для кожного $v \in l_\infty(D)$ єдиний розв'язок u в просторі $l_\infty(D)$. Тому, з урахуванням леми 1, оператор $\mathcal{G}$ неперервно оборотний тоді і тільки тоді, коли для кожного $z \in S$ є неперервно оборотним оператор

$$TA - \sum_{k\in\mathbb{Z}} TA_k z^k = T(A - f(z)).$$

Відзначимо, що оператор $T\colon B \to D$ лінійний, обмежений і неперервно оборотний. Тому $T(A - f(z))$ неперервно оборотний для кожного $z \in S$ тоді і тільки тоді, коли виконується твердження a_2.

При $p = \infty$ твердження a_1 та a_2 еквівалентні внаслідок леми 1. Теорему 1 доведено.

1. *Городній М. Ф.* Стаціонарні у широкому сенсі розв'язки різницевих рівнянь у банаховому просторі // Теорія ймовірностей та матем. статистика. – 2006. – Вип. 74. – С. 27–33.
2. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Київ: Вища шк., 1992. – 319 с.
3. *Баскаков А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. журн. – 1997. – **38**, № 1. – С. 14–28.
4. *Городній* М. Ф. l_p-розв'язки одного різницевого рівняння в банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 3. – С. 425–430.
5. *Вятчанінов О. В., Городній М. Ф.* Властивості розв'язків дискретної системи Вольтерри в банаховому просторі // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 2. – С. 184–187.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 03.12.2007

УДК 519.6

Член-кореспондент НАН України **В. Л. Макаров**

Функціонально-дискретний метод розв'язування задач на власні значення для нелінійних диференціальних рівнянь

A new functional-discrete method to solve eigenvalue problems for ordinary differential operators of the Schrödinger type with nonlinear potentials is proposed. The method approximates both eigenvalues and eigenfunctions superexponentially. The efficiency of the method is illustrated by several numerical experiments.

Розглядається задача

$$u''(x) + [\lambda - N(x, u(x))]u(x) = 0, \qquad x \in (0, 1), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = M, \qquad u(1) = 0, \tag{2}$$

де $N(x,u)$ при кожному фіксованому x є аналітичною функцією за u з властивістю $N(x,u) = N(x,-u)$, $N(x,0)=0$, $|\partial^k N(x,u)/\partial u^k| \leqslant \overline{N}^{(k)}(u)$, $\overline{N}(u)$ — гладка функція з невід'ємними похідними, $u \in \mathbb{R}^1_+$.

Питання існування та єдиності послідовності власних значень $\{\lambda_n\}$ і відповідних власних функцій $\{u_n(x)\}$ таких, що $u_n(x)$ має точно n нулів в інтервалі $(0,1)$, $n=0,1,\ldots$ задачі (1), (2) в автономному випадку досліджувалось у роботі [1].

Дана робота присвячена розробці та обгрунтуванню функціонально-дискретного (FD) методу розв'язування сформульованої задачі.

Найпростіший варіант FD-методу з використанням поліномів Адомяна був запропонований у [2, 3]. Розглянемо, у чому полягає алгоритм методу m-го рангу.

Наближення n-го розв'язку задачі 1 має вигляд

$$u_n^m(x) = \sum_{j=0}^{m} u_n^{(j)}(x), \qquad \lambda_n^m = \sum_{j=0}^{m} \lambda_n^{(j)}, \tag{3}$$

де доданки в сумах визначаються з рекурентної послідовності задач

$$\frac{d^2}{dx^2}u_n^{(j+1)}(x) + \lambda_n^{(0)}u_n^{(j+1)}(x) = -\sum_{p=0}^{j}\lambda_n^{(j+1-p)}u_n^{(p)}(x) + \\ + \sum_{p=0}^{j} A_{j-p}(x, u_n^{(0)}(x), \ldots, u_n^{(j-p)}(x))u^{(p)}(x), \qquad x \in (0,1), \tag{4}$$

$$u^{(j+1)}(0) = 0, \qquad \frac{du^{(j+1)}(0)}{dx} = 0, \qquad u^{(j+1)}(1) = 0, \tag{5}$$

$$\lambda_n^{(j+1)} = \int_0^1 \sum_{p=0}^{j} A_{j-p}(x, u_n^{(0)}(x), \ldots, u_n^{(j-p)}(x))u_n^{(p)}(x)u_n^{(0)}(x)\,dx, \tag{6}$$

$$\int_0^1 u_n^{(j+1)}(x)u_n^{(0)}(x)dx = 0, \qquad j = 0,1,\ldots,m-1, \\ \lambda_n^{(0)} = (n\pi)^2, \qquad u_n^{(0)}(x) = M\frac{\sin n\pi x}{n\pi}, \tag{7}$$

де $A_j(u^{(0)}(x), \ldots, u^{(j)}(x))$ — поліноми Адомяна, які визначаються за формулою [4]

$$A_j(x, u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(j)}) = \\ = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=j} N^{(\alpha_1)}(x, u^{(0)})\frac{(u^{(1)})^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(u^{(j-1)})^{\alpha_{j-1}-\alpha_j}}{(\alpha_{j-1}-\alpha_j)!}\frac{(u^{(j)})^{\alpha_j}}{(\alpha_j)!}, \\ j = 1,2,\ldots, \qquad A_0(x, u^{(0)}) = N(x, u^{(0)}). \tag{8}$$

Має місце

Теорема 1 [2]. *Нехай* $M/\sqrt{2\pi n} \leqslant 1$, *нелінійна функція* $\overline{N}(f)$ *така, що*

$$\max_{\sqrt{2}\leqslant f\leqslant\sqrt{2}+1} \frac{f-\sqrt{2}-(f-\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})\overline{N}(f)f} = R,$$

тоді $\forall n \in \mathbb{N}^0$ *таких, що*

$$r_n = \frac{1}{Rn\pi} \leqslant 1, \tag{9}$$

FD-метод збігається суперекспоненціально і мають місце такі оцінки точності:

$$\|u_n - u_n^m\| \leqslant \frac{C}{(m+2)^{1+\varepsilon}}(r_n)^{m+1}, \qquad |\lambda_n - \lambda_n^m| \leqslant \frac{C}{R(m+2)^{1+\varepsilon}}(r_n)^m, \tag{10}$$

де ε *— додатна стала.*

Якщо умова (9) не виконується для $n = 1, \ldots, n_0$, тоді запропонований алгоритм для таких порядкових номерів власних значень може розбігатись. У цьому випадку пропонується алгоритм FD-методу, що є узагальненням ідей роботи [5] на нелінійний випадок. Розіб'ємо відрізок $[0,1]$ сіткою

$$\overline{\widehat{\omega}} = \{x_i \in [0,1], i = \overline{1, K-1}\colon 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{K-1} < x_K = 1\}$$

на K відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,K}$, і на кожному з них наблизимо нелінійність $N(x, u(x))$ сталою

$$\widehat{N}(x, u(x)) = \frac{1}{2}[N(x_{i-1}, u(x_{i-1})) + N(x_i, u(x_i))], \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{11}$$

Занурюємо задачу (1), (2) у більш загальну задачу

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x,t) + \{\lambda(t) - w(x,t,u(\cdot))\}u(x,t) = 0, \tag{12}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 1, \qquad u(1,t) = 0, \tag{13}$$

$$w(x,t,u(\cdot)) = \widehat{N}(x, u(\cdot,t)) + t\{N(x,u(x)) - \widehat{N}(x, u(\cdot,t))\}. \tag{14}$$

При цьому очевидно, що $u(x,1) = u(x)$, $\lambda(1) = \lambda$. Розв'язок задачі (12)–(14) шукається у вигляді рядів

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j u^{(j)}(x), \qquad \lambda(t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j \lambda^{(j)}, \tag{15}$$

коефіцієнти яких знаходяться як розв'язки рекурентної послідовності задач

$$\frac{d^2u^{(j+1)}(x)}{dx^2} + \mu_i^2 u^{(j+1)}(x) = -\sum_{p=0}^{j} \overline{\lambda}_i^{(j+1-p)} u^{(p)}(x) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{j} \biggl\{ A_{j-p}(x, u^{(0)}(x), \ldots, u^{(j-p)}(x)) -$$

$$- \frac{1}{2}\biggl[A_{j-p}(x_{i-1}, u^{(0)}(x_{i-1}), \ldots, u^{(j-p)}(x_{i-1})) +$$

$$+ A_{j-p}(x_i, u^{(0)}(x_i), \ldots, u^{(j-p)}(x_i)) \biggr] \biggr\} u^{(p)}(x), \qquad x \in (x_{i-1}, x_i), \tag{16}$$

$$u^{(j+1)}(0) = 0, \qquad \frac{du^{(j+1)}(0)}{dx} = 0,$$

$$[u^{(j+1)}(x)]_{x=x_i} = 0, \qquad \left[\frac{du^{(j+1)}(x)}{dx}\right]_{x=x_i} = 0, \qquad i = \overline{1, K-1}, \tag{17}$$

$$u^{(j+1)}(1) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

де

$$[v(x)]_{x_i} = v(x_i + 0) - v(x_i - 0),$$

$$\mu_i^2 = \lambda^{(0)} - \frac{1}{2}[N(x_{i-1}, u^{(0)}(x_{i-1})) + N(x_i, u^{(0)}(x_i))], \tag{18}$$

$$\overline{\lambda}_i^{(j+1-p)} = \lambda^{(j+1-p)} - \frac{1}{2}\biggl[A_{j+1-p}(x_{i-1}, u^{(0)}(x_{i-1}), \ldots, u^{(j+1-p)}(x_{i-1})) +$$

$$+ A_{j+1-p}(x_i, u^{(0)}(x_i), \ldots, u^{(j+1-p)}(x_i)) \biggr]. \tag{19}$$

Тут $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}(x))$ — розв'язок базової задачі

$$\frac{d^2u^{(0)}(x)}{dx^2} + \mu_i^2 u^{(0)}(x) = 0, \qquad x \in (x_{i-1}, x_i), \qquad i = \overline{1, K},$$

$$[u^{(0)}(x)]_{x=x_i} = 0, \qquad \left[\frac{du^{(0)}(x)}{dx}\right]_{x=x_i} = 0, \qquad i = \overline{1, K-1}, \tag{20}$$

$$u^{(0)}(0) = 0, \qquad \frac{du^{(0)}(0)}{dx} = M, \qquad u^{(0)}(1) = 0.$$

Зауважимо одразу, що базова задача (20) є згідно з (18) нелінійною, хоча і з кусково-сталими коефіцієнтами. Вона належить до так званих крайових задач з кусково-сталими аргументами, теорії яких останнім часом приділяється значна увага (див., напр., [6] і цитовану там літературу). Після знаходження її розв'язку розв'язується рекурентна послідовність лінійних крайових задач (16) з виродженим постійним (незалежним від j) диференціальним оператором. Специфікою останніх є те, що в коефіцієнт $\overline{\lambda}^{(j+1)}(x_{i-1})$ згідно з (19) та згідно з визначенням поліномів Адомяна (8) будуть входити лінійно невідомі $u^{(j+1)}(x_{i-1})$, $u^{(j+1)}(x_i)$ (при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{j+1} = 1$).

За наближення FD-методу m-го рангу розв'язку задачі (1), (2) приймається

$$u^m(x) = \sum_{j=0}^{m} u^{(j)}(x), \qquad \lambda^m = \sum_{j=0}^{m} \lambda^{(j)}. \tag{21}$$

Має місце

Теорема 2. *Завжди існує таке додатне, достатньо мале* h_0, *що як тільки* $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant K} h_i = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant K}(x_i - x_{i-1}) \leqslant h_0$, *FD-метод буде суперекспоненціально збіжним для будь-якого за номером* $n \in \{1, 2, \dots, n_0\}$ *власного значення* λ_n *і будуть мати місце такі оцінки точності:*

$$|\lambda_n - \lambda_n^m| \leqslant \frac{C}{(m+2)^{1+\varepsilon}}\left(\frac{h}{R}\right)^m, \qquad \|u_n - u_n^m\|_1 \leqslant \frac{C}{(m+2)^{1+\varepsilon}}\left(\frac{h}{R}\right)^{m+1}. \tag{22}$$

Тут $\|v\|_{1,\infty} = \max\{\|v\|_\infty, \|dv/dx\|\}$, $\|v\|_\infty = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|v(x)|$ і величина R має подібний сенс, що і в теоремі 1. Доведення теореми 2 суттєво спирається на такі твердження:

Лема 1. *Нехай* $u^{(p)}(x) \in C^1[0,1]$, $p = 0, 1, \dots$, *тоді*

$$\|A_k(x, u^{(0)}(x), \dots, u^{(k)}(x)) - A_k(x_{i-1}, u^{(0)}(x_{i-1}), \dots, u^{(k)}(x_{i-1}))\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant h\sum_{i=1}^{r} a_i 2i A_k(\overline{N}, \|u^{(0)}\|_{1,\infty}, \|u^{(1)}\|_{1,\infty}, \dots, \|u^{(k)}\|_{1,\infty}),$$

де $h = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant K}(x_i - x_{i-1})$, $A_k(\overline{N}; v_1, \dots, v_k)$ — *поліноми Адомяна для функції* $\overline{N}(u)$.

Лема 2. *Нехай* $\overline{N}(u) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j u^{2j}$, $a_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \dots$, *тоді має місце формула*

$$A_{j+1}(\overline{N}(u); V_0, \dots, V_j, 0) = \frac{1}{(j+1)!}\left\{\frac{d^{j+1}}{dz^{j+1}}\overline{N}(f(z) - V_0)\right\}_{z=0}, \tag{23}$$

де $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} z^i V_j$.

Справедливість твердження теореми 2 ілюструють результати чисельних розрахунків, що наводяться нижче.

П р и к л а д 1. Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} &u''(x) + [\lambda - u^2(x)]u(x) = 0, \qquad x \in (0,1),\\ &u(0) = 0, \qquad u'(0) = M, \qquad u(1) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

На підставі симетрії $u^2(x) = u^2(1-x)$ задача (24) має дві послідовності власних функцій, одна з яких складається з парних відносно точки $x = 1/2$ функцій, а друга — з непарних.

Для визначеності зупинимось на випадку парних власних функцій і замість задачі (24) будемо розглядати задачу

$$\begin{aligned} &u''(x) + [\lambda - u^2(x)]u(x) = 0, \qquad x \in (0,1/2),\\ &u(0) = 0, \qquad u'(0) = M, \qquad u'(1/2) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Таблиця 1

m	λ_1^m	$\Delta_1^m = \lambda_1^T - \lambda_1^j$	r_1^m	λ_3^m	r_3^m
0	9,869604401	11,243388	3,605831	88,8264396098	0,133549
1	25,067781947	−3,954789	3,605831	90,5151260038	$0{,}812039\cdot 10^{-3}$
2	18,241722278	2,871270	1,186630	90,5057624103	$0{,}848473\cdot 10^{-5}$
3	23,747710005	−2,6347171	0,974777	90,5058556547	$0{,}104871\cdot 10^{-6}$
4	18,388332376	2,724660	1,216683	90,5058545342	$0{,}141627\cdot 10^{-8}$
5	24,143719524	−3,030726		90,5058545490	

Таблиця 2

m	λ_1^m	$\Delta_1^m = \lambda_1^T - \lambda_1^j$	r_1^m
0	20,598798053	0,514194	0,348338
1	21,088264618	0,024728	0,057621

Використовуючи найпростіший варіант FD-методу (3)–(7) з відповідною модифікацією, пов'язаною зі зміною правої крайової умови, одержуємо

$$\lambda_1^{(0)} = \pi^2, \qquad \lambda_1^1 = \pi^2 + \frac{3M^2}{4\pi^2}, \qquad \lambda_1^2 = \pi^2 + \frac{3M^2}{4\pi^2} - \frac{21M^4}{128\pi^6},$$
$$\lambda_1^3 = \lambda_1^2 + \frac{33M^6}{512\pi^{10}}, \qquad \lambda_1^4 = \lambda_1^3 - \frac{4005M^8}{131072\pi^{14}}, \qquad \lambda_1^5 = \lambda_1^4 + \frac{8379M^8}{524288\pi^{18}}.$$

Для $M = 10\sqrt{2}$ точним першим власним значенням є $\lambda_1^T = 21{,}112992612\ldots$.

З табл. 1 видно, що найпростіший FD-метод для першого власного значення при $M = 10\sqrt{2}$ є розбіжним, у той же час для λ_3 метод є практично збіжним. Аналітичні вирази наближення FD-методу до 5-го рангу для λ_3 мають вигляд

$$\lambda_3^{(0)} = 9\pi^2, \qquad \lambda_3^1 = \lambda_3^{(0)} + \frac{50}{3\pi^2}, \qquad \lambda_3^2 = \lambda_3^1 - \frac{4375}{486\pi^6},$$
$$\lambda_3^3 = \lambda_3^2 + \frac{171875}{19683\pi^{10}}, \qquad \lambda_3^4 = \lambda_3^3 - \frac{173828125}{17006112\pi^{14}}, \qquad \lambda_3^5 = \lambda_3^4 + \frac{9091796875}{688747536\pi^{18}}.$$

У табл. 1 величини

$$r_n^m = \left\{ \int_0^1 \left[\frac{d^2 u_n^m(x)}{dx^2} + \lambda_n^m u_n^m(x) - u_n^m(x)^3 \right]^2 dx \right\}^{1/2}, \qquad m = 0, 1, 2, 3, 4, \qquad n = 1, 3,$$

є відповідними нев'язками.Щоб досягти збіжності методу для першого власного значення задачі (25), застосуємо тепер загальний FD-метод (16)–(20) з двома сходинками. При цьому візьмемо $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $K = 2$. Результати обчислень наведено у табл. 2, з якої можна зробити висновок про практичну збіжність методу. Для власних значень з більшими порядковими номерами швидкість збіжності буде ще вищою.

1. *Zhidkov P. E.* Basis properties of eigenfunctions of nonlinear Sturm–Liouville problems // Electron. J. Different. Equat. – 2000. – No 28. – 13 p.
2. *Gavrilyuk I. P., Klimenko A. V., Makarov V. L., Rossokhata N. O.* Exponentially convergent parallel algorithm for nonlinear eigenvalue problems // IMA J. Numer. Anal. – 2007. – **27**, No 4. – P. 818–838.
3. *Гаврилюк I. П., Клеменко А. В., Макаров В. Л., Россохата Н. О.* FD-метод для задач на власні значення з нелінійним потенціалом // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 1. – С. 14–28.

4. *Abbaoui K., Pujol M. J., Cherruault Y. et al.* A new formulation of Adomian method: convergence result // Kybernetes. – 2001. – **30**, No 9–10. – P. 1183–1191.
5. *Makarov V. L.* A functional-difference method of arbitrary order of accuracy for solving the Sturm–Liouville problem with piecewise-smooth coefficients // Soviet. Math. Dokl. – 1992. – **44**, No 2. – P. 391–396.
6. *Akhmet M. U.* Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Nonlinear Anal. – 2007. – **66**, No 2. – P. 367–383.

Інститут математики НАН України, Київ *Надійшло до редакції 11.04.2008*

УДК 519.21

І. В. Малик, В. К. Ясинський

Експоненціальна поведінка в середньому квадратичному розв'язку стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в критичному випадку

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Conditions for the mean square stability of linear stochastic differential-difference equations of the neutral type in the critical case are obtained.

На імовірнісному базисі [1] $(\Omega, F, P, \mathrm{Im})$, де $\mathrm{Im} \equiv \{F_t, t \geqslant 0\}$ — фільтрація, задано сильний розв'язок [1, 2] $x(t) = x(t, \omega) \in R^1$ лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу (ЛСДРРНТ)

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}dt + \{Gx_t\}dw(t) \tag{1}$$

за початковою умовою

$$x_0 = \varphi. \tag{2}$$

Тут $x_t \equiv \{x(t+s), -h \leqslant s \leqslant 0\} \in C([-h, 0])$; $\varphi \in C([-h, 0])$ — F_0 — вимірний випадковий процес; $w(t) = w(t, \omega)$ — одновимірний випадковий вінерів процес, що узгоджений з $\mathrm{Im} = \{F_t, t \geqslant 0\}$; D, L, G — різницеві оператори, що задані на просторі співвідношеннями [3, 4] для $\psi \in C([-h, 0])$

$$D\psi \equiv \psi(0) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k \psi(-\tau_k), \qquad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n \leqslant h;$$

$$L\psi \equiv \alpha\psi(0) + \sum_{k=1}^{m} b_k \psi(-\lambda_k), \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m \leqslant h; \tag{3}$$