

УДК 621.376.5

К. т. н. В. С. ГОЛУБ

Украина, г. Киев, Научно-производственная фирма «VD MAIS»

E-mail: V.Golub@vdm.kiev.ua

## СИГМА-ДЕЛЬТА МОДУЛЯТОР: ПЕТЛЕВЫЕ ФИЛЬТРЫ И ШУМ КВАНТОВАНИЯ

Проведен анализ сигма-дельта модулятора с использованием средств моделирования. В частности, исследована зависимость его шума квантования от петлевой фильтрации. Полученные результаты объясняют некоторые особенности работы модулятора и позволяют дать рекомендации по его применению.

**Ключевые слова:** непрерывный отсчет, сигма-дельта модулятор, петлевой фильтр, шум квантования.

В основе формирования импульсно-модулированных сигналов лежит теорема (точнее, теоремы) Котельникова, согласно которой *сигнал содержится в его мгновенных отсчетах*, следуемых с постоянной частотой, и может быть полностью восстановлен из этих отсчетов [1]. Одной из существенных особенностей сказанного является то, что отсчеты сигнала — мгновенные. Однако для того чтобы последовательность отсчетов можно было использовать в качестве реального сигнала, их преобразовывают в прямоугольные импульсы конечной длительности. Наглядным примером является сигнал с амплитудно-импульсной модуляцией (**АИМ-сигнал**), длительность импульсов которого постоянна, а амплитуда пропорциональна значениям отсчетов.

При указанном преобразовании (с расширением импульсов) нарушается условие восстановления, предусмотренное теоремой, поскольку мгновенные отсчеты заменяются импульсами конечной длительности, и, соответственно, вносятся частотные искажения. Вносимые искажения характеризуются аналоговой передаточной функцией  $\sin x/x$ , представляющей собой знакопеременную амплитудно-частотную характеристику (**АЧХ**). Ее аргумент  $x$  пропорционален временной задержке  $\tau$ , равной половине длительности импульса:  $x = \Omega\tau/2$ , где  $\Omega = 2\pi F$ ,  $F$  — частота сигнала. В результате выбор частоты мгновенных отсчетов осуществляется в соответствии с теоремой Котельникова, а длительность формируемых импульсов берется такой, чтобы неравномерность АЧХ в полосе пропускания была бы допустимой.

Существуют также разновидности отсчетов, соответствующие в своей основе теореме, но имеющие некоторые отличия. Одной из разновидностей являются «длительные» (не мгновенные) отсчеты, которые определяются средними значениями аналогового сигнала, отсчитываемыми

на интервалах времени. Ими являются, например, отсчеты в сигма-дельта модуляторе (**СДМ**), обусловленные его режимом работы, известным под названием «continuous-time» [2, 3]. В результате, как показано ниже, задержка сигнала СДМ определяется суммой двух задержек, первая из которых обусловлена «длительными» отсчетами, а вторая — формируемыми выходными импульсами.

На **рис. 1, а** приведена схема простейшего, одноразрядного СДМ первого порядка, содержащего интегратор « $1/(p\tau_{\text{инт}})$ » и квантователь, а также ЦАП, через который осуществляется от-

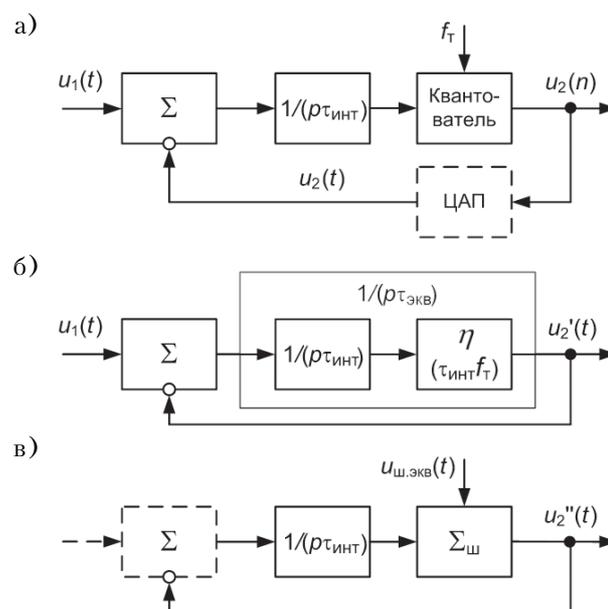


Рис. 1. Структурная схема одноразрядного СДМ первого порядка (а) и его аналоговые эквивалентные схемы для сигнала (б) и шума квантования (в)

рицательная обратная связь — с выхода СДМ на его вход. Квантователь, содержащий АЦП с компаратором, синхронизируется тактовыми импульсами, следуемыми с частотой  $f_T$ , которая определяет частоту квантования. Квантователь — в данном случае одnorазрядный — формирует последовательность посылок «1» и «0» (импульсов и интервалов соответственно), длительность каждой из которых равна  $1/f_T$ . ЦАП преобразовывает указанную последовательность  $u_2(n)$  в аналоговый сигнал обратной связи  $u_2(t)$ , но без фильтрации. Преобразование в ЦАП заключается в формировании посылок с квантованной (постоянной) площадью, обеспечивающей получение требуемого коэффициента передачи СДМ.

Существуют СДМ с выходным сигналом, содержащим несколько разрядов, и СДМ, которые имеют более высокий порядок (по сравнению с СДМ, показанным на рис. 1). Последние будут рассмотрены ниже, а полученные решения могут быть распространены и на многоразрядные СДМ.

СДМ является системой автоматического регулирования. Однако, в отличие, например, от аналого-импульсной системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), СДМ имеет в своем составе цепь квантования, которая не только обеспечивает формирование сигнала, но и изменяет частотные свойства модулятора. Отметим, что интегратор с суммирующей цепью на входе СДМ эквивалентен фазовому детектору системы ФАПЧ (фаза сигнала в системе ФАПЧ определяется интегралом регулируемой частоты сигнала).

Анализ и описанию СДМ посвящено много работ, например [2–7], однако представленная в них информация зачастую противоречива, и многое еще остается неясным. Например, в одних работах СДМ характеризуется функцией  $\sin x/x$ , в других — функцией полиномиальной фильтрации. Одни авторы считают временную задержку равной интервалу квантования, другие — его половине, а третьи определяют ее как постоянную времени интегратора.

Еще один существенный вопрос — влияние петлевой фильтрации СДМ на подавление шума квантования. Отметим такую особенность. Обычно на входе СДМ включают фильтр нижних частот («antialias» фильтр), обеспечивающий подавление шума, частота которого находится за пределами полосы частот входного сигнала. Что же касается шума квантования, то он формируется в СДМ вместе с выходным сигналом и частично попадает в полосу частот аналогового сигнала. В задачу петлевой фильтрации входит изменение режима квантования таким образом, чтобы шум квантования был смещен

в область более высоких частот (за пределы частотного спектра сигнала) и подавлен на выходе внешним фильтром. Тут возникает вопрос: как осуществляется подавление шума квантования в СДМ с разными видами петлевой фильтрации — в однопетлевом СДМ повышенного порядка и во многопетлевом СДМ.

Цель настоящей работы — с использованием средств моделирования провести анализ, который ответил бы на отмеченные выше вопросы. Автор предлагает считать данную работу дискуссионной.

### Сигнал СДМ

На рис. 2 показаны импульсные последовательности, формируемые одnorазрядным СДМ первого порядка: немодулированная (несущая) последовательность ( $\theta$ ), частота которой  $f_0 = 0,5f_T$ , а также последовательности с положительными ( $a, б$ ) и с отрицательными ( $г, д$ ) уровнями сигнала модуляции. Положительному уровню соответствует увеличение длительности импульсов при постоянных интервалах между импульсами, равных  $1/f_T$ , а отрицательному — увеличение длительности интервалов (при постоянной длительности импульсов, равной  $1/f_T$ ).

На рис. 2, б, г частота переключений (она же — частота шума квантования, его первой гармоники), определяется как  $f_{ш} = 0,25f_T$ .

Частота шума квантования может быть близкой к нулю, если уровень модулирующего сигнала также близок к нулю (при более длительных интервалах, чем показанные на рис. 2, г), или, наоборот, близок к максимуму (при более длительных импульсах, чем показанные на рис. 2, б). Указанный шум квантования попадает в спектр сигнала. Его часто снижают тем, что ограничивают диапазон входных напряжений СДМ. Сказанное, однако, имеет отношение к простейшему случаю формирования СДМ-сиг-

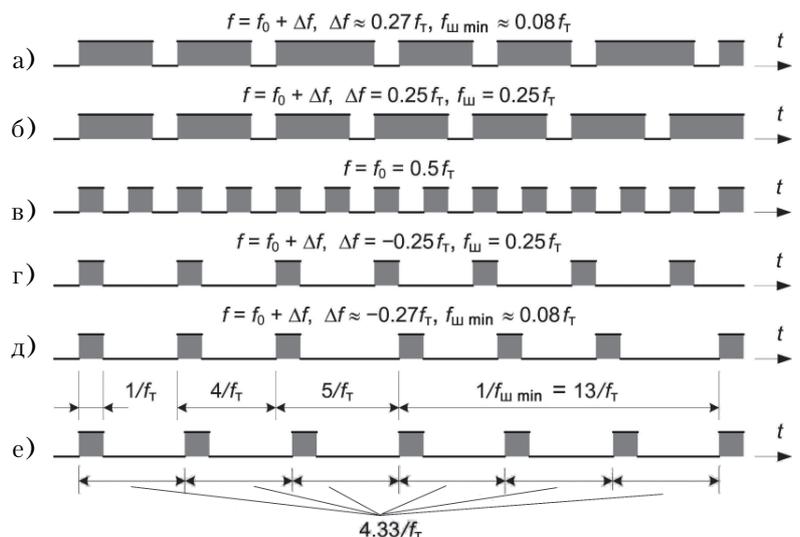


Рис. 2. Сигналы СДМ первого порядка (а–д) и частотно-импульсного модулятора (е)

нала, когда комбинационные составляющие шума квантования отсутствуют.

На рис. 2, а, д показан более сложный случай, когда составляющие шума квантования определяются не только частотами за пределами полосы частот модулирующего сигнала (в данном случае,  $0,25f_T$  и  $0,2f_T$ ), но и более низкой, комбинационной частотой  $f_{ш\min} \approx 0,08f_T$ .

Частота  $f_{ш\min}$  может быть весьма низкой, вплоть до 0 Гц. Создаваемый при этом шум квантования попадает в спектр модулирующего сигнала, являясь, естественно, помехой. Он неизбежен, но с ним, как известно, можно бороться при помощи так называемой петлевой (в составе СДМ) фильтрации. Петлевая фильтрация обеспечивает преобразование шума, сопровождаемое смещением его в область более высоких частот, за пределы полосы частот сигнала.

На рис. 2, е показана для сравнения импульсная последовательность частотно-импульсного модулятора (ЧИМ), причем для того же уровня модулирующего сигнала, что и на рис. 2, д, но с частотой дискретизации  $0,23f_T$  (при периоде  $4,33/f_T$ ). ЧИМ-модулятор не синхронизируется тактовыми импульсами, поэтому частота  $f_T$  для него показана условно (для сравнения ЧИМ- и СДМ-сигналов). Согласно рис. 2, е, ЧИМ-сигнал, частота следования импульсов которого непрерывно изменяется в зависимости от входного сигнала, не сопровождается низкочастотным шумом квантования, свойственным СДМ-сигналу.

На рис. 2, а–д показаны сигналы СДМ первого порядка. Известно, что сигналы СДМ более высоких порядков будут перегруппировываться, вызывая преобразование шума, увеличивающее его частоту (шум будет смещаться за пределы полосы частот сигнала). Будет происходить переформирование шума, известное как «noise sharpening». При этом будет сохраняться пропорциональная зависимость плотности следования посылок «1» (на выходе) от аналогового сигнала (на входе), определяющая коэффициент преобразования сигнала в СДМ.

### СДМ первого порядка

Квантователь в СДМ первого порядка имеет два выхода — до и после ЦАП (см.  $u_2(n)$  и  $u_2(t)$  на рис. 1). Последовательности импульсов и интервалов обоих выходов аналогичны, но первая из них — ненормированная, а вторая нормирована по амплитуде и, соответственно, по площади импульсов (в ЦАП, без фильтра) и предназначена для сравнения с входным аналоговым сигналом (по цепи обратной связи). Нормированная последовательность может быть использована и в качестве выходной. Поскольку выходную последовательность  $u_2(t)$  можно рассматривать как аналоговую, квантователь (вместе с ЦАП) оказывается удобным для построения аналоговых эквивалентных схем СДМ.

Аналоговую эквивалентную цепь квантователя обычно характеризуют эквивалентным коэффициентом передачи

$$\eta = \tau_{\text{инт}} f_T, \quad (1)$$

где  $\tau_{\text{инт}}$  — постоянная времени интегратора.

Коэффициент  $\eta$  может быть учтен в эквивалентной постоянной времени интегратора [2, 7], которая в связи с этим становится равной интервалу квантования:

$$\tau_{\text{эkv}} = \frac{\tau_{\text{инт}}}{\eta} = \frac{1}{f_T} \ll \tau_{\text{инт}}. \quad (2)$$

Отметим, однако, что первичной является временная задержка сигнала, обусловленная квантованием и равная  $1/f_T$ , а вторичными, производными от нее, —  $\eta$  и  $\tau_{\text{эkv}}$ . Возникает вопрос: почему задержка сигнала равна  $1/f_T$ , т. е. длительности посылки СДМ, а не ее половине, как, например, для АИМ (точнее, для односторонней АИМ с прямоугольными импульсами). Причина этого заключается в следующем. Как было отмечено выше, к длительности задержки, равной половине посылки (аналогичной той, которая характерна для АИМ), добавляется еще одна, равная половине длительности предшествующего интервала (посылки), являющегося *интервалом отсчета*. Отметим, что АИМ, в отличие от СДМ, характеризуется *мгновенными отсчетами*.

На рис. 1, б, в приведены две аналоговые эквивалентные схемы, предлагаемые вместо одной, общей. Первая из них (б) характеризует прохождение сигнала  $u_1(t)$ , а вторая (в) — прохождение шума квантования  $u_{ш\text{эkv}}(t)$ . Схемы отличаются между собой значениями постоянной времени интеграторов, которые составляют  $\tau_{\text{эkv}} = \tau_{\text{инт}}/\eta$  и  $\tau_{\text{инт}}$  соответственно. Источник  $u_1(t)$  на рис. 1, в отсутствует, а  $u_{ш\text{эkv}}(t)$  условно считается независимым. Последнее, в части  $u_{ш\text{эkv}}(t)$ , является общепринятым.

В соответствии с изложенным, СДМ характеризуется двумя передаточными функциями первого порядка — для сигнала и для шума.

Для сигнала — это функция типа ФНЧ (фильтра нижних частот), которая, согласно рис. 1, б, определяется как

$$K(p) \approx \frac{1}{1 + p\tau_{\text{эkv}}} = \frac{1}{1 + p/f_T}, \quad (3)$$

где  $p = j\Omega$  — оператор Лапласа, и приближенно равна рассмотренной выше функции  $\sin x/x$  в полосе пропускания, при  $\tau_{\text{эkv}}$  — согласно (2).

Для шума квантования передаточная функция — типа ФВЧ (фильтра верхних частот), которая, согласно рис. 1, в, имеет вид

$$K_{ш}(p) = \frac{p\tau_{\text{инт}}}{1 + p\tau_{\text{инт}}}. \quad (4)$$

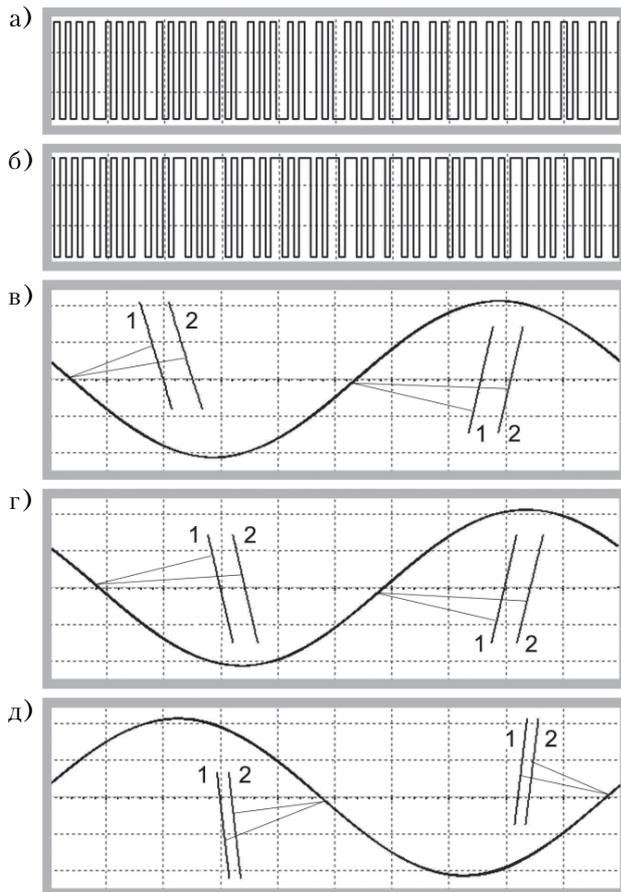


Рис. 3. Сигналы одноразрядного однопетлевого СДМ: выходной импульсный (а, б), входной аналоговый (1) и аналоговая составляющая выходного сигнала (2) первого (в), второго (г) и третьего (д) порядков (петлевой фильтр — типа ПИ)

Начальная временная задержка сигнала на «нулевой» частоте, согласно (3), равна  $\tau_{\text{зад}} = \tau_{\text{эquiv}} = 1/f_T$ .

Рассмотрим результаты моделирования рассматриваемого СДМ. Фрагменты импульсного (квантованного) выходного сигнала СДМ, показанные на рис. 3, а, б, соответствуют отрицательному (а) и положительному (б) уровням входного аналогового сигнала и отличаются, соответственно, длительностями интервалов и импульсов. На рис. 3, в видно, что входной сигнал и отфильтрованная аналоговая составляющая выходного сигнала практически совпадают (в используемом масштабе времени), поэтому там же дополнительно показаны фрагменты этих сигналов в увеличенном масштабе, обозначенные 1 и 2.

В рассматриваемом случае между сигналами существует временная задержка, которая при частоте сигнала 5 кГц и тактовой частоте  $f_T = 2$  МГц близка к начальной, равной 0,5 мкс (на «нулевой» частоте). Постоянная времени интегриатора равна  $\tau_{\text{инт}} = 20$  мкс, но она, как видно из формулы (3), не влияет на величину задержки. Выходной импульсный сигнал (рис. 3, а, б) и его

аналоговые составляющие (рис. 3, в, г, д) здесь и ниже показаны в разных масштабах времени.

Для моделирования СДМ применена модель, описанная в [7]. При сравнении сигналов 1 и 2 использовались два одинаковых фильтра: один — для получения отфильтрованного сигнала 2, другой — в цепи сигнала 1 — для внесения компенсирующих частотных искажений.

**Однопетлевые СДМ второго и третьего порядков**

СДМ второго и более высоких порядков имеют две разновидности, отличающиеся схемами петлевой фильтрации. Первая из них — с дополнительной цепью фильтрации в основной петле (однопетлевой СДМ), другая — с дополнительной петлей (петлями) на входе СДМ.

Схема однопетлевого СДМ повышенного (выше первого) порядка приведена на рис. 4, а. Петлевой фильтр такого СДМ, как и фильтр на рис. 1, а, содержит интегратор « $1/(p\tau_{\text{инт}})$ », но, кроме того, еще и дополнительную цепь фильтрации с передаточной функцией  $K_{\phi}(p)$ .

Рассмотрим две разновидности дополнительной цепи — ФНЧ и пропорционально-интегрирующую (ПИ), передаточные функции которых для СДМ второго порядка имеют вид

$$K_{\phi}(p) = \frac{1}{1 + p\tau_{\phi}}; \tag{5}$$

$$K_{\phi}(p) = 1 + \frac{1}{p\tau_{\phi}}. \tag{6}$$

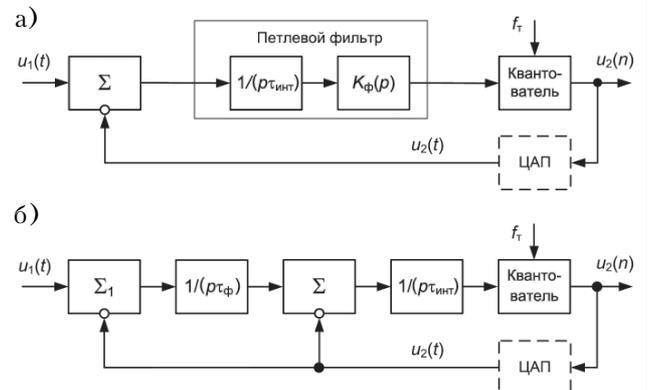


Рис. 4. Структурные схемы одноразрядных СДМ: а — однопетлевого второго и более высоких порядков; б — двухпетлевого второго порядка

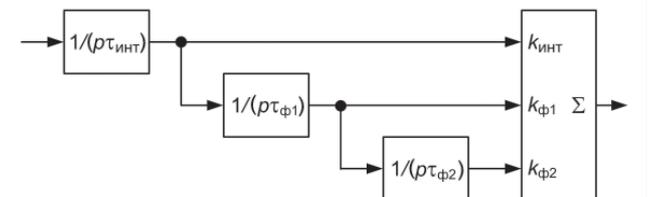


Рис. 5. Схема петлевого фильтра третьего порядка с интегратором (на входе) и ПИ-цепью второго порядка

На рис. 5 приведена схема петлевого фильтра третьего порядка с интегратором на входе и ПИ-цепью второго порядка (петлевой фильтр второго порядка — его частный случай при отсутствии ветви с  $1/(p\tau_{\phi 2})$ ). Выражению (6) соответствуют, в частности, параметры:  $k_{\text{инт}} = k_{\phi 1} = 1$ ,  $k_{\phi 2} = 0$ ,  $\tau_{\phi 1} = \tau_{\phi}$ , где  $\tau_{\phi}$  — постоянная времени в (6).

Вернемся к рис. 3. На рис. 3, *з* показаны входной сигнал и отфильтрованная составляющая выходного сигнала СДМ второго порядка с ПИ, а также их фрагменты в увеличенном масштабе. Применение петлевого фильтра второго порядка с ПИ-цепью реализует в СДМ астатический режим автоматического регулирования, в связи с чем временная задержка сигнала уменьшается — 0,4 мкс вместо 0,5 мкс ( $\tau_{\text{инт}} = 10$  мкс,  $\tau_{\phi 1} = 20$  мкс).

На рис. 3, *д* показаны сигналы для СДМ третьего порядка (с ПИ). Дальнейшее увеличение астатизма, обусловленное более высоким порядком, привело к уменьшению задержки — она стала равной 0,2 мкс ( $\tau_{\text{инт}} = 5$  мкс,  $\tau_{\phi 1} = 10$  мкс,  $\tau_{\phi 2} = 20$  мкс). Отметим, что изменение астати-

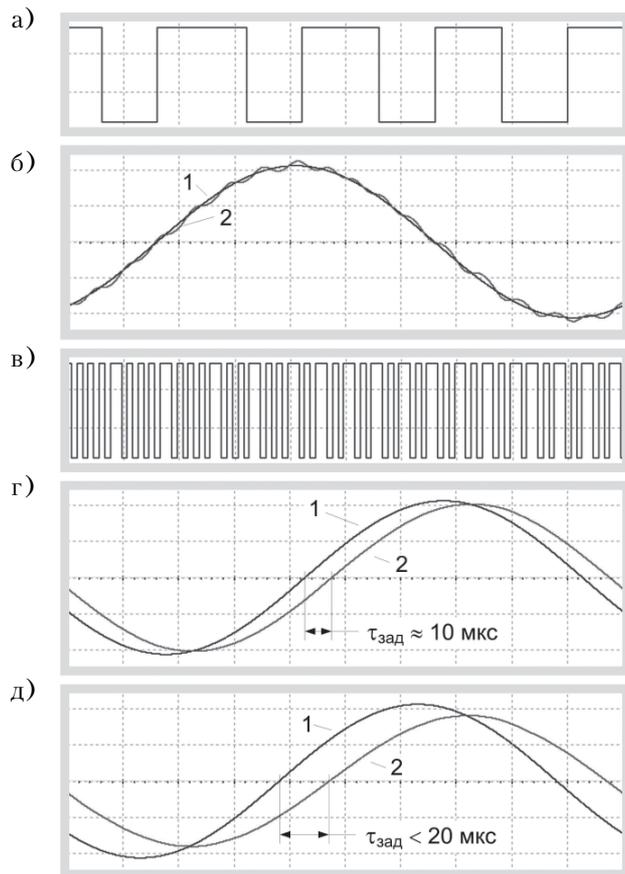


Рис. 6. Сигналы одноразрядных СДМ: импульсный (а) и аналоговые (б) однопетлевого СДМ с дополнительной цепью ФНЧ, импульсный (в) и аналоговые (г, д) двухпетлевого СДМ с разными постоянными времени интеграторов в дополнительной петле (1 — входной сигнал, 2 — аналоговая составляющая выходного сигнала)

зма и, соответственно, задержки сигнала может достигаться не только изменением порядка цепи, но и изменением ее параметров (рис. 5). Пределы возможной задержки, в зависимости от порядка и параметров ПИ-цепи, составляют  $0 < \tau_{\text{зад}} \leq 1/f_T$ .

Помимо рассмотренных выше относительно простых цепей с ПИ, в практических схемах СДМ используются и другие, более сложные цепи петлевой фильтрации, в том числе более высоких порядков.

На рис. 6, а, б показан пример, характерный для неправильно выбираемой цепи петлевой фильтрации. Применена цепь с ФНЧ, характеризующимся функцией (5). Выходной импульсный сигнал СДМ (рис. 6, а) имеет пониженную частоту (при неизменной тактовой частоте  $f_T$ ), а остаточные пульсации, обусловленные ею, видны в составе отфильтрованного сигнала (кривая 2), показанного вместе с входным сигналом (кривая 1) на рис. 6, б. Понижение частоты импульсного выходного сигнала связано с рассмотренным ниже расширением полосы пропускания эквивалентного ФВЧ.

Согласно формулам (5) и (6), для однопетлевого СДМ второго порядка с цепями ФНЧ и ПИ передаточными функциями, соответственно, будут

$$K(p) = \frac{1}{1 + p\tau_{\text{эkv}} + p^2\tau_{\text{эkv}}\tau_{\phi \text{эkv}}}; \quad (7)$$

$$K(p) = \frac{1 + p\tau_{\phi \text{эkv}}}{1 + p\tau_{\phi \text{эkv}} + p^2\tau_{\text{эkv}}\tau_{\phi \text{эkv}}}. \quad (8)$$

Эквивалентная постоянная времени  $\tau_{\text{эkv}}$  в (7) и (8) та же, что и в (2) и (3), а уменьшенной постоянной времени  $\tau_{\phi \text{эkv}}$  соответствует  $\tau_{\phi}$  в (5) и (6), деленная на  $\eta$ . Функция (7), описывающая СДМ с цепью ФНЧ, имеет вид обычной функции ФНЧ. Функция (8) для СДМ с ПИ имеет два отличия от функции (7). Прежде всего, в числителе содержится дополнительный член  $p\tau_{\phi \text{эkv}}$ , характеризующий ее как функцию астатической системы. Кроме того, в качестве коэффициента второго члена используется не постоянная времени  $\tau_{\text{эkv}}$  интегратора на входе петлевого фильтра, а  $\tau_{\phi \text{эkv}}$ , соответствующая  $\tau_{\phi 1}$  на рис. 5 (в варианте без третьего интегратора).

Рассмотрим также передаточную функцию СДМ с ПИ третьего порядка, которая является развитием функции (8):

$$K(p) = (1 + p\tau_{\phi 2 \text{эkv}} + p^2\tau_{\phi 1 \text{эkv}}\tau_{\phi 2 \text{эkv}}) / (1 + p\tau_{\phi 2 \text{эkv}} + p^2\tau_{\phi 1 \text{эkv}}\tau_{\phi 2 \text{эkv}} + p^3\tau_{\text{эkv}}\tau_{\phi 1 \text{эkv}}\tau_{\phi 2 \text{эkv}}), \quad (9)$$

где  $\tau_{\text{эkv}}$ ,  $\tau_{\phi 1 \text{эkv}}$ ,  $\tau_{\phi 2 \text{эkv}}$  соответствуют  $\tau_{\text{инт}}$ ,  $\tau_{\phi 1}$ ,  $\tau_{\phi 2}$  на рис. 5.

Астатизм СДМ, приводящий, в частности, к уменьшению времени задержки, подтверждает-

ся наличием второго и третьего членов в числителе функции (9).

Здесь и ниже используются выражения передаточных функций полиномиальных фильтров, с которыми более подробно можно ознакомиться в [9]. Отметим также, что в рассматриваемых здесь и ниже примерах учтены вопросы устойчивости СДМ, однако в данной работе они не являются предметом рассмотрения.

### Многопетлевые СДМ второго и третьего порядков

Рассмотрим вторую разновидность СДМ второго (в общем случае — более высокого) порядка — с дополнительной петлей (петлями) на входе. Простейшая из них — второго порядка — показана на рис. 4, б. Ее передаточная функция имеет вид

$$K(p) = \frac{1}{1 + p\tau_\phi + p^2\tau_\phi\tau_{\text{экр}}} \approx \frac{1}{1 + p\tau_\phi}, \quad (10)$$

где  $\tau_\phi \gg \tau_{\text{экр}}$ .

Функция  $K(p)$  (10) для СДМ второго порядка приближенно равна функции ФНЧ первого порядка с постоянной времени  $\tau_\phi$  интегратора в дополнительной (внешней) петле.

Отметим, что в данном случае  $\tau_\phi$  определяет относительно узкую полосу частот и, в целях обеспечения входной фильтрации, может выбираться исходя из ширины спектра сигнала. А постоянная времени  $\tau_{\text{экр}}$  в функции (8), которая значительно меньше  $\tau_\phi$ , таким свойством не обладает. Поэтому в случае однопетлевых СДМ дополнительно требуется применение на входе внешних фильтров, рассмотренных выше (anti-alias-фильтров). Желательны они и для многопетлевых СДМ, чтобы исключить попадание внешних шумов в цепь СДМ.

На рис. 6, в показан выходной импульсный сигнал СДМ, а на рис. 6, з, д — входной аналоговый сигнал (кривая 1) и отфильтрованные аналоговые составляющие выходного сигнала (кривые 2) для двух значений постоянной времени интегратора во внешней петле:  $\tau_\phi = 10$  мкс (з) и  $\tau_\phi = 20$  мкс (д) — согласно функции (10), при частоте аналогового сигнала 5 кГц и временных задержках около 10 мкс и менее 20 мкс соответственно.

Отметим, что квантователь не вызывает эквивалентного изменения параметров элементов во внешней петле (в составе передаточной функции), подобно эквивалентному изменению параметров в основной петле.

### Шум квантования СДМ

Для анализа шума квантования СДМ предназначены эквивалентные схемы, одна из которых, для СДМ первого порядка, приведена на рис. 1, в, а другие, для СДМ более высоких порядков, имеют аналогичное построение.

В указанных схемах используется эквивалентный источник шума  $u_{\text{ш экв}}(t)$  с равномерным спектром в полосе частот от 0 до  $f_s/2$ . Но так как шум формируется в квантователе, повторно учитывать коэффициент  $\eta$  в схеме на рис. 1, в не следует.

Соответственно, передаточные функции СДМ для шума квантования (по отношению к  $u_{\text{ш экв}}(t)$ ) будут иметь вид:

— для СДМ первого порядка, рис. 1, в, — согласно (4);

— для однопетлевого СДМ второго порядка с цепью ФНЧ, согласно (5), рис. 4, а:

$$K_{\text{ш}}(p) = \frac{p\tau_{\text{инт}} + p^2\tau_{\text{инт}}\tau_\phi}{1 + p\tau_{\text{инт}} + p^2\tau_{\text{инт}}\tau_\phi}; \quad (11)$$

— для однопетлевого СДМ второго порядка с цепью ПИ, согласно (6), рис. 4, а с учетом рис. 5 (при  $k_{\text{инт}}=k_{\phi 1}=1$ ,  $k_{\phi 2}=0$ ):

$$K_{\text{ш}}(p) = \frac{p^2\tau_{\text{инт}}\tau_\phi}{1 + p\tau_\phi + p^2\tau_{\text{инт}}\tau_\phi}; \quad (12)$$

— для однопетлевого СДМ третьего порядка с цепью ПИ, рис. 4, а с учетом рис. 5 (при  $k_{\text{инт}}=k_{\phi 1}=k_{\phi 2}=1$ ):

$$K_{\text{ш}}(p) = \frac{p^3\tau_{\text{инт}}\tau_{\phi 1}\tau_{\phi 2}}{1 + p\tau_{\phi 2} + p^2\tau_{\phi 1}\tau_{\phi 2} + p^3\tau_{\text{инт}}\tau_{\phi 1}\tau_{\phi 2}}; \quad (13)$$

— для двухпетлевого СДМ второго порядка, рис. 4, б:

$$K_{\text{ш}}(p) = \frac{p^2\tau_{\text{инт}}\tau_\phi}{1 + p\tau_\phi + p^2\tau_{\text{инт}}\tau_\phi}. \quad (14)$$

Функции (4), (11) — (14) являются функциями ФВЧ с полосой пропускания для шума квантования и полосой непропускания (подавления), соответствующей спектру сигнала. Как уже сказано, они не связаны с коэффициентом  $\eta$ . И, наконец, одна из них, (11), характеризующая однопетлевого СДМ второго порядка с цепью ФНЧ, дополнительно содержит в числителе член  $p\tau_{\text{инт}}$  полосовой фильтрации, расширяющий полосу пропускания шума квантования. Расширение полосы сопровождается снижением частоты следования импульсов, показанным на рис. 6, а и на рис. 7, б, е, а также прониканием шума квантования в полосу сигнала.

Для рассмотрения зависимостей шума квантования было проведено моделирование СДМ четырех видов:

- СДМ первого порядка (рис. 7, а, д);
- однопетлевого СДМ второго порядка с дополнительной цепью ФНЧ (рис. 7, б, е);

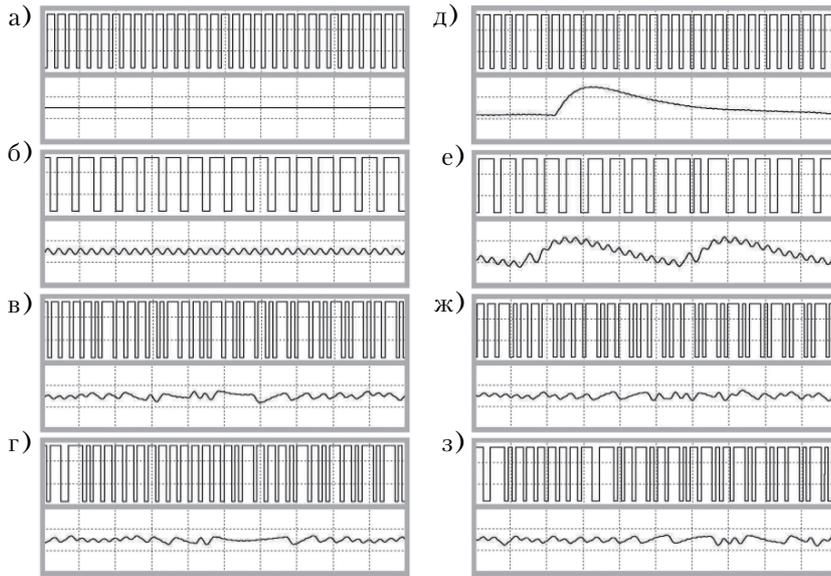


Рис. 7. Выходные сигналы и шум квантования СДМ первого порядка (а, д), однопетлевых СДМ второго порядка с цепями ФНЧ (б, е) и ПИ (в, ж) и двухпетлевого СДМ (з, з) при уровне сигнала  $\llcorner 2/3 \gg$  (а–г) и превышающем  $\llcorner 2/3 \gg$  (д–з) (частота квантования  $f_T = 1$  МГц, цена деления для графиков шума квантования – 20 мкс)

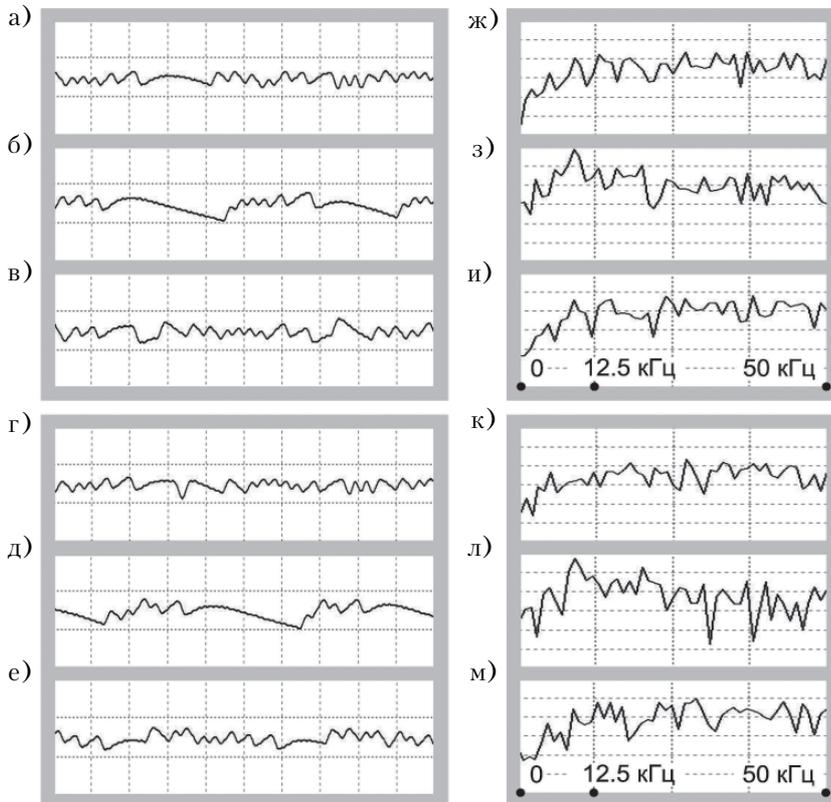


Рис. 8. Шум квантования (а–е) и его спектральная плотность (ж–м) однопетлевого (а–в) и двухпетлевого (з–е) СДМ второго (а, б, з, д) и третьего (в, е) порядков с параметрами цепей, показанными в тексте (цена деления для графиков шума квантования – 20 мкс)

– однопетлевого СДМ второго порядка с дополнительной цепью ПИ (рис. 7, в, ж);  
 – двухпетлевого СДМ второго порядка (рис. 7, з, з).

На рис. 7, а–г показаны выходные сигналы и шум квантования каждого из указанных СДМ для постоянного уровня входного сигнала  $\llcorner 2/3 \gg$  – аналогично сигналу, показанному на рис. 2, б с уровнем  $\llcorner 3/4 \gg$ . Наиболее «чистым» (в части остаточного шума) для уровня сигнала  $\llcorner 2/3 \gg$  является выход СДМ первого порядка (а), затем – выход однопетлевого СДМ с цепью ФНЧ (б) и, наконец, выходы остальных видов СДМ (в, з).

На рис. 7, д–з показаны аналогичные выходные сигналы и шум квантования для тех же СДМ, но для уровня входного сигнала, несколько превышающего  $\llcorner 2/3 \gg$ . Данный сигнал более близок к реальному, он аналогичен показанному на рис. 2, а (с уровнем выше чем  $\llcorner 3/4 \gg$ ). На рис. 7, д виден один из импульсов шума квантования, следующих с низкой частотой и попадающих в спектр выходного сигнала. Он обусловлен расширением импульса в составе выходного импульсного напряжения СДМ, показанного на рис. 7, д.

На рис. 7, е видно частичное преобразование шума, сопровождаемое снижением уровня и повышением частоты следования импульсов шума, а также дроблением их передних фронтов. И, наконец, на рис. 7, ж, з показан шум для двух последних видов СДМ, без указанных импульсов, являющийся результатом высокочастотного дробления. Он аналогичен шуму для уровня сигнала  $\llcorner 2/3 \gg$ , показанному на рис. 7, в, з.

Шум на рис. 7, в, з больше шума, показанного на рис. 7, а, б, и является примерно таким же, как и на рис. 7, ж, з. Это, можно сказать, «обычный» шум низкого уровня, причем высокочастотный (цифровые

## СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ И ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

### Передаточные функции СДМ 1-го и 2-го порядка

Тип СДМ	Передаточные функции	
	Аналоговый сигнал	Шум квантования
1-го порядка	$1 / (1 + \rho\tau_{\text{эКВ}})$	$\rho\tau_{\text{инт}} / (1 + \rho\tau_{\text{инт}})$
2-го порядка, однопетлевой, с ФНЧ	$1 / (1 + \rho\tau_{\text{эКВ}} + \rho^2\tau_{\text{эКВ}}\tau_{\text{ф экв}})$	$(\rho\tau_{\text{инт}} + \rho^2\tau_{\text{инт}}\tau_{\text{ф}}) / (1 + \rho\tau_{\text{инт}} + \rho^2\tau_{\text{инт}}\tau_{\text{ф}})$
2-го порядка, однопетлевой, с ПИ	$(1 + \rho\tau_{\text{ф экв}}) / (1 + \rho\tau_{\text{ф экв}} + \rho^2\tau_{\text{эКВ}}\tau_{\text{ф экв}})$	$\rho^2\tau_{\text{инт}}\tau_{\text{ф}} / (1 + \rho\tau_{\text{ф}} + \rho^2\tau_{\text{инт}}\tau_{\text{ф}})$
2-го порядка, двухпетлевой	$1 / (1 + \rho\tau_{\text{ф}} + \rho^2\tau_{\text{эКВ}}\tau_{\text{ф}}) \approx 1 / (1 + \rho\tau_{\text{ф}})$	$\rho^2\tau_{\text{инт}}\tau_{\text{ф}} / (1 + \rho\tau_{\text{ф}} + \rho^2\tau_{\text{инт}}\tau_{\text{ф}})$

Примечание:  $\tau_{\text{эКВ}} = 1/f_T \ll \tau_{\text{инт}}$

данные не фиксировались). Он не содержит импульсов, показанных на рис. 7, *д*, *е*. Шум может быть дополнительно снижен применением СДМ более высокого порядка, а также оптимизацией формы АЧХ (ее аппроксимации) для выбранного порядка СДМ. На рис. 7 для СДМ второго порядка шум показан для постоянных времени 1 и 2 мкс (2 мкс — при члене первой степени полинома передаточных функций СДМ).

В результате шум квантования, обусловленный близким к реальному сигналом, существенно снижается в СДМ второго порядка — однопетлевом с ПИ (рис. 7, *ж*) и двухпетлевом (рис. 7, *з*). Увеличение порядка СДМ, как уже сказано, приведет к дальнейшему снижению шума.

На рис. 8 показаны шум квантования (*а—е*) и его спектральная плотность (*ж—м*) для разных СДМ:

- однопетлевой СДМ второго порядка с ПИ и  $\tau_{\text{ф}} = 2$  мкс,  $\tau_{\text{инт}} = 1$  мкс (*а*, *ж*);
- то же, но с  $\tau_{\text{ф}} = 8$  мкс,  $\tau_{\text{инт}} = 4$  мкс (*б*, *з*);
- то же, но третьего порядка с  $\tau_{\text{ф2}} = 8$  мкс,  $\tau_{\text{ф1}} = 4$  мкс,  $\tau_{\text{инт}} = 2$  мкс (*в*, *и*);
- для двухпетлевого СДМ (второго порядка), с  $\tau_{\text{ф}} = 2$  мкс,  $\tau_{\text{инт}} = 1$  мкс (*г*, *к*);
- то же, но с  $\tau_{\text{ф}} = 8$  мкс,  $\tau_{\text{инт}} = 4$  мкс (*д*, *л*);
- то же, но третьего порядка, с  $\tau_{\text{ф2}} = 8$  мкс,  $\tau_{\text{ф1}} = 4$  мкс,  $\tau_{\text{инт}} = 2$  мкс (*е*, *м*).

Шум на рис. 8, *а*, *г* аналогичен шуму, показанному на рис. 7 (при тех же параметрах петлевой фильтрации). Шум на рис. 8, *б*, *д* увеличен из-за снижения частоты среза, обусловленного увеличением постоянных времени. И, наконец, шум на рис. 8, *в*, *е* (при тех же сниженных частотах среза) снова уменьшен, но уже за счет увеличения порядка СДМ. Здесь наглядно видно влияние на шум квантования частот среза АЧХ (границы между полосами пропускания и подавления шума в эквивалентных ФВЧ), а также порядка СДМ, влияющего на форму АЧХ, крутизну ее среза и уровень подавления. На форму АЧХ будет влиять также соотношение

указанных постоянных времени, определяющее ее аппроксимацию.

На рис. 8, *ж—м* показаны спектральные плотности шума — для СДМ и их постоянных времени, соответствующих рис. 8, *а—е*, и в диапазоне указанных на рисунке частот. На рис. 8, *з*, *л* видно уплотнение шума в области 10 кГц, соответствующее его увеличению на рис. 8, *б*, *д*.

К сказанному нужно добавить, что смещению преобразуемого шума в область более высоких частот будет способствовать увеличение не только частоты среза, но и частоты квантования.

Для наглядности в **таблице** сведены основные передаточные функции рассмотренных СДМ — для сигнала и шума квантования.

### Заключение

Таким образом, проведенный в данной работе анализ сигма-дельта модулятора с использованием двух предложенных разновидностей аналоговой эквивалентной схемы (с учетом коэффициента  $\eta$  и без него — для сигнала и шума квантования соответственно) позволил объяснить некоторые особенности работы модулятора.

Временная задержка выходного сигнала СДМ первого порядка, определяющая его передающую функцию типа  $\sin x/x$ , является суммой двух равных составляющих, одна из которых обусловлена отсчетами сигнала, которые являются не мгновенными, а «длительными» (на интервалах квантования), другая — формированием квантованных выходных импульсов конечной длительности. Соответственно, отсчеты входного и формирование выходного сигналов производятся непрерывно со сдвигом на один период квантования, которому равна суммарная временная задержка.

Временная задержка выходного сигнала однопетлевого СДМ второго и более высоких порядков, обусловленная применением пропорционально-интегрирующего петлевого фильтра, приводящего к астатизму СДМ, меньше (вплоть до нуля), чем в СДМ первого порядка.

Временная задержка выходного сигнала многопетлевого СДМ второго и более высоких порядков определяется постоянными времени интеграторов в петлях обратной связи на входе СДМ.

Однопетлевые СДМ характеризуются расширенной полосой пропускания, обусловленной частотой квантования, а многопетлевые — суженной полосой, обусловленной постоянными времени петель обратной связи на входе СДМ.

#### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Котельников В. А. О пропускной способности «эффира» и проволоки в электросвязи // В сб.: Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. — Москва: Упр. связи РККА, 1933. — С. 1–19 (Копия в журнале: УФН. — 2006. — Т. 176, № 7. — С. 762–770). [Kotel'nikov V. A. // V sb.: Materialy k I Vsesoyuznomu sezdnu po voprosam tekhnicheskoi rekonstruktsii dela svyazi i razvitiya slabotochnoi promyshlennosti. Moskva: Upr. svyazi RKKA, 1933. P. 1]
2. Голуб В. DTSD и CTSD модуляторы и АЦП с дискретным и непрерывным сигналами на входе // CHIP NEWS Украина. — 2011. — № 2. — С. 68–76. [Golub V. // CHIP NEWS Ukraine. 2011. N 2. P. 68]
3. Schreier R. Understanding Continuous-Time, Discrete-Time Sigma-Delta ADCs and Nyquist ADCs / Electronic Design. — February 20, 2009 (<http://electronicdesign.com>).
4. Kester W., Bryant J. Sigma-Delta Converters // In book: Analog-Digital Conversion. — Analog Devices, 2004. — P. 3.109–3.140 ([www.analog.com](http://www.analog.com)).
5. Шахов Э. К.  $\Sigma\Delta$ -АЦП: Классификация и математические модели // Датчики и системы. — 2006. — № 12. — С. 69–76. [Shakhov E. K.  $\Sigma\Delta$ -ATsP: Klassifikatsiya i matematicheskie modeli // Datchiki i sistemy. 2006. N 12. P. 69]
6. Диденко В. И., Тепловодский А. В., Иванов А. В. Точность моделирования измерительных устройств // Датчики и системы. — 2009. — № 7. — С. 56–62. [Didenko V. I., Teplovodskii A. V., Ivanov A. V. // Datchiki i sistemy. 2009. N 7. P. 56]
7. Голуб В. С. Сигма-дельта модулятор: уточнение эквивалентной схемы и передаточной функции // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2010. — Т. 53, № 6. — С. 48–57. (V. S. Golub, Sigma-Delta Modulator: Refinement of Equivalent

Circuit and Transfer Function // Radioelectronics and Communications Systems. — 2010. — Vol. 53, No. 6. — P. 324–332)

8. Макаренко В. Моделирование радиоэлектронных устройств с помощью программы NI Multisim // Электронные компоненты и системы. — 2008. — №№ 1–4, 6–9, 12. [Makarenko V. // Elektronnyye komponenty i sistemy. 2008. NN 1–4, 6–9, 12]

9. Голуб В. С. Аперидические аналоговые фильтры // Электронные компоненты — 2011. — № 7/8. — С. 11–21. [Golub V. // Elektronnyye komponenty. 2011. N 7/8. P. 11]

Дата поступления рукописи  
в редакцию 23.08 2012 г.

**Golub V. S. Sigma-delta modulator: loop filters and quantization noise.**

*Keywords: continuous sample, sigma-delta modulator, loop filter, quantization noise.*

In this paper the sigma-delta modulator was analyzed with the use of simulation. In particular, the author studied dependence of the quantization noise on the loop filtration. The obtained results explain certain operation features of the modulator and make it possible to give advice as to its application.

Ukraine, Kyiv, Scientific-Production Company «VD MAIS».

**Голуб В. С. Сигма-дельта модулятор: петльові фільтри й шум квантування.**

*Ключові слова: неперервний відлік, сигма-дельта модулятор, петльовий фільтр, шум квантування.*

Проведено аналіз сигма-дельта модулятора з використанням засобів моделювання. Зокрема досліджено залежність його шуму квантування від петльової фільтрації. Одержані результати пояснюють деякі особливості роботи модулятора та дозволяють надати рекомендації щодо його використання.

Україна, м. Київ, Науково-виробнича фірма «VD MAIS».

#### НОВЫЕ КНИГИ

#### НОВЫЕ КНИГИ

**Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. Издание 3-е, исправленное. — Москва: Техносфера, 2012.**

Предлагаемая вниманию читателя книга — третье переработанное издание всемирно известного классического учебника «Цифровая обработка сигналов», опубликованного в 1975 году. В ее основу лег развернутый курс по дискретной обработке сигналов, преподававшийся в течение ряда лет в Массачусетском технологическом институте. Учебник посвящен математическим алгоритмам, реализуемым в дискретных системах. В нем опущены сложные доказательства математических утверждений, но все приемы и методы иллюстрированы многочисленными примерами и задачами. Книга будет полезна как студентам, осваивающим предмет, так и инженерам-разработчикам и системотехникам.

