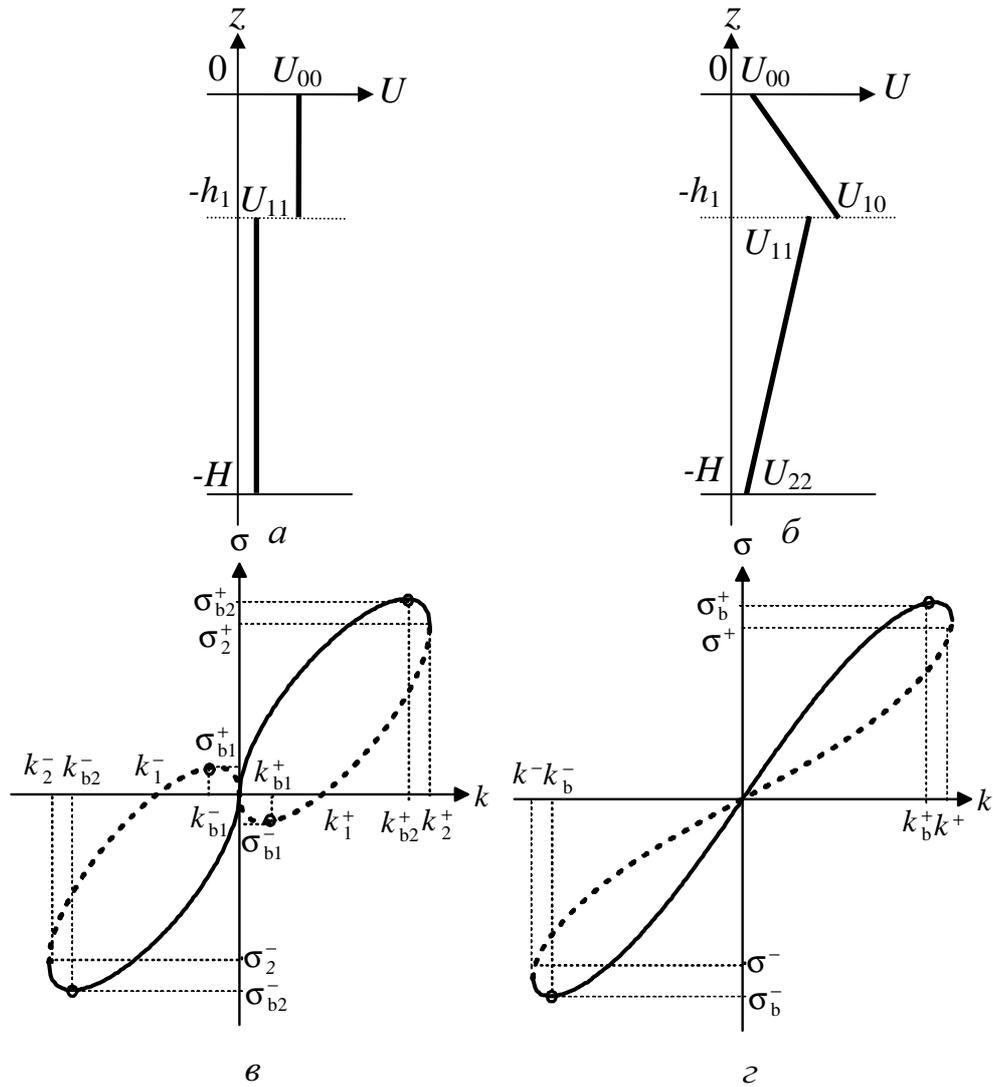
Однонаправленное течение с постоянными, но различными по величине скоростями потока в слоях. В этом случае (рис. 4, а)

$$U = U_{00} \geq 0 \quad (-h_1 \leq z \leq 0), \quad U = U_{11} \geq 0 \quad (-H \leq z \leq -h_1), \quad (19)$$

причем $U_{00} \neq U_{11}$. Дисперсионные соотношения (15) принимают вид

$$\sigma = \frac{(\gamma a_1 U_{00} + a_2 U_{11})k \pm \sqrt{\Delta_2(k)}}{\gamma a_1 + a_2}, \quad (20)$$

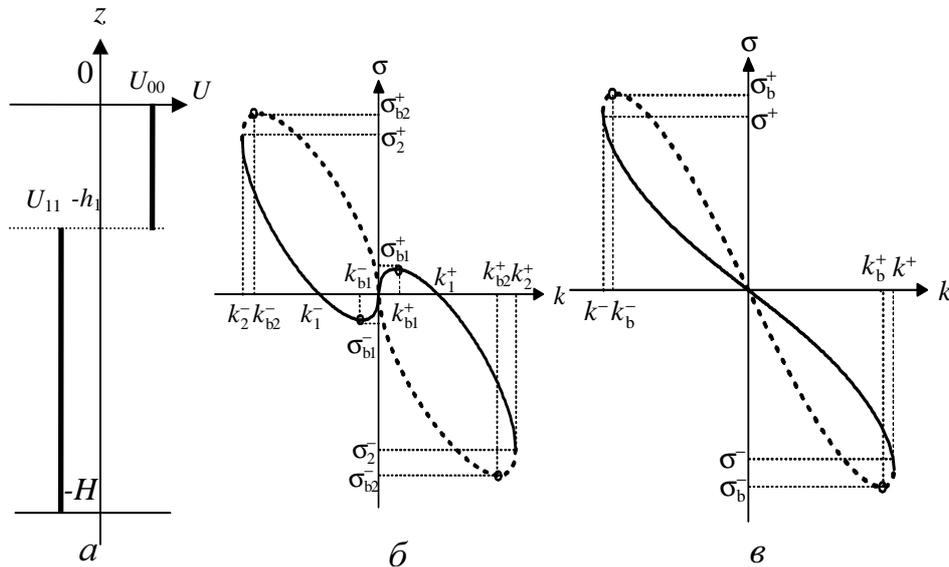
$$\Delta_2 = \varepsilon g (\gamma a_1 + a_2) k - \gamma a_1 a_2 \delta^2 k^2. \quad (21)$$



Р и с. 4. Сдвиговые течения с разрывными на границе раздела слоев распределениями скорости (а, б) и возможные дисперсионные зависимости для внутренних волн (в, г)

Дисперсионные кривые ограничены на плоскости (k, σ) (рис. 4, в, з). В случае $P = (\gamma U_{00} / h_1 + U_{11} / h_2) < \sqrt{\Delta_2(0)}$ существуют две пары точек блокировки внутренних волн: $(k_{b1}^+, \sigma_{b1}^-)$, $(k_{b2}^+, \sigma_{b2}^+)$ и $(k_{b1}^-, \sigma_{b1}^+)$, $(k_{b2}^-, \sigma_{b2}^-)$. В этих точках групповая скорость равна нулю, а фазовая отлична от нуля, что указывает на рост амплитуды такой прогрессивной волны со временем. Внутренние волны могут существовать только в ограниченных диапазонах волновых чисел $k_2^- < k < k_2^+$ и частот $\sigma_{b2}^- < \sigma < \sigma_{b2}^+$. Если частота волны изменяется в диапазоне $(\sigma_{b1}^-, \sigma_{b1}^+)$, то могут существовать четыре прогрессивных волны, две из которых распространяются по течению, а другие две – против. В частотных диапазонах $(\sigma_{b2}^-, \sigma_{b1}^-)$ и $(\sigma_{b1}^+, \sigma_{b2}^+)$ могут существовать только две внутренних волны, распространяющиеся по течению. При $P > \sqrt{\Delta_2(0)}$ существует одна пара точек блокировки внутренних волн: (k_b^+, σ_b^+) и (k_b^-, σ_b^-) (рис. 4, з).

Течение с постоянными, но противоположными по направлению скоростями в слоях. В этом случае (рис. 5, а)



Р и с. 5. Двухслойное течение с различными по направлению скоростями в слоях (а) и соответствующие дисперсионные зависимости для внутренних волн (б, в)

$$U = U_{00} \quad (-h_1 \leq z \leq 0), \quad U = U_{11} \quad (-H \leq z \leq -h_1), \quad (22)$$

где $U_{00}U_{11} < 0$. Дисперсионная зависимость описывается формулой (20). Если $P > 0$, то дисперсионные кривые имеют вид зависимостей, показанных на рис. 4, в, з. При $P < 0$ дисперсионные кривые изменяют свой вид в зависимости от того, выполняется неравенство $P > -\sqrt{\Delta_2(0)}$ (рис. 5, б) или нет (рис. 5, в). В этих случаях диапазоны существования внутренних волн по частотам и волновым числам несколько отличаются. Для распределений скорости, показанных на рис. 4, а и 5, а, возможно существование двух или четы-

рех внутренних волн, распространяющихся по и против течения в верхнем слое.

Течение с линейными распределениями скорости, имеющими разрыв первого рода на границе раздела слоев. Распределение скорости течения (показано на рис. 4, б) описывается выражениями

$$U_1(z) = d_1 z + U_{00} \quad (-h_1 \leq z \leq 0), \quad U_2(z) = d_2(z + h_1) + U_{11} \quad (-H \leq z \leq -h_1), \quad (23)$$

где $d_1 = (U_{00} - U_{10})/h_1$, $d_2 = (U_{11} - U_{22})/h_2$. Дисперсионные зависимости для внутренних волн в этом случае имеют вид

$$\sigma = \frac{\mu + (\gamma a_1 U_{10} + a_2 U_{11})k \pm \sqrt{\Delta_3}}{\gamma a_1 + a_2}, \quad (24)$$

$$\Delta_3 = \mu^2 + [\varepsilon g(\gamma a_1 + a_2) - \gamma \delta(a_1 d_2 + a_2 d_1)]k - \gamma a_1 a_2 \delta^2 k^2, \quad (25)$$

где $\mu = (d_2 - \gamma d_1)/2$. График дисперсионных кривых представлен на рис. 4, в при $(\gamma U_{10}/h_1 + U_{11}/h_2) < \sqrt{\Delta_3(0)} - \mu$ и на рис. 4, з, если последнее неравенство не выполняется. Возможные типы внутренних прогрессивных волн аналогичны тем, которые могут существовать в течении, показанном на рис. 4, а.

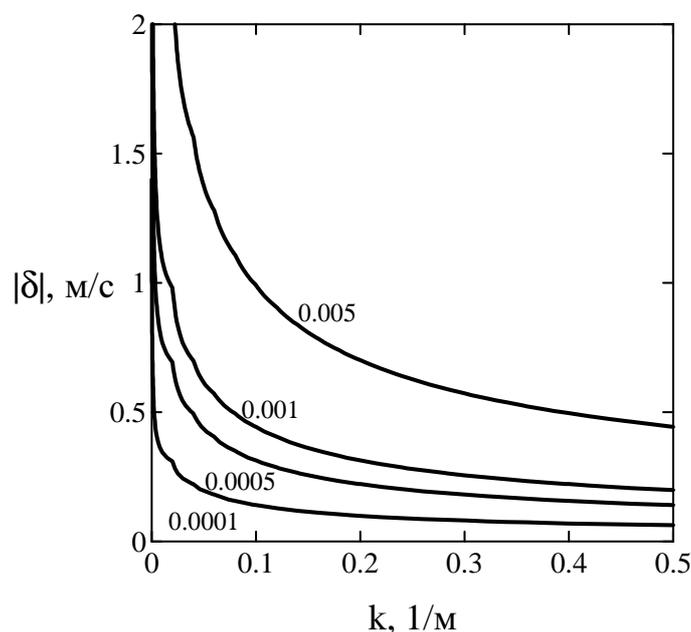
Линейная устойчивость внутренних волн в двухслойных сдвиговых течениях (19), (22) и (23). Остановимся на анализе линейной неустойчивости малых возмущений в форме внутренних прогрессивных волн, распространяющихся в рассмотренных выше двухслойных сдвиговых течениях. Неустойчивость возникает при значениях параметров, при которых частота волны, найденная из дисперсионного соотношения, имеет ненулевую мнимую часть. В случае дисперсионных зависимостей (15) неустойчивые внутренние волны с экспоненциальным ростом амплитуды существуют при условии $\Delta < 0$. Кривая на плоскости параметров, разделяющая области устойчивости и неустойчивости внутренних волн, известна как граница нейтральной устойчивости [2, 5, 17]. В рамках подхода, примененного в настоящей работе, она соответствует решениям уравнения $\Delta = 0$.

Для модельных распределений скорости сдвиговых течений, являющихся непрерывными, $\delta = 0$, а поэтому $\Delta > 0$. Следовательно, внутренние волны в рассмотренных выше сдвиговых течениях с непрерывным распределением скорости устойчивы.

Иная ситуация наблюдается в течениях, распределения скорости которых имеют разрывы на границе раздела слоев. Такие случаи реализуются для двухслойных течений (19), (22) и (23). Для них выполнены расчеты границ нейтральной устойчивости при различных параметрах фонового течения. В случае течения (19) в предположении, что $U_{11} = 0$, а глубина нижнего слоя бесконечна, построенные кривые нейтральной устойчивости совпадают с найденными в работе [17].

На рис. 6 представлены для различных значений ε границы нейтральной устойчивости внутренних волн на плоскости параметров $(k, |\delta|)$ в случае тече-

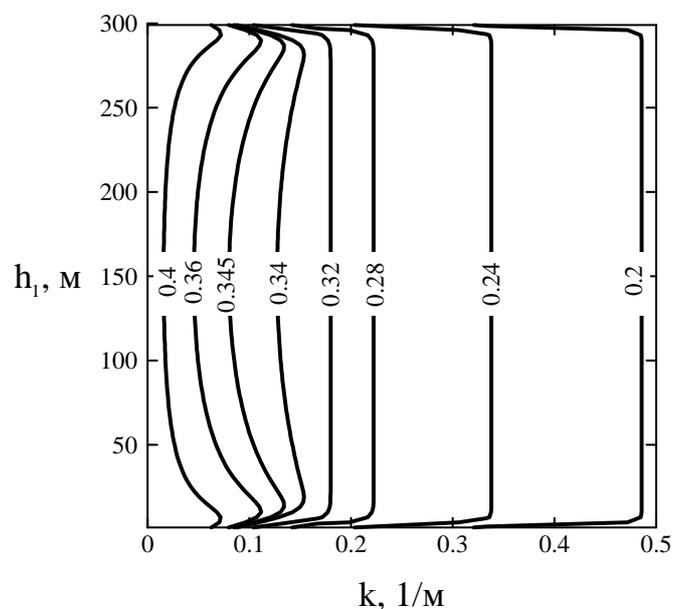
ния с постоянными скоростями в слоях (рис. 4, а и 5, а). Области линейной устойчивости волн располагаются под соответствующими кривыми. Ослабление стратификации и увеличение скачка скорости приводят к сужению области устойчивости волн.



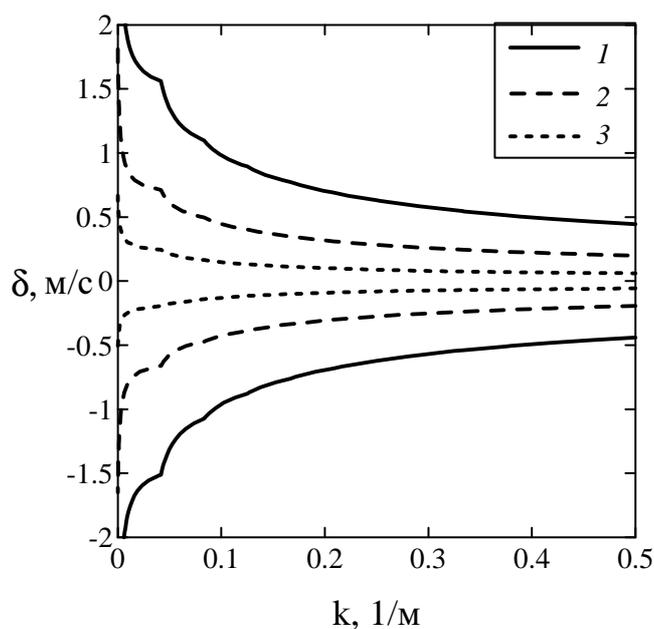
Р и с. 6. Кривые нейтральной устойчивости внутренних волн на плоскости $(k, |\delta|)$ в случае течения с постоянными скоростями в слоях (рис. 4, а и 5, а) при различных значениях относительного перепада плотности ϵ , указанных у соответствующих кривых (глубины слоев: $h_1 = 100$ м, $H = 2000$ м; устойчивым режимам соответствуют точки под кривыми)

Кривые нейтральной устойчивости внутренних волн на плоскости параметров (k, h_1) для двухслойного течения с постоянными скоростями в слоях (рис. 4, а и 5, а) при различных значениях скачка скорости δ на границе раздела слоев приведены на рис. 7. Области устойчивости находятся слева от соответствующих кривых. Увеличение скачка скорости приводит к сужению области устойчивости. Влияние глубины залегания скачка плотности жидкости наиболее заметно при больших значениях δ , а также в случаях, когда граница раздела слоев располагается у верхней поверхности течения или у дна бассейна.

Кривые нейтральной устойчивости, соответствующие течению с линейными распределениями скорости в слоях (см., например, рис. 4, б), показаны на рис. 8. Области устойчивых волновых режимов ограничены снаружи соответствующей парой кривых. Уменьшение параметра плотностной стратификации и/или увеличение скачка скорости приводят к сужению области устойчивости внутренних волн.



Р и с. 7. Кривые нейтральной устойчивости внутренних волн на плоскости (k, h_1) в двухслойном течении (постоянные скорости в слоях) с разрывом распределения скорости на границе раздела слоев для нескольких значений скачка скорости δ (м/с), указанных у кривых (глубина бассейна $H = 300$ м; относительный перепад плотности $\varepsilon = 0,001$; устойчивым режимам соответствуют точки слева от кривых)



Р и с. 8. То же, что и на рис. 6, но для течения с линейным распределением скорости в слоях для различных значений относительного перепада плотности ($1 - \varepsilon = 0,005$; $2 - \varepsilon = 0,001$, $3 - \varepsilon = 0,0001$) (параметры течения: постоянные сдвиги скорости $d_1 = -0,0025 \text{ c}^{-1}$, $d_2 = 0,00045 \text{ c}^{-1}$, толщины слоев $h_1 = 100$ м, $h_2 = 200$ м; устойчивым волновым режимам соответствуют точки (k, δ) между соответствующими кривыми)

Закключение. В линейной постановке рассмотрена плоская задача о прогрессивных внутренних гравитационных волнах в течении двухслойной жидкости с изменяющейся по вертикали скоростью течения. Для нескольких кусочно-постоянных и кусочно-линейных распределений скорости течения в слоях найдены аналитические решения задачи и соответствующие дисперсионные зависимости.

Найденные аналитические решения позволили описать возможные типы внутренних волн, направления их распространения, условия блокировки волн течениями и условия устойчивости волн. Показано, что распределение скорости течения влияет на все перечисленные характеристики волн.

Сдвиговые течения с непрерывными распределениями скорости являются устойчивыми. Наличие скачка скорости на границе раздела слоев жидкости может привести к неустойчивости. Для нескольких разрывных распределений скорости течения найдены границы нейтральной устойчивости течения относительно малых возмущений в виде прогрессивных внутренних волн. Области устойчивости течения сужаются при уменьшении относительного перепада плотности между слоями и увеличении скачка в распределении скорости фонового течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краусс В. Внутренние волны. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. – 272 с.
2. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 2. – М.: Мир, 1981. – 365 с.
3. Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л. Распространение волн в сдвиговых гидродинамических течениях // Успехи физических наук. – 1989. – 159, вып. 1. – С. 83 – 123.
4. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 320 с.
5. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. – М.: Иностран. лит., 1958. – 195 с.
6. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 108 с.
7. Miles J.W. On the stability of heterogeneous shear flows // J. Fluid Mech. – 1961. – 10, № 4. – P. 496 – 508.
8. Howard L.N. Note on a paper of John W. Miles // Ibid. – 1961. – 10, № 4. – P. 509 – 512.
9. Menkes J. On the stability of a shear layer // Ibid. – 1959. – 6, № 4. – P. 518 – 522.
10. Букатов А.Е., Власенко В.И., Пухтыр Л.Д. и др. Динамика поверхностных и внутренних волн. – Киев: Наукова думка, 1988. – 192 с.
11. Букатов А.Е., Власенко В.И., Стацук Н.М. и др. Поверхностные и внутренние гравитационные волны в океане. – Киев: Наукова думка, 1989. – 144 с.
12. Черкесов Л.В., Власенко В.И., Стацук Н.М. и др. Гидродинамика морских волн. – Киев: Наукова думка, 1992. – 162 с.
13. Helmholtz H.V. Über diskontinuierliche flüssigkeitsbewegungen. – Berlin: Monatsber. der Kgl. Preuss. Akad. Wiss., 1868. – 23. – S. 215 – 229.
14. Суворов А.М. Генерация внутренних волн в потоке двухслойной жидкости со сдвигом скорости // Цунами и внутренние волны. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1976. – С. 170 – 178.
15. Билюнас М.В., Доценко С.Ф. Свободные внутренние волны в неоднородном течении с вертикальным сдвигом скорости // Морской гидрофизический журнал. – 2012. – № 1. – С. 3 – 16.

16. *Berkofsky L.* Internal gravity-vorticity lee waves over mountains // *J. Geophys. Res.* – 1960. – 65, № 11. – P. 3685 – 3692.
17. *Esch R.E.* Stability of the parallel flow of a fluid over a slightly heavier fluid // *J. Fluid Mech.* – 1962. – 12. – P. 192 – 208.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь
E-mail: sf_dotsenko@mail.ru

Материал поступил
в редакцию 01.06.11

АНОТАЦІЯ У лінійній постановці розглянута плоска задача про прогресивні внутрішні гравітаційні хвилі в двошаровій рідині з вертикальним зрушенням швидкості. Для кількох модельних розподілів швидкості течії знайдені аналітичні рішення задачі. Описані можливі типи внутрішніх хвиль, умови їх блокування та критерії стійкості хвиль, які залежать від вертикальної структури течії. Показано, що розподіл швидкості фонові течії впливає на кількість генерованих хвиль, напрями їх розповсюдження та умови блокування. Стрибок швидкості течії на межі поділу шарів збільшує кількість точок блокування та призводить до обмеження діапазону можливих частот внутрішніх хвиль. Для течій з розривом розподілу швидкості на межі розділу шарів знайдені криві нейтральної стійкості прогресивних внутрішніх хвиль. Показано, що область стійкості течії звужується зі зменшенням відносного перепаду густини між шарами і зі збільшенням стрибка швидкості фонові течії.

Ключові слова: течії з вертикальним зсувом швидкості, двошарова рідина, лінійні внутрішні хвилі, хвилі прогресивні, стійкість хвиль, аналітичні рішення.

ABSTRACT Two-dimensional problem on progressive internal gravity waves in a flow of two-layer fluid with vertical velocity shear is considered in the linear statement. The analytical solutions are found for some model distributions of current velocity. Possible types of internal waves, the conditions of their locking, and the criteria of waves' stability depending on the currents' vertical structure are found. It is shown that distribution of the background flow velocity affects the amount of the generated waves, directions of their propagation and the lock condition. The current velocity jump on the layers' interface increases the number of locking points and reduces the range of possible frequencies of internal waves. For the flows with a break in velocity distribution on the layers' interface, the curves of neutral stability of the progressive internal waves are found. It is shown that the region of the flow stability narrows with decrease of the relative density difference between the layers and increase of the background flow velocity jump.

Keywords: flow with vertical shear velocity, two-layer fluid, linear internal waves, progressive waves, waves' stability, analytical solutions.