УДК 517.9 + 517.5

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДЕЯКІ РЕЗУЛЬТАТИ ЛОКАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ

We present results of the investigation of the local behavior of smooth functions in neighborhoods of their regular and critical point and prove theorems on mean values of considered functions similar to the Lagrange theorem on finite increments. We also investigate the symmetry of the derivative of an analytic function in the neighborhood of its multiple zero, prove new statements of the Weierstrass auxiliary theorem related to the critical point of a smooth function of finite smoothness, determine a nongradient vector field of the function in the neighborhood of its critical point, and consider one critical case of the stability of equilibrium position of a nonlinear system.

Приведены результаты исследования локального поведения гладких функций в окрестностях их регулярных и критических точек, доказаны теоремы о средних значениях рассматриваемых функций типа теоремы Лагранжа о конечных приращениях, исследована симметрия производной аналитической функции в окрестности ее кратного нуля, доказаны новые утверждения подготовительной теоремы Вейерштрасса, касающиеся критической точки гладкой функции конечной гладкости, определено неградиентное векторное поле функции в окрестности ее критической точки и рассмотрен один критический случай устойчивости положения равновесия нелинейной системы.

Коли ювіляру виповнилося лише піввіку, мною було виконано роботу з локальної теорії гладких функцій. Готуючись відзначити нинішній 90-літній ювілей Юрія Олексійовича Митропольського, я підготував це доповнення до першої роботи. Отже, мова йде про з'ясування поведінки гладкої функції в околах як її регулярної, так і критичної точок. У першому пункті роботи наведено позначення, деякі визначення та допоміжні твердження. Другий пункт містить теореми про середні значення функції та певні властивості аналітичної функції однієї змінної, що випливають із цих теорем. Третій пункт присвячено підготовчій теоремі Вейєрштрасса для окремих класів гладких функцій. Завершальний четвертий пункт роботи містить твердження про властивості векторного неградієнтного поля функції f в околі критичної точки.

1. Позначення, визначення та допоміжні твердження. Нехай D — область $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — C^r-функція в D з $1 \le r \le \omega$ $(r = a)$, x — точка D, D' — підобласть D, зіркова відносно x.

Позначимо через $f^{(k)}$ похідну від f вигляду

$$\frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

де $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультиіндекс порядку $|k| = \sum_{\upsilon=1}^{n} k_\upsilon$.

Будемо вважати $x = (x_1, \ldots, x_n) \in GL(n \times 1, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$ одностовпчиковим вектором, $\dfrac{\partial}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ векторним оператором першого диференціала, $H_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}$ матричним оператором другого диференціала: $f^{(1)} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \in GL(n \times 1, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$, $H_x f \in GL(n \times n, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$.

Для вектора f позначимо через $\grave{f}$ вектор, отриманий із f транспонуванням. Позначимо відповідно через J_x, G_x та f_k при $|k| = m$ функції

$$J_x(y) = \int_0^1 f^{(1)}(x + \tau y)\, d\tau, \qquad G_x(y) = \int_0^1 (1 - \tau) H_{x+\tau y} f \, d\tau,$$

$$f_k(x, y) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-\tau)^{m-1} f^{(k)}(x+\tau y)\,d\tau, \tag{1}$$

що визначені для $y \in D'$ та належать відповідно просторам C^{r-1}, C^{r-2} та C^{r-m}.

Лема 1. *Якщо* f — C^{r+2}*-функція в* D *з* $1 \le r \le \omega$ $(r = a)$ *та* $x \in D$, *то*

$$f(x+y) = f(x) + `yJ_x(y) = f(x) + `y\,\frac{\partial f(x)}{\partial x} + `yG_x(y)y =$$

$$= f(x) + \sum_{m=1}^{l} V_m(x, y) + \sum_{|k|=l+1} f_k(x, y) y^k \tag{2}$$

для $y \in D'$, $1 \le l \le r$ *та*

$$V_m(x, y) = \frac{1}{m!}\sum_{|k|=m} f^{(k)}(x) y^k. \tag{3}$$

Дійсно, для $y \in D'$

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} f(x+\tau y)\,d\tau = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\tau y)\,d\tau\, y_i = `yJ_x(y),$$

що доводить першу з рівностей (2). Далі розглянемо

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\tau y)\,d\tau = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\tau y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) d\tau =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \int_0^{\tau} \frac{d}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\tau y)\,d\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \int_0^{\tau} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+\tau y)\,d\tau\,d\tau\, y_j =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 (1-\tau)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+\tau y)\,d\tau\, y_j. \tag{4}$$

Отже,

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) y_i + \sum_{i,j} \int_0^1 (1-\tau)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+\tau y)\,d\tau\, y_i y_j =$$

$$= f(x) + `y\,\frac{\partial f(x)}{\partial x} + `yG_x(y)y,$$

що доводить другу з рівностей (2). Більше того, ми довели, враховуючи позначення та рівність (4), що

$$J_x(y) = f^{(1)}(x) + G_x(y)y \tag{5}$$

для $y \in D'$. Нехай (2) має місце для всіх $1 \le l \le j < r$, тобто

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{m=1}^{j} V_m(x, y) + \sum_{|k|=j+1} f_k(x, y) y^k, \tag{6}$$

де V_m та f_k — функції (1) та (3). Із (6) випливає

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{m=1}^{j+1} V_m(x,y) + \sum_{|k|=j+1} \left(f_k(x,y) - \frac{1}{(j+1)!} f_k(x,0) \right) y^k. \tag{7}$$

Далі, враховуючи (1) при $|k| = j+1$, отримуємо

$$f_k(x,y) - \frac{f^{(k)}(x)}{(j+1)!} = \frac{1}{j!} \int_0^1 (1-\tau)^j \big(f^{(k)}(x+\tau y) - f^{(k)}(x)\big) d\tau =$$

$$= \frac{1}{j!} \int_0^1 (1-\tau)^j \int_0^\tau \frac{d}{d\tau} f^{(k)}(x+\tau y)\, d\tau\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{j!} \int_0^1 (1-\tau)^j \int_0^\tau \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_i}(x+\tau y)\, d\tau\, d\tau\, y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{j!} \frac{(-1)}{j+1} \int_0^1 \frac{d}{d\tau}(1-\tau)^{j+1} \int_0^\tau \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_i}(x+\tau y)\, d\tau\, d\tau\, y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(j+1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{j+1} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_i}(x+\tau y)\, d\tau\, y_i =$$

$$= \frac{1}{(j+1)!} \sum_{i=1}^n \int_0^1 (1-\tau)^{j+1} f^{(k+k_i')}(x+\tau y)\, d\tau\, y_i = \sum_{i=1}^n f_{k+k_i'}(x,y) y_i, \tag{8}$$

де через $k_i' = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ позначено i-й одиничний орт, $i = \overline{1, n}$. Із (7) та (8) одержуємо

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{m=1}^{j+1} V_m(x,y) + \sum_{|k|=j+1} \left(\sum_{i=1}^n f_{k+k_i'}(x,y) y_i \right) y^k =$$

$$= f(x) + \sum_{m=1}^{j+1} V_m(x,y) + \sum_{|k|=j+1} \sum_{i=1}^n f_{k+k_i'}(x,y) y^{k+k_i'} =$$

$$= f(x) + \sum_{m=1}^{j+1} V_m(x,y) + \sum_{|k|=j+2} f_k(x,y) y^k,$$

що доводить формулу (2) для $l = j+1$.

Це завершує індукцію, отже, й доведення леми.

Більше того, ми довели рівність

$$f_k(x,y) = \frac{f^k(x)}{|k|} + \grave{}y f_{k+k'}(x,y)$$

для $y \in D'$, $|k| = m$, де через $f_{k+k'}$ позначено вектор $(f_{k+k_1'}, \ldots, f_{k+k_n'})$.

Зауважимо, що (2) — це формула розкладу функції f в ряд Тейлора у точці x з остаточним членом у маловідомій інтегральній формі Коші – Діріхле.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $f \in C^{r+2}$ *в* D. *Тоді*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x) + Q_x(y) y \tag{9}$$

для $y \in D'$, *де*

$$Q_x(y) = \int_0^1 H_{x+\tau y} f \, d\tau. \tag{10}$$

Дійсно, згідно з лемою 1

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+\tau y) d\tau \, y_i,$$

що відповідає формулі (9) у покоординатному її записі.

Визначимо T-індекс функції f у точці x як порядок найнижчої відмінної від 0 форми розкладу $f(x+y) - f(y)$ у ряд Тейлора в точці $y = 0$ та позначимо цей індекс через $\operatorname{tind}_f(x)$. Отже, за визначенням,

$$\operatorname{tind}_f(x) = 1, \tag{11}$$

коли $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0$ хоча б для одного $1 \le i \le n$, та

$$\operatorname{tind}_f(x) = p \ge 2, \tag{12}$$

коли $f^{(k)}(x) = 0$, $1 \le |k| < p$, $\sum_{|k|=p} |f^{(k)}(x)| > 0$.

Наступні властивості T-індексу є очевидними та випливають з його визначення.

Лема 2. *Нехай C^r-функції f та g задовольняють умови*

$$f(x) = g(x) = 0, \quad \operatorname{tind}_f(x) \le r, \quad \operatorname{tind}_g(x) \le r.$$

Тоді

$$\operatorname{tind}_{f+g}(x) \ge \min\left(\operatorname{tind}_f(x), \operatorname{tind}_g(x)\right),$$

$$\operatorname{tind}_{fg}(x) = \operatorname{tind}_f(x) + \operatorname{tind}_g(x),$$

$$\operatorname{tind}_{f \circ g}(x) \ge \operatorname{tind}_f(x) \operatorname{tind}_g(x),$$

$$\operatorname{tind}_{f'_{x_v}} \ge \operatorname{tind}_f(x) - 1, \quad v = \overline{1, n}.$$

Точка x називається регулярною точкою функції f, якщо виконується умова (11), і критичною точкою функції f, якщо виконується умова (12). Значення f у критичній точці називають критичним значенням f.

Лема 3. *Нехай C^r-матриця в D $A(x) \in GL(n \times n, \mathbb{R})$ є симетричною та має $1 \le p < n$ нульових власних чисел. Тоді існують окіл U точки $x \in D$ та невироджена в U C^r-матриця $T(y) \in GL(n \times n, \mathbb{R})$ такі, що*

$$\grave{T}(y) A(y) T(y) = \operatorname{diag}(I, O)$$

для $y \in U$, де $I = \operatorname{diag}(-1, \ldots, -1, +1, \ldots, +1)$ — матриця, кількість (-1) та $(+1)$ якої відповідає кількості від'ємних та додатних власних чисел матриці $A(x)$, O — p-вимірна нульова матриця.

Дійсно, оскільки $A(x)$ — ортогонально подібна до діагональної матриці

$$A(x) = \grave{Q} \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_{n-p}, 0, \ldots, 0) Q, \tag{13}$$

то, вибравши

$$T_0 = \operatorname{diag}\left(\sqrt{|d_1|}, \ldots, \sqrt{|d_{n-p}|}, 1, \ldots, 1\right) Q, \tag{14}$$

отримаємо

$$ {}^{\backprime}T_0 A(y) T_0 = B(y), \tag{15} $$

де

$$ B(x) = \operatorname{diag}(I, O). \tag{16} $$

Подамо B у блочному вигляді

$$ B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ {}^{\backprime}B_2 & B_0 \end{pmatrix}, \tag{17} $$

узгодженому з розбиттям (16) таким чином, що

$$ B_1(x) = I, \quad B_2(x) = O, \quad B_0(x) = O. \tag{18} $$

Із симетричності матриці $B(y)$ і формули (17) випливає симетричність діагональних блоків

$$ B_1(y) = {}^{\backprime}B_1(y), \quad B_0(y) = {}^{\backprime}B_0(y). \tag{19} $$

Із (18), (19) випливає, що в деякому околі точки x матриця $B_1(y)$ задовольняє умови леми [1], згідно з якою існують окіл U точки x та невироджена в U C^r-матриця $T_1(y) \in GL\big((n-p)\times(n-p), \mathbb{R}\big)$ такі, що

$$ {}^{\backprime}T_1(y) B_1(y) T_1(y) = I \tag{20} $$

для $y \in U$.

Нехай

$$ T_2(y) = \begin{pmatrix} T_1(y) & A_0(y) \\ O & E \end{pmatrix}, \tag{21} $$

де E — p-вимірна одинична матриця. Тоді згідно з (17), (20) та (21)

$$ {}^{\backprime}T_2 B T_2 = \begin{pmatrix} I & {}^{\backprime}T_1(B_1 A_0 + B_2) \\ ({}^{\backprime}A_0 B_1 + {}^{\backprime}B_2)T_1 & ({}^{\backprime}A_0 B_1 + {}^{\backprime}B_2)A_0 + {}^{\backprime}A_0 B_2 + B_0 \end{pmatrix}. \tag{22} $$

Покладемо

$$ A_0 = -B_1^{-1} B_2, \tag{23} $$

тоді

$$ {}^{\backprime}T_2(y) B(y) T_2(y) = \operatorname{diag}\big(I, B_0(y) - {}^{\backprime}B_2(y) B_1^{-1}(y) B_2(y)\big) \tag{24} $$

для $y \in U$. Згідно з умовами леми 3, формулами (13) – (15) та (20) – (24) ранг матриці, яка стоїть справа у формулі (24), для всіх $y \in U$ дорівнює рангу матриці $A(y)$, отже, дорівнює $n-p$.

Із вигляду правої частини формули (24) та викладеного вище випливає, що ранг матриці

$$ B_0(y) - {}^{\backprime}B_2(y) B_1^{-1}(y) B_2(y) $$

для $y \in U$ дорівнює нулю, що можливо лише тоді, коли

$$ B_0(y) = {}^{\backprime}B_2(y) B_1^{-1}(y) B_2(y) $$

для $y \in U$.

Для завершення доведення леми досить покласти

$$ T(y) = T_0 T_2(y) $$

для $y \in U$.

Зауваження. Якщо симетрична матриця $A(z) \in GL(n \times n, \mathbb{C})$ є аналітичною в D, має $1 \leq p < n$ нульових власних значень та задовольняє умову

$$A(x) \in GL(n \times n, \mathbb{R}), \tag{25}$$

то твердження леми 3 виконується з аналітичною в U матрицею $T(z)$.

Дійсно, враховуючи умову (25), у доведенні зауваження можливий перехід від матриці $A(y)$ до матриці $B(y)$ згідно з формулами (13) – (15). З огляду на властивість (16) алгоритм побудови матриці $T_1(y)$ для матриці $B(y)$, запропонований при доведенні леми [1] для матриць із $GL(n \times n, \mathbb{R})$, застосовний і для матриць із $GL(n \times n, \mathbb{C})$, отже, надає можливість довести формулу (20) із матрицею

$$T_1(z) \in GL\big((n-p) \times (n-p), \mathbb{C}\big),$$

аналітичною в околі U точки x.

Формули (21) – (24) індиферентні стосовно того, чи є їх об'єкти дійсними, чи комплексними.

Наслідок 2. *Нехай симетрична матриця* $A \in GL\big(n \times n, \mathbb{R}(\mathbb{C})\big)$ *має* $1 \leq$ $\leq p < n$ *нульових власних чисел. Тоді якщо матриця* $A_1 \in GL\big((n-p) \times (n-p), \mathbb{R}(\mathbb{C})\big)$ *із розбиття* A *на блоки*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ {}^{`}A_2 & A_0 \end{pmatrix}$$

є невиродженою, то

$$A_0 = {}^{`}A_2 A_1^{-1} A_2. \tag{26}$$

Дійсно, якщо вибрати матрицю

$$T = \begin{pmatrix} E_1 & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{diag}(E_1, E_2) = E,$$

то згідно з простими підрахунками одержимо

$${}^{`}TAT = \operatorname{diag}(A_1, A_0 - {}^{`}A_2 A_1^{-1} A_2),$$

а врахувавши міркування, викладені при доведенні леми 3, отримаємо рівність (26).

Критичну точку x функції f називають невиродженою, якщо

$$\det H_x f \neq 0. \tag{27}$$

Кількість від'ємних власних чисел матриці $H_x f$ визначають як індекс функції f у критичній точці x та позначають через $\operatorname{ind}_f(x)$. Це поняття індексу ми поширимо й на випадок, коли умова (27) для критичної точки x функції f не виконується, отже, на випадок виродженої критичної точки x функції f, зберігши за ним і позначення $\operatorname{ind}_f(x)$.

2. Теореми про середні значення функції, симетрія та інваріанти. Доведемо ряд тверджень, об'єднаних під назвою теорем про середні значення за аналогією з теоремами про середнє значення типу теореми Лагранжа про скінченні прирости.

Теорема 1. *Нехай* f — C^{r+1}*-функція в* $D \subseteq \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, $1 \leq r \leq \omega$ $(r = a)$, *яка задовольняє умову невиродженості точки* $x \in D$

$$\det H_x f \neq 0. \tag{28}$$

Тоді існують окіл U *точки* x *та* C^r*-дифеоморфізм* $g_x : U \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$,

$$g_x(0) = 0, \qquad \frac{\partial g_x}{\partial y}(0) = \frac{1}{2}E, \tag{29}$$

де E *— одинична матриця, такі, що*

$$f(x+y) = f(x) + f^{(1)}(x + g_x(y))\, y \tag{30}$$

для $y \in U$.

Дійсно, згідно з лемою 1

$$f(x+y) = f(x) + J_x(y)y,$$

отже, (30) справджується, коли $g_x(y)$ задовольняє рівняння

$$J_x(y) = f^{(1)}(x+g). \tag{31}$$

Оскільки

$$J_x(0) = f^{(1)}(x),$$

то точка $y = 0$, $g = 0$ задовольняє рівняння (31). Більше того, в цій точці матриця Якобі правої частини рівняння (31) дорівнює матриці $H_x f$, отже, є невиродженою згідно з умовою (28). Цього достатньо, щоб до рівняння (31) застосувати теорему про неявну функцію та довести всі твердження теореми, крім другої рівності в (29). Для її доведення здиференціюємо рівність

$$J_x(y) = f^{(1)}(x + g_x(y))$$

та, підставивши в результат значення $y = 0$, $g_x(0) = 0$, отримаємо

$$\frac{\partial J_x}{\partial y}(0) = \int_0^1 \tau\, d\tau\, H_x f = H_x f\, \frac{\partial g_x}{\partial y}(0).$$

Отже, одержимо потрібну нам рівність для $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, що й завершує доведення теореми.

Очевидним є зв'язок теореми 1 з формулою Лагранжа про скінченні прирости гладкої функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \qquad a < c < b, \tag{32}$$

стосовно якої теорема 1 стверджує, що

$$c = \frac{a+b}{2} + O\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right).$$

Для справедливості теореми 1 суттєвим є виконання (28), причому ця умова є „грубою" та може виконуватись як для регулярних, так і невироджених критичних точок функції f.

Відмовитись від цієї умови можна для функцій однієї змінної. Для таких функцій справедливими є наступні твердження.

Теорема 2. *Нехай* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— аналітична функція в* D, 0 *— критична точка* f,

$$\operatorname{tin}_f(0) = p.$$

Тоді існують окіл U *точки* 0 *та* $(p-1)$*-на аналітична в* U *функція* g_k, $g_k(0) = 0$, $g_k'(0) \neq 0$, $k = \overline{1,\ p-1}$, *такі, що*

$$f(z) = f(0) + f'(g_k(z))z \tag{33}$$

для $z \in U$ *та* $k = \overline{1,\ p-1}$.

Переходячи до доведення теореми 2, відзначимо, що для аналітичних функцій

$$p < +\infty.$$

Зауважимо також, що при $p = 2$ твердження теореми 2 збігаються з відповідними твердженнями теореми 1, отже, для $p = 2$ теорему 2 доведено.

Нехай $p \geq 3$. Згідно з лемою 1

$$f(z) = f(0) + \int_0^1 f^{(1)}(tz)\,dt\, z,$$

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{(p-2)!}\int_0^1 (1-\tau)^{p-2} f^{(p)}(\tau z)\,d\tau\, z^{p-1}.$$

Отже, для доведення теореми необхідно, щоб функції $g_k(z)$ задовольняли рівняння

$$\int_0^1 t^{p-1}\int_0^1 (1-\tau)^{p-2} f^{(p)}(t\tau z)\,d\tau\,dt\, z^{p-1} = \int_0^1 (1-\tau)^{p-2} f^{(p)}(\tau g)\,d\tau\, g^{p-1}. \tag{34}$$

Покладемо

$$g = hz \tag{35}$$

та отримаємо із (34) рівняння для h

$$\int_0^1 t^{p-1}\int_0^1 (1-\tau)^{p-2} f^{(p)}(t\tau z)\,d\tau\,dt = \int_0^1 (1-\tau)^{p-2} f^{(p)}(thz)\,d\tau\, h^{p-1}$$

або

$$\int_0^1 (1-\tau)^{p-2} f^{(p)}(\tau hz)\,d\tau\, h^{p-1} = \int_0^1 t^{p-1}\int_0^1 (1-\tau)^{p-2} f^{(p)}(t\tau z)\,d\tau\,dt. \tag{36}$$

При $z = 0$ із (36) отримуємо рівняння для початкових значень $h(0) = h_0$ його розв'язків

$$h_0^{p-1} = \frac{1}{p}. \tag{37}$$

Отже, h_0 — це будь-яке із значень

$$h_k = \frac{e_k}{\sqrt[p-1]{p}}, \qquad e_k^{p-1} = 1, \qquad k = \overline{1,\ p-1}. \tag{38}$$

Похідна по g лівої частини рівняння (36) в точці $(0, h_0)$ дорівнює значенню

$$f^{(p)}(0)h_0^{p-2} \neq 0.$$

Цього достатньо, щоб до рівняння (36) застосувати теорему про неявну функцію та отримати із (36) $(p-1)$-ну функцію $h_k(z)$ таку, що функції

$$g_k(z) = h_k(z)z \tag{39}$$

задовольняють усі умови теореми 2.

Аналогом теореми 2 для функцій дійсної змінної є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — C^{p+r}*-функція в* D *з* $1 \le r \le \omega$, 0 — *критична точка* f,

$$\operatorname{tind}_f(0) = p < +\infty.$$

Тоді існують окіл U *точки* 0 *та одна при парному і дві при непарному* p C^r*-функції* $g_k: U \to \mathbb{R}$, $g(0)=0$, $g'(0) \ne 0$, $k \le 2$, *такі, що*

$$f(x) = f(0) + f'(g(x))x$$

для $x \in U$ *та* $k \le 2$.

Повернемося до розгляду аналітичної функції f, яка задовольняє умови теореми 2.

Впорядкуємо функції g_k, позначивши через g ту з функцій g_k, у якої

$$g'(0) = \frac{1}{\sqrt[p-1]{p}} = e_p,$$

через g_k при $p \ge 3$ та $k = \overline{1,\ p-2}$ — ті з функцій g_k, у яких

$$g'(0) = e_k e_p, \qquad e_k = e^{2\pi i k/(p-1)}, \qquad k = \overline{1,\ p-2}.$$

Наслідок 3. *Якщо виконуються умови теореми* 2 *та* $p \ge 3$, *то*

$$f^{(1)}(g(z)) = f^{(1)}(g_1(z)) = \ldots = f^{(1)}(g_{p-2}(z)) \tag{40}$$

для $z \in U$.

Наступна теорема характеризує функції $g_k(z)$.

Теорема 4. *Нехай* $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — *аналітична функція в* D, 0 — *критична точка* f,

$$\operatorname{tind}_f(0) = p, \qquad \operatorname{tind}_{f^{(p)}}(0) = m.$$

Тоді розв'язки $g(z)$ *та* $g_k(z)$, $k = \overline{1,\ p-2}$, $p \ge 3$, *рівняння* (34) *задовольняють умови*

$$\operatorname{tind}_{g'}(0) = \operatorname{tind}_{g'_k}(0) = m,$$

$$\frac{g'_k(0)}{g'(0)} = e_k, \qquad \frac{g_k^{(m+1)}(0)}{g^{(m+1)}(0)} = \frac{\dfrac{p}{p+m} - e_p^m e_k^m}{\dfrac{p}{p+m} - e_p^m}, \tag{41}$$

$$g^{(m+1)}(0) = \frac{(p-2)!(m+1)!}{(p+m-1)!}\left(\frac{p}{p+m} - e_p^m\right) e_p \frac{f^{(p+m)}(0)}{f^{(p)}(0)}.$$

Щоб довести цю теорему, здиференціюємо рівняння (36) та отримаємо диференціальне рівняння для розв'язків рівняння (36):

$$\left[(p-1)\int_0^1(1-\tau)^{p-2}f^{(p)}(\tau hz)\,d\tau+\int_0^1(1-\tau)^{p-2}\tau f^{(p+1)}(\tau hz)\,d\tau\, hz\right]h^{p-2}h' =$$

$$= \int_0^1 t^{p-1}\int_0^1(1-\tau)^{p-2}t\tau f^{(p+1)}(t\tau z)\,d\tau\,dt-\int_0^1(1-\tau)^{p-2}\tau f^{(p+1)}(\tau hz)\,d\tau\, h^p. \qquad (42)$$

Якщо $m = 1$, то

$$f^{(p+1)}(0) \neq 0,$$

отже, підставляючи в (42) значення $z = 0$, отримуємо

$$(p-1)\int_0^1(1-\tau)^{p-2}\,d\tau\, f^{(p)}(0)h_0^{p-2}h'(0) =$$

$$= \left(\int_0^1 t^p\int_0^1(1-\tau)^{p-2}\tau\,d\tau\,dt-\int_0^1(1-\tau)^{p-2}\tau\,d\tau\, h_0^p\right)f^{(p+1)}(0). \qquad (43)$$

Із (43) одержуємо рівняння для $h'(0)$

$$f^{(p)}(0)h_0^{p-2}h'(0) = \frac{f^{(p+1)}(0)}{(p-1)p}\left(\frac{1}{p+1}-h_0^p\right). \qquad (44)$$

Враховуючи рівність (37), із (44) отримуємо

$$h^{(1)}(0) = \frac{f^{(p+1)}(0)}{(p-1)pf^{(p)}(0)}\left(\frac{p}{p+1}-h_0\right), \qquad (45)$$

отже, згідно із заміною (35) та формулою (45)

$$g_k^{(2)}(0) = \frac{2f^{(p+1)}(0)h_k}{(p-1)pf^{(p)}(0)}\left(\frac{p}{p+1}-h_k\right). \qquad (46)$$

Нехай $m \geq 2$. Тоді

$$f^{(p+1)}(0) = \ldots = f^{(p+m-1)}(0) = 0, \quad f^{(p+m)}(0) \neq 0,$$

отже,

$$f^{(p+1)}(z) = \frac{1}{(m-2)!}\int_0^1(1-\theta)^{m-2}f^{(p+m)}(\theta z)\,d\theta\, z^{m-1}. \qquad (47)$$

З урахуванням (47) рівняння (42) набирає вигляду

$$\left[(p-1)\int_0^1(1-\tau)^{p-2}f^{(p)}(\tau hz)\,d\tau\, +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(m-2)!}\int_0^1(1-\tau)^{p-2}\tau^m\int_0^1(1-\theta)^{m-2}f^{(p+m)}(\theta\tau hz)\,d\theta\,d\tau\, h^m z^m\right]h^{p-2}h' =$$

$$= \frac{1}{(m-2)!}\left[\int_0^1 t^{p+m-1}\int_0^1(1-\tau)^{p-2}\tau^m\int_0^1(1-\theta)^{m-2}f^{(p+m)}(\theta\tau z)\,d\theta\,d\tau\,dt\, -\right.$$

$$\left.-\int_0^1(1-\tau)^{p-2}\tau^m\int_0^1(1-\theta)^{m-2}f^{(p+m)}(\theta\tau hz)\,d\theta\,d\tau\, h^{p+m-1}\right]z^{m-1}. \qquad (48)$$

Із (48) випливає

$$h^{(1)}(0) = \ldots = h^{(m-1)}(0) = 0,$$

$$f^{(p)}(0)h_0^{p-2}h^{(m)}(0) = (m-1)\left(\int_0^1 t^{p+m-1}\int_0^1 (1-\tau)^{p-2}\tau^m \int_0^1 (1-\theta)^{m-2}\,d\theta\,d\tau\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 (1-\tau)^{p-2}\tau^m \int_0^1 (1-\theta)^{m-2}\,d\theta\,d\tau\, h_0^{p+m-1}\right) f^{(p+m)}(0). \tag{49}$$

Тоді

$$\int_0^1 (1-\tau)^{p-2}\tau^m\,d\tau = \frac{(p-2)!}{(p-2)!}\int_0^1 (1-\tau)^{p-2}\,\frac{d^{p-1}}{d\tau^{p-1}}\,\frac{\tau^{p+m-1}}{(m+1)\ldots(p+m-1)}\,d\tau =$$

$$= \frac{(p-2)!}{(m+1)\ldots(p+m-1)}. \tag{50}$$

Отже, з урахуванням (37) та (50) із (49) отримуємо

$$f^{(p)}(0)h^{(m)}(0) = \frac{p(p-2)!\,f^{(p+m)}(0)h_0}{(m+1)\ldots(p+m-1)}\left(\frac{1}{p+m} - \frac{h_0^m}{p}\right). \tag{51}$$

Таким чином,

$$h^{(m)}(0) = \frac{(p-2)!\,f^{(p+m)}(0)h_0}{(m+1)\ldots(p+m-1)f^{(p)}(0)}\left(\frac{p}{p+m} - h_0^m\right).$$

З урахуванням заміни (35)

$$g_k^{(1)}(0) = \ldots = g_k^{(m)}(0) = 0, \tag{52}$$

а з огляду на (35) та (51) одержимо

$$g_k^{(m+1)}(0) = (m+1)h^{(m)}(0) = \frac{(p-2)!\,f^{(p+m)}(0)h_0}{(m+2)\ldots(p+m-1)f^{(p)}(0)}\left(\frac{p}{p+m} - h_k^m\right) =$$

$$= \frac{(p-2)!(m+1)!}{(p+m-1)!}\,h_k\left(\frac{p}{p+m} - h_k^m\right)\frac{f^{(p+m)}(0)}{f^{(p)}(0)}. \tag{53}$$

Очевидно, що із формул (38), (39), (46), (52), (53) випливають усі твердження теореми 4, крім тих, які стосуються T-індексів відповідних функцій. Отже, на підставі формул (52) та (53) для завершення доведення теореми залишається показати, що

$$|h_k|^m < \frac{p}{p+m}$$

для цілих $p \geq 2$, $m \geq 1$, або ж з урахуванням позначень

$$e_p^m < \frac{p}{p+m}. \tag{54}$$

Злогарифмувавши (54), отримаємо еквівалентну (54) нерівність

$$-\frac{m+p-1}{p-1}\ln p + \ln(p+m) < 0, \qquad p \geq 2, \qquad m \geq 1. \tag{55}$$

В області $p \geq 2$, $m \geq 1$ ліва частина (55) є монотонно спадною по m, оскільки в цій області її похідна по m від'ємна:

$$-\frac{\ln p}{p-1}+\frac{1}{p+m} < \ln p\left(-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+m}\right) < 0.$$

Отже, нерівність (54) завжди справджується, коли при $m = 1$ та $p \geq 2$ виконується нерівність (55). Залишається довести, що

$$-\frac{p}{p-1}\ln p + \ln(p+1) < 0, \qquad p \geq 2. \tag{56}$$

Нерівність (56) еквівалентна наступному ланцюжку нерівностей: при $p \geq 2$

$$(p-1)\ln(p+1) < p\ln p, \qquad (p+1)^{p-1} < p^p,$$

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p-1} < p, \qquad \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p} < p+1,$$

але для $p \geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p} < e < p+1,$$

що завершує доведення нерівності (56) і теореми 4.

При $p \geq 3$ точка 0 є кратним нулем функції f'. Рівності (40) вказують на наявність симетрії у функції f' в околі її кратного нуля 0, оскільки значення f' в точках околу 0

$$g(z), \ldots, g_{p-2}(z) \tag{57}$$

збігаються. Внаслідок того, що при достатньо малих за модулем значеннях z точки (57) „майже" лежать на променях

$$0 \leq |z| \leq \delta, \qquad \arg z, \arg z + \frac{2\pi}{p-1}, \ldots, \arg z + \frac{2\pi(p-2)}{p-1}, \tag{58}$$

симетрія f' в околі $(p-1)$-го кратного нуля 0 „майже" променева. Співвідношення (41) не залежать ні від функції f, ні від значення критичної точки f, отже, є інваріантами, і ці інваріанти характеризують симетрію f' в околі її кратного нуля 0. Перший із них визначає цю симетрію формулами (58), другий уточнює її величинами більш високого відносно $|z|$ порядку.

Розглянемо випадок, не охоплений теоремами, наведеними вище, коли 0 — регулярна точка f та критична точка f'. Тоді справедливим є наступний результат.

***Наслідок* 4.** *Нехай $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — аналітична функція в D, 0 — регулярна точка f та критична точка f',*

$$\operatorname{tind}_{f'}(0) = p-1, \qquad \operatorname{tind}_{f^{(p)}}(0) = m. \tag{59}$$

Тоді існують окіл U точки 0 та $(p-1)$-на аналітична в U функція g_k з властивостями, визначеними теоремою 4 *при $p \geq 3$, такі, що*

$$f(z) = f(0) + f'(g_k(z))z$$

для $z \in U$ та $k = \overline{1,\, p-1}$.

Дійсно, розглянемо функцію

$$F(z) = f(z) - f(0) - f'(0)z. \tag{60}$$

Для цієї функції виконуються умови

$$F(0) = F'(0) = 0, \qquad F^{(2)}(z) = f^{(2)}(z), \tag{61}$$

тому згідно з (59) та (61)

$$\operatorname{tind}_F(0) = p, \qquad \operatorname{tind}_{F^{(p)}}(0) = m.$$

Отже, до F можна застосувати теорему 2 та отримати розклад

$$F(z) = F(0) + F'(g_k(z))z, \tag{62}$$

де функції g_k мають властивості, вказані теоремами 2 та 4 для $p - 1 \geq 2$.

Із (60) та (62) випливає

$$f(z) = f(0) + f'(g_k(z))z$$

для $z \in U$ та $k = \overline{1,\ p-1}$, що й завершує доведення наслідку.

Якщо ж $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то наслідок 4 буде справджуватися для $f \in C^{p+m+2}$, $1 \leq$ $\leq r \leq \omega$, $g_k \in C^r$, $k \leq 2$ та $p < +\infty$.

З'ясуємо питання про межу околу U. Із доведення теореми 2 випливає, що U визначається умовами існування розв'язків відповідних рівнянь для g та умовами належності їх розв'язків $g(z)$, $z \in U$, області D'. Метод доведення теореми 2 може слугувати, таким чином, алгоритмом наближеного визначення меж області U. Як ним можна користуватися, проілюструємо на прикладі функції f, яка задовольняє умову

$$\operatorname{tind}_f(0) = 2. \tag{63}$$

Тоді з рівняння для g

$$f^{(1)}(g) = \int_0^1 f^{(1)}(\tau z)\,d\tau \tag{64}$$

одержимо

$$g(0) = 0. \tag{65}$$

Здиференціюємо (64) та отримаємо диференціальне рівняння для розв'язків рівняння (64), які існують, оскільки виконується умова

$$f^{(2)}(0) \neq 0, \tag{66}$$

що випливає із (63). Отже,

$$f^{(2)}(g)g' = \int_0^1 \tau f^{(2)}(\tau z)\,d\tau. \tag{67}$$

Враховуючи (66), задача Коші (65), (67) має єдиний аналітичний розв'язок $g(z)$, і цей розв'язок існує для тих $z \in U \subseteq D'$, для яких існує та належить області D' аналітичний розв'язок рівняння (67), що визначається початковим значенням (65).

Нехай круг

$$|z| \leq r \tag{68}$$

належить D' та виконуються умови

$$0 < \alpha \leq |f^{(2)}(z)| \leq \beta \tag{69}$$

для z із (68). Тоді для z із круга (68) та g із круга

$$|g| \leq r \tag{70}$$

рівняння (67), записане у вигляді рівняння, розв'язаного відносно похідної

$$g' = \frac{\int_0^1 \tau f^{(2)}(\tau z)\,d\tau}{f^{(2)}(g)}, \tag{71}$$

задовольняє умову

$$M = \max\left|\frac{\int_0^1 \tau f^{(2)}(\tau z)\,d\tau}{f^{(2)}(g)}\right| \le \frac{\beta}{2\alpha},$$

де максимум визначається для z, g із області (69), (70).

Відома теорема Коші з аналітичної теорії диференціальних рівнянь [2] гарантує існування та єдиність аналітичного в крузі

$$|z| < r(1 - e^{-\alpha/\beta}) = r_1 \tag{72}$$

розв'язку $g(z)$ задачі Коші (65), (71) такого, що

$$|g(z)| \le r$$

для z із області (72).

Отже, можна стверджувати, що окіл U точки 0, про який іде мова в теоремі 2, в розглядуваному випадку виконання умов (63), (69) містить у собі круг (72).

З іншого боку, нулі функції $f^{(2)}$ в області D' — особливі точки рівняння (67), коли вони не є нулями правої частини цього рівняння. Отже, якщо

$$f^{(2)}(z_0) = 0, \qquad \int_0^1 \tau f^{(2)}(\tau z_0)\,d\tau \ne 0, \tag{73}$$

то $z_0 \notin U$.

Підсумовуючи викладене вище стосовно межі U, отримуємо таке твердження.

***Наслідок* 5.** *Нехай виконуються умови теореми* 2 *для* $p = 2$ *та умова* (69). *Тоді* (33) *справджується для* z *із області*

$$|z| < r_1$$

та не справджується для $z = z_0$, *визначеного умовами* (73).

Насамкінець, зауважимо, що c із формули (32) згідно з теоремою 3 визначається формулою

$$c = a + e_p(b-a) + O\big(e_p^2(b-a)^2\big)$$

при виконанні, звичайно, умови, що $f^{(2)}$ в точці a має нуль відповідного порядку.

3. Підготовча теорема Вейєрштрасса. Нехай C^{r+2}-функція в області $D \subseteq \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ f у точці $0 \in D$ має невироджену критичну точку та $1 \le r \le \omega$, $r = a$. Тоді згідно з формулою (2)

$$f(x) = f(0) + {}^{\backprime}x G(x) x \tag{74}$$

для $x \in D'$, де симетрична матриця

$$G(x) = \int_0^1 (1-\tau) H_{\tau x} f \, d\tau$$

належить C^r для $x \in D'$ та невироджена в деякому околі точки 0. Останнє твердження випливає з рівності

$$G(0) = \frac{1}{2} H_0 f$$

та невиродженості матриці $H_0 f$.

Із леми Морса [1, 3] випливає C^r-еквівалентність функцій f та $f(0) + {}^{`}xG(0)x$ в деякому околі точки 0.

Невиродженість критичної точки 0 функції f забезпечує її ізольованість як критичної точки.

При виконанні цієї ж умови — ізольованості критичної точки — були отримані основні результати сучасної трактовки підготовчої теореми Вейєрштрасса [4 – 9].

На підставі викладеного вище своєрідним винятком із цього загалу є наступне твердження та його аналітичний аналог.

Теорема 5. *Нехай* 0 — *критична точка* C^{r+2}-*функції* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \le r \le \omega$, *така, що матриця* $G(x)$ *у деякому околі точки* 0 *має* $1 \le p < n$ *нульових власних чисел. Тоді існують окіл* U *точки* 0 *та* C^r-*дифеоморфізм* $g: U \to \mathbb{R}^n$, $g(0) = 0$, *такі, що*

$$f\big(g(x)\big) = f(0) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n-p} x_i^2 \tag{75}$$

для $x \in U$, *де*

$$k = \operatorname{ind}_f(0).$$

Дійсно, матриця $G(x)$ задовольняє всі умови леми 3, тому в деякому околі U точки 0 існує невироджена C^r-матриця $T(x) \in GL(n \times n, \mathbb{R})$ така, що

$${}^{`}T(x)G(x)T(x) = \operatorname{diag}(I, 0) = \operatorname{diag}(-1, \ldots, -1, +1, \ldots, +1, 0, \ldots, 0) \tag{76}$$

для $x \in U$, де матриця I має таку кількість (-1) на діагоналі, яка дорівнює кількості від'ємних власних чисел матриці $G(0)$. Оскільки

$$G(0) = \frac{1}{2} T_0 f,$$

то кількості від'ємних власних чисел матриць $G(0)$ та $T_0 f$ збігаються і дорівнюють згідно з визначенням індексу f у критичній точці цьому індексу. Отже, кількість (-1) в (76) дорівнює числу $k = \operatorname{ind}_f(0)$.

Виконаємо в рівності (74) заміну змінних

$$x = T(x)y. \tag{77}$$

Оскільки рівняння

$$T^{-1}(x)x = y \tag{78}$$

задовольняє в околі точки $x = 0$, $y = 0$ умови про неявну функцію, існує розв'язок g рівняння (78)

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad g \in C^r \quad \text{в} \quad U,$$

$$g(0) = 0, \quad \det g'(0) \neq 0, \tag{79}$$

такий, що згідно з заміною змінних (79)

$$f\big(g(y)\big) = f(0) + {}^{\backprime}y \operatorname{diag}(I, 0)\, y \tag{80}$$

для $y \in U$. З урахуванням кількості (-1) в I формула (80) збігається з формулою (75) з точністю до позначень, що завершує доведення теореми.

Як і у випадку з лемою Морса, аналітичний варіант теореми 5 сформулюємо таким чином.

Теорема 6. *Нехай* 0 — *критична точка* C^a*-функції* $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *така, що матриця* $G(z)$ *у деякому околі точки* 0 *має* $1 \le p < n$ *нульових власних чисел. Тоді існують окіл* U *точки* 0 *та* C^a*-дифеоморфізм* $g : U \to \mathbb{C}^n$, $g(0) = 0$, *такі, що*

$$f\big(g(z)\big) = f(0) + \sum_{i=1}^{n-p} z_i^2$$

для $x \in U$.

Дійсно, якщо $G(0) \in GL(n \times n, \mathbb{R})$, то твердження теореми 6 випливають із формул вигляду (76), (77) та (79) згідно із зауваженням до леми 3. У загальному випадку потрібно використати можливість подання матриці $G(0)$ у канонічному вигляді [8]

$${}^{\backprime}Q\, G(0)\, Q = \operatorname{diag}(G_1, G_0), \quad \det G_1 \neq 0, \tag{81}$$

з ортогональною матрицею Q та невиродженою матрицею $G_1 \in GL\big((n-p) \times (n-p), \mathbb{C}\big)$ і звести формулу (74) до вигляду (74), але з матрицею $G(x)$ такою, що в її блочному записі

$$G(x) = \begin{pmatrix} G_1(x) & G_2(x) \\ {}^{\backprime}G_2(x) & G_0(x) \end{pmatrix}$$

матриці $G_1(x)$ та $G_0(x)$ при $x = 0$ збігаються з блоками G_1 та G_0 із формули (81). Тоді в деякому околі U_1 точки 0 матриця $G(x)$ має $1 \le p < n$ нульових власних чисел та задовольняє умову

$$\det G_1(x) \neq 0.$$

Згідно з наслідком 2

$$G_0(x) = {}^{\backprime}G_2(x)\, G_1^{-1}(x)\, G_2(x) \tag{82}$$

для $x \in U_1$. Враховуючи (82), отримуємо, що матриця

$$E + A(x) = \begin{pmatrix} E_1 & -G_1^{-1}(x) G_2(x) \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

задовольняє умову

$$\big(E + {}^{\backprime}A(x)\big)\, G(x)\, \big(E + A(x)\big) = \operatorname{diag}\big(G_1(x), 0\big)$$

для $x \in U_1$.

Заміна змінних

$$x = (E + A(x))\, y$$

надає можливість обернення в околі U_2 точки $x = 0,\ y = 0$

$$x = g_1(y), \qquad g_1(0) = 0, \qquad \det g_1'(0) \neq 0,$$

та зводить (74) до вигляду

$$f(g_1(y)) = f(0) + {}^{`}y \operatorname{diag}\left(G_1(g_1(y)), 0\right) y$$

для $y \in U_2$, при цьому матриця $G_1(g_1(y))$ є симетричною та невиродженою в околі точки 0.

Функція

$$F(y) = {}^{`}y \operatorname{diag}\left(G_1(g_1(y)), 0\right) y = {}^{`}(y_1, \ldots, y_{n-p}) G_1(g_1(y))(y_1, \ldots, y_{n-p}) \tag{83}$$

як функція змінних $y_1, \ldots, y_{n-p}$ та параметрів $y_{n-p+1}, \ldots, y_n$ при фіксованих значеннях параметрів задовольняє умови леми Морса для аналітичних функцій, отже, C^a-еквівалентна функції

$$f(0) + \sum_{i=1}^{n-p} y_i^2. \tag{84}$$

Із методу доведення леми Морса [3] випливає, що заміна, яка надає функції (83) вигляду (84), зберігає гладкість функції F за параметрами, отже, ця заміна є аналітичною як за $y_1, \ldots, y_{n-p}$, так і за $y_{n-p+1}, \ldots, y_n$ в деякому околі точки 0. Це завершує доведення теореми 6.

Проаналізуємо умову ізольованості критичної точки $0 \in D$ аналітичної в D функції f. Для цього використаємо як означення ізольованості критичної точки, так і наслідок, що виконується для f в околі ізольованої критичної точки. Цей наслідок стверджує, що в околі ізольованої критичної точки 0 аналітичної функції f кільце відображень $x \to \dfrac{\partial f}{\partial x}$ є скінченновимірним. А це означає, що рівняння

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x) h_\nu = x^k \tag{85}$$

для деякого цілого r та кожного мультиіндексу $k = (k_1, \ldots, k_n)$,

$$|k| = r, \tag{86}$$

має аналітичний у деякому околі U точки 0 розв'язок

$$h = h_k(x) = \left(h_{1k}(x), \ldots, h_{nk}(x)\right).$$

Інакше кажучи, розмірність f' в 0 визначається найменшим числом r, що надає можливість отримати розклад

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_\nu} h_{\nu k}(x) = x^k \tag{87}$$

в околі U точки 0 кожного монома x^k степеня $|k| = r$ за C^a-функціями в U $h_k = (h_{1k}, \ldots, h_{nk})$.

У зв'язку з цим важливим для подальшого викладу є наступне твердження.

Лема 4. *Нехай* 0 — *ізольована критична точка* C^a*-функції в* D f *така, що* f' *в* 0 *має розмірність* r. *Тоді якщо* $g \in C^a$ *в* D,

$$g(0) = 0, \qquad \operatorname{tind}_g(0) \geq r+2,$$

то 0 — *ізольована критична точка функції* $f+g$, *а* $f'+g'$ *в* 0 *має розмірність, не більшу за* r.

Дійсно, із умов леми випливає розклад (87) та

$$\frac{\partial g}{\partial x_\nu}(x) = \sum_{|k|=r} g_{\nu k}(x) x^k, \qquad \nu = \overline{1, n}, \tag{88}$$

де

$$g_{\nu k}(0) = 0 \tag{89}$$

для кожного із значень індексів ν та k, які визначаються формулою (88). З урахуванням розкладу (87) отримаємо

$$\frac{\partial g}{\partial x_\nu}(x) = \sum_{|k|=r} g_{\nu k}(x) \sum_{j=1}^{n} f_j(x) h_{jk}(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \sum_{|k|=r} g_{\nu k}(x) h_{jk}(x) \tag{90}$$

для $x \in U$.

Позначимо через $G_{\nu j}$ функції

$$\sum_{|k|=r} g_{\nu k}(x) h_{jk}(x)$$

та запишемо (90) у вигляді

$$\frac{\partial g}{\partial x_\nu}(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) G_{\nu j}(x), \qquad \nu = \overline{1, n}. \tag{91}$$

Розглянемо рівняння

$$f'(x) + g'(x) = 0$$

в околі точки 0. Для $x \in U$ це рівняння з урахуванням розкладів (87) та (91) можна подати в матричному вигляді

$$\big(E + G(x)\big) f'(x) = 0, \tag{92}$$

де E — одинична матриця, G — матриця

$$\{G_{\nu j}(x)\}.$$

Із (89) випливає, що знайдеться такий окіл U точки 0, в якому рівняння (92) еквівалентне рівнянню

$$f'(x) = 0.$$

Це означає, що критична точка 0 функції $f+g$ є ізольованою.

Для визначення розмірності $f'+g'$ в 0 розглянемо рівняння

$$\grave{h}\big(E + G(x)\big) f'(x) = x^k, \tag{93}$$

яке є записом у матричному вигляді рівняння (85) для функції $f+g$. Якщо мультиіндекс k задовольняє умову (86), то правильним є розклад (87). Отже, рівняння (93) для $x \in U$ має вигляд

$$\grave{h}\big(E + G(x)\big) f'(x) = \grave{h}_k(x) f'(x),$$

а його розв'язок

$$h = `(E + G(x))^{-1} h_k(x)$$

є аналітичним в околі U точки 0. Звідси випливає, що розмірність $f' + g'$ в 0 не більша, ніж r. Це завершує доведення леми.

Наслідок 6. *Якщо* 0 — *ізольована критична точка* C^a*-функції* $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, *то вона є ізольованою критичною точкою будь-якого полінома Тейлора* f *у точці* 0 *степеня* $l \geq r + 1$, *де* r — *розмірність* f' *в* 0.

Для отримання цього наслідку достатньо подати f в околі точки 0 у вигляді суми

$$f(x) = f(0) + \sum_{m=p}^{r} V_m(x) + \sum_{m=r+1}^{l} V_m(x) + \sum_{|k|=l+1} f_k(x)x^k \tag{94}$$

та застосувати лему, підставивши замість g вираз $\sum_{|k|=l+1} f_k(x)x^k$ із (94) зі знаком мінус.

Наслідок зводить дослідження ізольованості критичної точки 0 функції f до дослідження ізольованості критичної точки полінома Тейлора P в точці 0 функції f степеня $l \geq r + 1$

$$P(x) = f(0) + \sum_{m=p}^{l} V_m(x), \tag{95}$$

де

$$p = \operatorname{tind}_f(0) \geq l.$$

Згідно з формулою (10) для $x \in D'$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = Q(x)x, \qquad Q(x) = \int_0^1 H_{\tau x} f \, d\tau,$$

аналогічно,

$$\frac{\partial V_m}{\partial x}(x) = Q_m(x)x, \qquad Q_m(x) = \int_0^1 H_{\tau x} V_m \, d\tau.$$

Якщо 0 не є ізольованою критичною точкою f, то існує послідовність $x_n \to 0$, $n \to \infty$, така, що

$$Q(x_n)x_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{96}$$

Отже,

$$\det Q(x_n) = 0$$

та x_n — власні значення $Q(x_n)$, що відповідають нульовому власному числу $Q(x_n)$.

Таким чином, 0 не є ізольованою критичною точкою P, якщо (96) виконується для $P(x)$:

$$P(x_n)x_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{97}$$

Подамо x_n у вигляді

$$x_n = r_n \theta_n, \qquad \| \theta_n \| = 1,$$

тоді із (95) та (97) отримаємо

$$\big(Q_p(\theta_n) + r_n Q_{p+1}(\theta_n) + \ldots + r_n^{l-p}\, Q_l(\theta_n)\big)\theta_n = 0 \tag{98}$$

для $n = 1, 2, \ldots$.

Нехай θ — гранична точка послідовності θ_n, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді, переходячи в (98) до границі, одержуємо

$$Q_p(\theta)\theta = 0,$$

отже, на промені

$$x = r\theta, \qquad r \in R, \qquad r > 0,$$

справджується рівність

$$Q_p(x)x = 0.$$

Це означає, що 0 не є ізольованою критичною точкою форми V_p.

Таким чином, ізольованість критичної точки 0 форми V_p, де

$$p = \operatorname{tind}_f(0),$$

є достатньою умовою ізольованості цієї точки як критичної точки C^a-функції в Df. Цим фактом ми скористаємося трохи пізніше.

У випадку, коли f — гладка функція, твердження про локальне кільце відображень $x \to \dfrac{\partial f}{\partial x}$, яке є наслідком ізольованості критичної точки C^a-функції f, перетворюється на основну умову підготовчої теореми Вейєрштрасса.

Коли $f \in C^{\omega}$, результат відображення $x \to \dfrac{\partial f}{\partial x}$ належить простору C^{ω}-функцій, що сприяє успішному розгляду цього випадку та доведенню підготовчої теореми Вейєрштрасса для нього.

Якщо ж f має скінченну гладкість, вказане відображення переводить C^r-функції в C^{r-1}-функції, що суттєво ускладнює розгляд даного випадку та доведення для нього підготовчої теореми Вейєрштрасса. Дійсно, вже при визначенні розмірності f' в 0 виникає неоднозначність, пов'язана з питанням про гладкість коефіцієнтів h_k розкладу мономів x^k

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x)\, h_{\nu k}(x) = x^k$$

степеня $|k| = r$, оскільки величина r безпосередньо залежить від неї.

Подолати такого роду та подібні труднощі при доведенні підготовчої теореми Вейєрштрасса для функції скінченної гладкості вдалося, пов'язавши умови цієї теореми не з розмірністю f' в 0, а з розмірністю P' в 0, де P — поліном Тейлора в точці 0 функції f [8]. Інтерпретуючи P як C^a-функцію $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, отримуємо ізольованість критичної точки 0 в $\mathbb{C}^n$ функції P як одну з основних умов підготовчої теореми Вейєрштрасса для випадку гладких функцій f скінченної гладкості.

Інтерпретуючи P як C^{ω}-функцію $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, отримуємо умову скінченновимірності локального кільця відображень $x \to \dfrac{\partial P}{\partial x}$ як іншу основну умову підготовчої теореми Вейєрштрасса для випадку гладких функцій f скінченної гладкості.

Одним із питань, недостатньо досліджених авторами сучасної трактовки підготовчої теореми Вейєрштрасса як для аналітичного, так і для гладкого випадків, є питання мінімізації степеня полінома Тейлора P функції f, еквівалентного цій функції, в критичній точці.

Для випадку гладкої функції скінченної гладкості таким же мало дослідженим є питання про конкретизацію залежності гладкостей функції f і дифеоморфізму g, що здійснює еквівалентність f та P.

Наступний результат певною мірою пояснює обидва питання для одного класу функцій, на думку автора, достатньо широкого.

Домовимось говорити, що форму

$$\sum_{|k|=p} a_k x^k$$

можна звести до невиродженого канонічного вигляду, якщо її можна звести невиродженою лінійною заміною координат до форми

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p, \quad a_\nu \neq 0, \quad \nu = \overline{1, n}. \tag{99}$$

Теорема 7. *Нехай* 0 — *критична точка* C^{d+s+l}*-функції* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *з* $1 \leq \leq s \leq \omega$ *та*

$$\operatorname{tind}_f(0) = p.$$

Тоді якщо p*-форму функції* f *в* 0

$$V_p(x) = \frac{1}{p} \sum_{|k|=p} f^{(k)}(0) x^k$$

можна звести до невиродженого канонічного вигляду, то можна вказати $l(s)$ *та* s_0, *окіл* U *точки* 0 *та* C^{s_0+s}*-дифеоморфізм* $g: U \to \mathbb{R}^n$, $g(0) = 0$, *такі, що при* $l > l(s)$ *та* $x \in U$

$$f(g(x)) = f(0) + P(x),$$

де P — *поліном Тейлора* f *в точці* 0 *степеня, не вищого за*

$$d = \max((p-2)n, p).$$

Перш ніж доводити теорему, подамо f у вигляді (2)

$$f(x) = f(0) + \sum_{m=p}^{l} V_m(x) + \sum_{|k|=l+1} f_k(x) x^k,$$

де l — настільки велике число, наскільки це буде необхідно.

Лема 5. *Нехай виконуються умови теореми* 7. *Тоді існує поліном* $Q(x)$, $Q(0) = 0$, $\operatorname{tind}_Q(0) \geq 2$, *такий, що*

$$\sum_{m=p}^{l} V_m(x + Q(x)) = \sum_{m=p}^{d} V_m(x) + R(x),$$

де

$$\operatorname{tind}_R(0) \geq l + 1. \tag{100}$$

При доведенні леми будемо вважати, що зведення форми V_p до канонічного вигляду здійснено, отже, V_p — форма (99). Нехай $\mathcal{P}$ — кільце поліномів змінної x, $g \in \mathcal{P}$, $g(0) = 0$,

$$\operatorname{tind}_g(0) \ \geq \ d_1 \ \geq \ 2. \tag{101}$$

Тоді, враховуючи (99), отримуємо

$$\sum_{m=p}^{l} V_m(x+g(x)) \ = \ \sum_{m=p}^{l} V_m(x) \ + \ p \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} g_\nu(x) \ +$$

$$+ \ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{j=2}^{p} \binom{j}{p} x_\nu^{p-j} g_\nu^j(x) \ + \sum_{m=p+1}^{l} \big(V_m(x+g(x)) - V_m(x)\big). \tag{102}$$

Нехай $F(g)\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ визначено формулою

$$F\big(g(x)\big) \ = \ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{j=2}^{p} \binom{j}{p} x_\nu^{p-j} g_\nu^j(x) \ + \sum_{m=p+1}^{l} \big(V_m(x+g(x)) - V_m(x)\big). \tag{103}$$

Згідно з лемою 2 та (101)

$$\operatorname{tind}_{F(g)}(0) \ \geq \ \min\left(\min_{2 \leq j \leq p} (p - j + dj), \ p + d_1 \right) \ = \ p + d_1 .$$

Більше того, якщо $g_1(x) \in \mathcal{P}$, $g_1(0) = 0$,

$$\operatorname{tind}_{g_1}(0) \ \geq \ d_1 ,$$

то

$$F\big(g_1(x)\big) - F\big(g(x)\big) \ = \ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \left(\sum_{j=2}^{n} \binom{j}{p} x_\nu^{p-j} \big(g_{\nu 1}(x) - g_\nu(x)\big) \right) +$$

$$+ \ \sum_{m=p+1}^{l} \big(V_m(x+g_1(x)) - V_m(x+g(x))\big), \tag{104}$$

де $g_{\nu 1}(x)$, $\nu = \overline{1,\, n}$, — координати $g_1(x)$.

Згідно із властивостями T-індексу відповідно до леми 2 його значення для функції

$$x_\nu^{p-j}\big(g_{\nu 1}^j(x) - g_\nu^j(x)\big) \ = \ x_\nu^{p-j}\big(g_{\nu 1}(x) - g_\nu(x)\big) \sum_{i=1}^{j-1} g_{\nu 1}^{j-i}(x) g_\nu^i(x), \qquad j \ = \ \overline{2,\, n},$$

у точці 0 не менше за

$$p - j + \operatorname{tind}_{g_1 - g}(0) + \ d_1^{j-1}.$$

Отже, перша з сум у (104) має T-індекс у точці 0, не менший за

$$\min_{2 \leq j \leq p} (p - j + d^{j-1}) + \operatorname{tind}_{g_1 - g}(0) \ \geq \ p + \operatorname{tind}_{g_1 - g}(0).$$

Далі, для $m \geq p + 1$

$$V_m\big(x + g_1(x)\big) - V_m\big(x + g(x)\big) \ =$$

$$= \ \int_0^1 V_m^{(1)}\big(x + g(x) + \tau(g_1(x) - g(x))\big)\, d\tau \big(g_1(x) - g(x)\big), \tag{105}$$

отже, T-індекс функції (105) у точці 0 не менший за значення

$$p + \operatorname{tind}_{g_1 - g}(0).$$

Таким чином, нами доведено, що

$$\operatorname{tind}_{F(g_1)-F(g)}(0) \geq p + \operatorname{tind}_{g_1-g}(0). \tag{106}$$

Використаємо цю властивість оператора F при знаходженні полінома $Q(x)$. Врахувавши (102), (103), запишемо рівняння

$$\sum_{m=p}^{l} V_m(x+g) = \sum_{m=p}^{d} V_m(x) + \sum_{m=d+1}^{l} V_m(x) + p\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} g_\nu + F(g), \tag{107}$$

згідно з яким для доведення леми достатньо знайти поліном $Q(x)$, $Q(0) = 0$, такий, щоб різниця між лівою частиною рівняння (107) та першою сумою правої його частини

$$R(g) = \sum_{m=d+1}^{l} V_m(x) + p\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} g_\nu + F(g)$$

задовольняла умову

$$\operatorname{tind}_{R(Q)}(0) \geq l+1.$$

Будемо шукати поліном Q як наближення до розв'язку рівняння

$$p\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} g_\nu + F(g) + \sum_{m=d+1}^{l} V_m(x) = 0.$$

Визначимо перше наближення до Q як розв'язок рівняння

$$p\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} g_\nu + \sum_{m=d+1}^{l} V_m(x) = 0. \tag{108}$$

Моном x^k при $|k| = d+1 \geq (p-2)n+1$ ділиться на x_ν^{p-1} хоча б для одного з $1 \leq \nu \leq n$, оскільки в іншому випадку отримаємо

$$k_\nu \leq p-2, \quad \nu = \overline{1, n},$$

отже,

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \leq (p-2)n,$$

що суперечить умові $|k| = d+1$. Тому справедливим є розклад

$$\sum_{m=d+1}^{l} V_m(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \upsilon_\nu(x) x_\nu^{p-1}, \tag{109}$$

і рівняння (108) визначає розв'язок

$$g_1(x) = -\frac{1}{p}\left(\frac{\upsilon_1(x)}{a_1}, \ldots, \frac{\upsilon_n(x)}{a_n}\right).$$

Із (100) та (109) випливає, що $g_1(0) = 0$ та

$$\operatorname{tind}_{g_1}(0) \geq d-p+2 \geq 2. \tag{110}$$

Друге наближення до Q визначаємо за $g_1(x)$ із рівняння

$$p\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} g_\nu + F\big(g_1(x)\big) + \sum_{m=d+1}^{l} V_m(x) = 0. \tag{111}$$

Покладемо в (111)

$$g = g_1(x) + q$$

та отримаємо для q рівняння

$$p\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} q_\nu + F\big(g_1(x)\big) = 0. \tag{112}$$

Оскільки згідно з визначенням (103) $F(0) = 0$, то із властивостей полінома $g_1(x)$ випливає $F\big(g_1(0)\big) = 0$, з нерівностей (106), (110) —

$$\operatorname{tind}_{F(g_1)}(0) \geq p + (d - p + 2) = d + 2. \tag{113}$$

Цього достатньо для подання $F(g_1)$ у вигляді

$$F\big(g_1(x)\big) = \sum_{\nu=1}^{n} \upsilon_{\nu 2}(x) x_\nu^{p-1} \tag{114}$$

та знаходження розв'язку q рівняння (112) у вигляді полінома

$$q_2(x) = -\frac{1}{p}\left(\frac{\upsilon_{12}(x)}{a_1}, \ldots, \frac{\upsilon_{n2}(x)}{a_n}\right). \tag{115}$$

Згідно із (113) – (115) $q_2(0) = 0$ та

$$\operatorname{tind}_{q_2}(0) \geq d - p + 3.$$

Таким чином, ми знайшли наближення до Q

$$g_1(x), \qquad g_2(x) = g_1(x) + q_2(x),$$

і ці наближення задовольняють умови

$$g_1(0) = g_2(0) = 0, \qquad \operatorname{tind}_{g_\nu}(0) \geq 2,$$

$$\operatorname{tind}_{g_2 - g_1}(0) \geq d - p + 3, \qquad \nu = 1, 2.$$

Нехай із рівняння

$$p\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} g_\nu + F\big(g_{i-1}(x)\big) + \sum_{m=d+1}^{l} V_m(x) = 0, \tag{116}$$

починаючи з $g_0 = 0$, знайдено наближення до Q

$$g_1(x), \ldots, g_i(x), \tag{117}$$

і ці наближення такі, що для $\nu = \overline{1, i}$

$$g_1(0) = \ldots = g_i(0) = 0, \qquad \operatorname{tind}_{g_\nu}(0) \geq 2, \tag{118}$$

$$\operatorname{tind}_{g_\nu - g_{\nu-1}}(0) \geq d - p + \nu + 1. \tag{119}$$

Наступне $(i+1)$-ше наближення $g_{i+1}(x)$ до Q визначимо із рівняння, отриманого з (116) заміною в ньому i на $i + 1$. Будемо шукати це наближення у вигляді суми

$$g_i(x) + q_{i+1}(x),$$

де $q_{i+1}(x)$ відповідно до визначення $g_i(x)$ — розв'язок рівняння

$$p\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} q_\nu + F(g_i(x)) + F(g_{i-1}(x)) = 0. \tag{120}$$

Із (118), (119) та (106) одержимо

$$\operatorname{tind}_{F(g_1)-F(g_{i-1})}(0) \geq p + \operatorname{tind}_{g_i - g_{i-1}}(0) \geq$$
$$\geq p + d - p + i + 1 = d + i + 1 \tag{121}$$

та $F(g_i(0)) = F(g_{i-1}(x)) = 0$. Отже,

$$F(g_i(x)) - F(g_{i-1}(x)) = \sum_{\nu=1}^{n} v_{\nu(i+1)}(x) x_\nu^{p-1}, \tag{122}$$

і розв'язок q рівняння (120) визначається функцією

$$q_{i+1}(x) = -\frac{1}{p}\left(\frac{v_{1(i+1)}(x)}{a_1}, \ldots, \frac{v_{n(i+1)}(x)}{a_n}\right). \tag{123}$$

Згідно із (121) – (123) $q_{i+1}(0) = 0$ та

$$\operatorname{tind}_{q_{i+1}}(0) \geq \operatorname{tind}_{v_{\nu(i+1)}}(0) \geq d - p + i + 2.$$

Більше того,

$$\operatorname{tind}_{g_{i+1}}(0) \geq \min\left(\operatorname{tind}_{g_i}(0), \operatorname{tind}_{g_i - g_{i-1}}(0)\right) \geq$$
$$\geq \min(2, d - p + i + 2) \geq 2.$$

Отже, $(i+1)$-ше наближення до Q можна знайти, розв'язавши рівняння для $g_{i+1}(x)$, і це наближення задовольняє умови

$$g_{i+1}(0) = 0, \qquad \operatorname{tind}_{g_{i+1}}(0) \geq 2,$$
$$\operatorname{tind}_{g_{i+1} - g_i}(0) \geq d - p + i + 2.$$

Це завершує індукцію та доводить існування наближень (117) до Q з властивостями (118), (119) для довільного цілого $i \geq 1$.

Покладемо

$$Q(x) = g_i(x)$$

та знайдемо T-індекс $R(g_i(x))$ у точці 0. Згідно з визначенням

$$R(g_i(x)) = p\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} g_{\nu i}(x) + F(g_i(x)) + \sum_{m=d+1}^{l} V_m(x) =$$
$$= F(g_i(x)) - F(g_{i-1}(x)),$$

отже, з урахуванням нерівностей (121)

$$\operatorname{tind}_{R(g_i)}(0) = \operatorname{tind}_{F(g_i)-F(g_{i-1})}(0) \geq d + i + 1.$$

Таким чином, при

$$i \geq l - d$$

поліном $Q(x) = g_i(x)$ задовольняє всі вимоги леми, що завершує її доведення.

Лема 6. *Якщо*

$$f(x) = f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x) x_\nu^{p_\nu},$$

де $f_\nu \in C^r$ *в* D *з* $1 \le r \le \omega$ $(r = a)$ *і*

$$f_\nu(0) \neq 0, \quad \nu = \overline{1, n},$$

то існують окіл U *точки* 0 *і його* C^r*-дифеоморфізм* g, $g(0) = 0$, *такі, що*

$$f\big(g(x)\big) = f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(0) x_\nu^{p_\nu}.$$

Дійсно, достатньо визначити дифеоморфізм g із формул заміни

$$y_\nu = \sqrt[p_\nu]{\frac{f_\nu(x)}{f_\nu(0)}}\, x_\nu, \quad \nu = \overline{1, n},$$

щоб отримати на підставі теореми про неявну функцію всі твердження леми.

Перейдемо до завершення доведення теореми. Леми 5 та 6 надають можливість зробити це без особливих зусиль у випадку, коли

$$\max\big((p-2)n, p\big) \le p,$$

отже, коли

$$(p-2)(n-1) \le 2.$$

Зокрема, при $n = 1$ твердження теореми випливають із леми 6. При

$$p = n = 2 \tag{124}$$

вони випливають із леми 6 та розкладу

$$f(x) = f(0) + V_2(x) + \sum_{|k|=3} f_k(x) x^k,$$

а при

$$p = 2, \quad n \ge 3 \tag{125}$$

та при

$$p = 3, \quad n = 2, \quad n = 3; \quad p = 4, \quad n = 2 \tag{126}$$

— із лем 5 та 6 згідно з розкладом

$$f(x) = f(0) + V_p(x) + \sum_{m=p+1}^{(p-1)n} V_m(x) + \sum_{|k|=(p-1)n+1} f_k(x) x^k.$$

Дійсно, нехай виконуються умови (125), (126). Із леми 5 випливає, що існує поліном $Q(x)$, $Q(0) = 0$, $Q'(0) = 0$, такий, що

$$f\big(x + Q(x)\big) = f(0) + V_p(x) + R(x) + \sum_{|k|=(p-1)n+1} f_k\big(x + Q(x)\big)\big(x + Q(x)\big)^k, \tag{127}$$

де

$$R(0) = 0, \quad \operatorname{tind}_R(0) \ge (p-1)n + 1.$$

Тоді поліном R та функція, що визначається сумою в формулі (127), діляться на x_ν^p для деякого $1 \le \nu \le n$, тобто формулу (127) можна записати у вигляді

$$f(x + Q(x)) = f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + b_\nu(x)) x_\nu^p, \tag{128}$$

де функції b_ν такі, що

$$b_\nu(0) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}. \tag{129}$$

Згідно з лемою 6 із формули (129) випливає розклад

$$f(g(x) + Q(g(x))) = f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p \tag{130}$$

для x із деякого околу U точки 0, при цьому в U

$$g \in C^s, \tag{131}$$

якщо в D'

$$f_k \in C^s, \quad |k| = (p-1)n + 1.$$

Умова (131) означає, що гладкість f у D визначається включенням

$$f \in C^{(p-1)n+s+1},$$

звідки випливає справедливість теореми 7 для розглядуваного випадку із значеннями

$$s_0 = 0, \quad l(s) = (p-1)(n-1).$$

Випадок (124) зводиться до вже розглянутого випадку, коли $Q \equiv 0$, що також завершує для нього доведення теореми 7. Нехай

$$d = (p-2)n > p. \qquad 132)$$

У цьому випадку подамо f у вигляді

$$f(x) = f(0) + \sum_{m=p}^{d} V_m(x) + \sum_{m=d+1}^{l} V_m(x) + \sum_{|k|=l+1} f_k(x) x^k.$$

Згідно з лемою 5 існує поліном Q такий, що $Q(0) = 0$, $Q'(0) = 0$,

$$f(x + Q(x)) = f(0) + \sum_{m=p}^{d} V_m(x) + R(x) + \sum_{|k|=l+1} f_k(x + Q(x))(x + Q(x))^k, \tag{133}$$

де R — поліном, який задовольняє умови

$$R(0) = 0, \quad \operatorname{tind}_R(0) \ge l + 1, \quad l \ge d + 1. \tag{134}$$

Якщо

$$f^{(k')}(0) = 0$$

для кожного мультиіндексу k' такого, що

$$p < |k'| \le d, \quad k'_\nu < p, \quad \nu = \overline{1, n},$$

то функція (133) має розклад (128) і, як наслідок, розклад (130), що завершує і для цього випадку доведення теореми 7 із значеннями для s_0 та $l(s)$, визначеними формулами

$$s_0 = 0, \quad l(s) = n + 1.$$

Для основного із випадків виконання нерівності (134) доведення теореми 7 є набагато складнішим. Переходячи до нього, позначаємо через F функцію

$$F(x) = f(0) + \sum_{m=p}^{d} V_m(x) + R_1(x),$$

яка визначає праву частину формули (133). Отже,

$$R_1(x) = R(x) + \sum_{|k|=l+1} f_k\big(x + Q(x)\big)\big(x + Q(x)\big)^k,$$

$$R_1(0) = 0, \quad \operatorname{tind}_{R_1}(0) \geq l + 1, \quad F \in C^{d+s+l} \quad \text{в} \quad D'.$$

Нехай P має вигляд

$$P(x) = f(0) + \sum_{m=p}^{d} V_m(x), \tag{135}$$

тоді 0 — ізольована критична точка P як C^a-функції, оскільки такою вона є для форми

$$f(0) + V_p(x).$$

Визначимо розмірність P' в 0. Для цього розглянемо рівняння

$$p \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} h_\nu + \sum_{m=p+1}^{d} V'_{\nu m}(x) h_\nu = x^k. \tag{136}$$

Нехай

$$|k| = (p-2)n + 1. \tag{137}$$

Тоді послідовність наближень

$$h_1(x), \ldots, h_j(x), \tag{138}$$

що визначається формулою

$$p \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} h_{\nu j} + \sum_{m=p+1}^{d} V'_{\nu m}(x) h_{\nu(j-1)}(x) = x^k, \tag{139}$$

починаючи з $h_0 = 0$, існує для довільного $j \geq 1$ та задовольняє умови

$$h_1(0) = \ldots = h_j(0) = 0, \quad \operatorname{tind}_{h_j - h_{j-1}}(0) \geq (p-2)(n-1) + j - 1 \tag{140}$$

при $j \geq 1$. Дійсно, з рівняння для h_1

$$p \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} h_\nu = x^k$$

випливає, що при виконанні умови (137) його розв'язок

$$h_1(x) = \big(h_{11}(x), \ldots, h_{n1}(x)\big)$$

існує та задовольняє умову (140):

$$h_1(0) = 0, \qquad \operatorname{tind}_{h_1}(0) \geq (p-2)n + 1 - (p-1) = (p-2)(n-1).$$

Нехай для $2 \leq i < j$ рівняння (139) визначає розв'язок $h_i(x)$, що задовольняє умову (140). Тоді для h_{i+1} одержуємо рівняння

$$p \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} h_\nu + \sum_{m=p+1}^{d} V_m'(x) h_i(x) = x^k,$$

розв'язок якого визначимо, поклавши

$$h = h_i(x) + g.$$

Звідси для $g = (g_1, \ldots, g_n)$ отримуємо рівняння

$$p \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} g_\nu + \sum_{m=p+1}^{d} V_m'(x)\big(h_i(x) - h_{i-1}(x)\big) = 0. \tag{141}$$

Враховуючи (140) при $j = i$, одержуємо, що функція

$$F_i(x) = \sum_{m=p+1}^{d} V_m'(x)\big(h_i(x) - h_{i-1}(x)\big)$$

задовольняє умову

$$F_i(0) = 0, \qquad \operatorname{tind}_{F_i}(0) \geq (p-2)(n-1) + i - 1 + p = (p-2)n + i + 1.$$

Отже, рівняння (141) має розв'язок $g = g_{i+1}(x)$ такий, що

$$g_{i+1}(0) = 0, \qquad \operatorname{tind}_{g_{i+1}}(0) \geq (p-2)n + i + 1 - (p-1) = (p-2)(n-1) + i.$$

Але тоді функція h_{i+1}

$$h_{i+1}(x) = h_i(x) + g_{i+1}(x)$$

визначає розв'язок рівняння (141), і цей розв'язок задовольняє умову

$$h_{i+1}(0) = 0, \qquad \operatorname{tind}_{h_{i+1} - h_i}(0) \geq (p-2)(n-1) + i,$$

тобто умову (140) при $j = i + 1$. Індукція завершує доведення твердження про існування наближень (138), які задовольняють умову (140) для довільного $j \geq 1$.

Зробимо тепер заміну в рівнянні (136), поклавши

$$h = h_j(x) + g, \tag{142}$$

та отримаємо рівняння

$$p \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^{p-1} g_\nu + \sum_{m=p+1} V_{\nu m}'(x) g_\nu + \sum_{m=p+1} V_{\nu m}(x) g_{\nu j}(x) = 0. \tag{143}$$

Оскільки 0 — ізольована критична точка функції $\sum_{m=p+1}^{d} V_m$ як C^a-функції, то $P' = \sum_{m=p+1}^{d} V_m'$ в 0 має скінченну розмірність. Позначимо її через r та застосуємо заміну (142) із настільки великим значенням j, щоб T-індекс останньої з сум у формулі (143) перевищував r. Тоді за властивістю розмірності рівняння (143) матиме в деякому околі точки 0 аналітичний розв'язок. Отже, такий же розв'язок матиме і вихідне рівняння (136). А це означає, згідно з визначенням, що

$$r \leq (p-2)n + 1 = d + 1. \tag{144}$$

Подальше доведення теореми зводиться, по суті, до застосування теореми про еквівалентність [8] до функції F, при цьому ми можемо покращити вимоги до гладкості F у вказаній теоремі за рахунок деяких уточнень у схемі її доведення, які є можливими, врахувавши вигляд форми V_p функції f.

Дійсно, точка 0 є критичною точкою форми V_p скінченного (r-го) типу, причому для r можна вибрати таке значення, що гарантує розв'язність рівняння (136), отже, згідно з доведеним, можна покласти

$$r = d + 1. \tag{145}$$

Більше того, за умови

$$|k| = N \geq r$$

порядок нуля розв'язку рівняння (136) у точці 0 можна визначити за значенням T-індексу для цього розв'язку в точці 0. Отже, з рівняння, властивостей T-індексу та ізольованості критичної точки 0 форми V_p як C^a-функції випливає, що цей порядок можна отримати з нерівності

$$p - 1 + \operatorname{tind}_h(0) \geq \min\left(N, p + \operatorname{tind}_h(0)\right) = N,$$

і він дорівнює

$$N - (p-1).$$

Це значення значно більше за значення $N - r$, яке характеризує порядок нуля розв'язку рівняння аналогічного вигляду для функції f із теореми [8]. Тому індуктивна лема з [8] для функції F справджується для більш слабкої, ніж наведена в цій лемі, умови на N, а саме: замість $N \geq 2r$ достатньо вибрати

$$N \geq \max\left(r, 2(p-1), p\right),$$

що з урахуванням (145) та (132) еквівалентно умові

$$N \geq r. \tag{146}$$

Таким чином, індуктивна лема [8] для розглядуваних нами функцій F виконується для умови (146), що вносить відповідні корективи у твердження теореми про еквівалентність [8], які стосуються гладкості F, достатньої для застосування до F цієї теореми.

Зауважимо, що коли l, яке визначає функцію F, задовольняє умову

$$l \geq r + 2, \tag{147}$$

то розмірність P' в 0 будь-якого полінома Тейлора функції F в точці 0 задовольняє ту ж умову (144), що й полінома (135). Останнє твердження випливає із леми 4. Тому теорема про еквівалентність [8] стосовно кожної з функцій F, визначених умовою (147), стверджує C^{s+s_0}-еквівалентність F в деякому околі точки 0 своєму поліному Тейлора в точці 0 степеня, не вищого за

$$m > \beta = \max\left\{\frac{3}{2}(s + s_0 + N),\ 6(2N-1)\right\} \tag{148}$$

при умові, що гладкість F більша за

$$3(N + \beta - 1). \tag{149}$$

Вибравши l між значеннями (149) та m, отримаємо, що поліном Тейлора функції F у точці 0 степеня, не вищого за m, — це поліном (135). Отже, функція F C^{s+s_0}-еквівалентна в деякому околі точки 0 поліному $P(x)$. Звідси випливає C^{s+s_0}-еквівалентність у цьому ж околі точки 0 функції f та полінома $P(x)$.

Для завершення доведення теореми 7 залишається визначити s_0 та $l(s)$. Для цього отримаємо із (148), (146), (145), умови про гладкість F, умови про рівність гладкостей f та F, а також із форми запису умов про гладкість у теоремі 7 наступні нерівності для визначення s_0 та $l(s)$:

$$\frac{3}{2}(1 + s_0 + d + 1) \geq 6(2d + 1), \tag{150}$$

$$l(s) \geq 3(d + \beta) - d - s = 2d + 3\beta - s. \tag{151}$$

Із (150) знаходимо

$$s_0 = 7d + 2, \tag{152}$$

а із (151) —

$$l(s) = 2(19d + 7) + \frac{7}{2}s, \tag{153}$$

що і завершує доведення теореми 7.

Звичайно, формула (153), як і перша з формул такого типу Ю. Мозера [10], суттєво завищує вимоги до гладкості функції f, які гарантують застосовність підготовчої теореми Вейєрштрасса до f, але, з іншого боку, вона дає уявлення про характер залежності гладкості g від гладкості f та гарантує деякий „запас гладкості” g, що визначається числом s_0. Як приклад, знайдемо відповідні значення для s_0 та $l(s)$ у випадку, коли

$$n = 2, \quad p = 5, \quad s = 1.$$

Із (152) та (153) отримуємо значення

$$s_0 = 44, \quad l(1) = 245{,}5.$$

Отже, в розглядуваному випадку теорема 7 справджується при

$$f \in C^{253}$$

та гарантує, що $g \in C^{45}$ і

$$P(x) = f(0) + a_1 x_1^5 + a_2 x_2^5 + \frac{1}{6}\sum_{k_1 + k_2 = 6} f^{(k_1, k_2)}(0) x_1^{k_1} x_2^{k_2}.$$

Наступна теорема мінімізує гладкість, для якої ще можлива еквівалентність f та P.

Теорема 8. *Нехай* 0 — *критична точка* C^{p+1}-*функції* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *де*

$$p = \operatorname{tind}_f(0).$$

Тоді якщо p-*форма* f *в* 0

$$V_P(x) = f(0) + \frac{1}{p}\sum_{|k| = p} f^{(k)}(0) x^k$$

зводиться до невиродженого канонічного вигляду, то існують окіл U *точки* 0 *та гомеоморфізм* $g: U \to \mathbb{R}^n$, $g(0) = 0$, *такі, що*

$$f(g(x)) = f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p$$

для $x \in U$.

Дійсно, не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що f уже зведено до вигляду, в якому p-форма f у 0 має канонічний вигляд (99). Тоді згідно з лемою 1

$$f(x) = f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p + \sum_{|k|=p+1} f_k(x) x^k, \tag{154}$$

де $f_k \in \mathbb{C}$ в D'. Підставимо в (154) замість x функцію

$$(x, x)^l x = \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 \right)^l x,$$

де l — найменше ціле число, що задовольняє умову

$$2l + p \geq (p-1)n.$$

Тоді в деякому околі U точки 0

$$f\big((x, x)^l x\big) = f(0) + (x, x)^{pl} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p + (x, x)^l \sum_{|k|=p+1} f_k\big(x(x, x)^l\big) x^k \right) =$$

$$= f(0) + (x, x)^{pl} \sum_{\nu=1}^{n} \big(a_\nu + b_\nu(x)\big) x_\nu^p, \tag{155}$$

де $b_\nu \in \mathbb{C}$ в U,

$$b_\nu(0) = 0, \qquad \nu = \overline{1, n}.$$

Нехай U — настільки малий окіл, що при $x \in \overline{U}$, де $\overline{U}$ — замикання U, значення $a_\nu + b_\nu(x)$ мають знак сталих a_ν. Виконаємо заміну змінних, ввівши в (155) замість x змінні y за формулами

$$y_\nu = (x, x)^l \sqrt[p]{1 + \frac{b_\nu(x)}{a_\nu}}\, x_\nu, \qquad \nu = \overline{1, n}. \tag{156}$$

Тоді (155) можна записати у вигляді

$$f\big((x, x)^l x\big) = f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu y_\nu^p.$$

Позначимо

$$\sqrt[p]{1 + \frac{b_\nu(x)}{a_\nu}} = 1 + q_\nu(x), \qquad \nu = \overline{1, n}.$$

Тоді (156) набере вигляду

$$y_\nu = (x, x)^l \big(1 + q_\nu(x)\big) x_\nu, \qquad \nu = \overline{1, n}, \tag{157}$$

при цьому $q_\nu \in \mathbb{C}$ в U та

$$q_\nu(0) = 0, \qquad \nu = \overline{1, n}. \tag{158}$$

Із (157) отримуємо

$$(y, y) = (x, x)^{2l+1} \big(1 + \varphi(x)\big), \tag{159}$$

де через φ позначено функцію

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{q_\nu(x)\big(2 + q_\nu^2(x)\big)x_\nu^2}{(x, x)}, \qquad x \neq 0.$$

Умова (158) означає, що φ має граничне значення в точці 0

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0,$$

звідки випливає можливість неперервного продовження φ в точку 0. Отже, $\varphi \in \mathbb{C}$ в U. Враховуючи (159), отримуємо

$$(y, y)^{l/(2l+1)} = (x, x)^l \big(1 + \varphi(x)\big)^{l/(2l+1)}.$$

Отже, заміна (157) буде мати вигляд

$$\frac{x_\nu\big(1 + q_\nu(x)\big)}{\big(1 + \varphi(x)\big)^{l/(2l+1)}} = \frac{y_\nu}{(y, y)^{l/(2l+1)}}, \qquad \nu = \overline{1, n}. \tag{160}$$

Позначимо

$$z_\nu = \frac{y_\nu}{(y, y)^{l/(2l+1)}}, \qquad y \neq 0, \qquad \nu = \overline{1, n}, \tag{161}$$

та доповнимо значення правої частини (161) у точці 0 граничним значенням

$$\lim_{y \to 0} \frac{y_\nu}{(y, y)^{l/(2l+1)}} = 0. \tag{162}$$

Тоді формули (161), (162) визначають заміну для довільних значень y. На підставі цього запишемо (160) у вигляді системи рівностей

$$\frac{x_\nu\big(1 + q_\nu(x)\big)}{\big(1 + \varphi(x)\big)^{l/(2l+1)}} = z_\nu, \qquad \nu = \overline{1, n}. \tag{163}$$

Ліва частина (163) визначає неперервне та взаємно однозначне відображення F деякого околу U точки 0 на деякий окіл U точки $z = 0$. З цього випливає існування та неперервність оберненого відображення $F^{-1} : U_1 \to U$, тобто існування гомеоморфізму $g_1 : U_1 \to U$, $g_1(0) = 0$, такого, що

$$x = g_1(z)$$

є розв'язком рівняння (163) для $z \in U_1$.

Заміна (161) також має обернення: оскільки

$$(z, z) = (y, y)^{1 - 2l/(2l+1)} = (y, y)^{1/(2l+1)},$$

то

$$y_\nu = z_\nu (z, z)^l, \qquad \nu = \overline{1, n}.$$

Отже, (161) визначає гомеоморфізм деякого околу U_2 точки $y = 0$ в окіл U_1 точки $z = 0$. Суперпозиція цих гомеоморфізмів визначає новий гомеоморфізм

$$g_2 : U_2 \to U, \qquad g_2(0) = 0,$$

$$g_2(y) = g_1\left(\frac{y}{(y, y)^{l/(2l+1)}}\right),$$

такий, що, застосовуючи заміну

$$x = g_2(y),$$

де $g_2 \in \mathbb{C}$ в U_2, одержуємо рівність

$$f\left(\frac{y}{1+q\bigl(g_2(y)\bigr)}\right) = f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu y_\nu^p$$

для $y \in U_2$.

Для завершення доведення теореми 8 позначимо

$$g(y) = \frac{y}{1+q\bigl(g_2(y)\bigr)}$$

та отримаємо формулу

$$f\bigl(g(y)\bigr) = f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu y_\nu^p$$

з визначеними цією теоремою властивостями функції g в U_2.

Будемо говорити, що f індиферентна в критичній точці 0, якщо в будь-якому її околі $f - f(0)$ набуває значень різних знаків.

***Наслідок* 7.** *Нехай виконуються умови теореми* 8. *Тоді функція f у точці 0 має локальний мінімум або локальний максимум в залежності від того, $\mathrm{ind}_f(0) = 0$ чи $\mathrm{ind}_f(0) = n$ відповідно, та є індиферентною в 0, якщо $0 < \mathrm{ind}_f(0) < n$.*

4. Локальне векторне поле f в околі критичної точки, відмінне від градієнтного, та стійкість критичної точки. Нехай $f \in C^{r+2}$ в $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \le r \le \omega$. Тоді оператор $\mathrm{grad}: f \to \mathrm{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ визначає в D векторне поле, яке називають градієнтним полем f. Нехай 0 — критична точка f. Тоді

$$f(x) = f(0) + {}^{\backprime}x J(x) = f(0) + {}^{\backprime}x G(x) x \tag{164}$$

в D', де

$$J(x) = \int_0^1 f^{(1)}(\tau x)\, d\tau,$$

$$G(x) = \int_0^1 (1-\tau) H_{\tau x} f \, d\tau.$$

Вектор $J(x)$ визначає векторне поле f в околі критичної точки 0, точніше, у всій її зірковій області D'. Це поле ми назвемо локальним векторним полем f в околі критичної точки, відмінним від градієнтного. Під дією такого векторного поля точка $x_0 \in D'$ рухається відповідно до диференціального рівняння руху

$$\frac{dx}{dt} = J(x) \tag{165}$$

та визначає траєкторію в D' цього руху

$$x = x_t(x_0), \qquad t \in (\alpha, \beta),$$

де $x_t(x_0)$ — розв'язок (165) з початковим значенням x_0 у $t = 0$, $\alpha = \alpha(x_0)$ та $\beta = \beta(x_0)$ — граничні значення інтервалу існування розв'язку $x_t(x_0)$, які визначаються умовами $\lim\limits_{t\to\alpha+0} x_t(x_0)\in\partial D'$, $\lim\limits_{t\to\beta-0} x_t(x_0)\in\partial D'$, де $\partial D'$ — границя області D'. Критична точка 0 функції f відносно такого руху — це точка його спокою

$$x_t(0) = 0, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Визначальну властивість руху $x_t(x_0)$ під дією векторного поля $J(x)$, заданого рівнянням (165), можна описати рівністю

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(x_t(x_0), x_t(x_0)\big) = f\big(x_t(x_0)\big) - f(0) \tag{166}$$

для $t\in(\alpha,\beta)$, яку можна легко отримати із формули (164) та рівняння (165). Ця рівність означає, що швидкість зміни $1/2$ квадрата евклідової відстані рухомої точки від критичної дорівнює різниці значень функції f в цих точках $\big(x_t(x_0)$ та 0 відповідно$\big)$.

Ця властивість руху надає можливість зробити деякі висновки про траєкторії руху.

Насамперед це стосується характеру стійкості критичної точки як точки спокою рівняння (165). Враховуючи рівність (5), подаємо (165) у вигляді рівняння

$$\frac{dx}{dt} = G(x)x. \tag{167}$$

Тоді

$$\frac{dy}{dt} = G(0)y$$

є рівнянням у варіаціях для точки спокою 0 рівняння (167). Отже, питання про стійкість у некритичному випадку розв'язується для точки 0 згідно з теоремами про стійкість за першим наближенням: якщо всі власні числа матриці $G(0)$ є від'ємними, 0 — асимптотично стійка точка, за наявності серед власних чисел матриці $G(0)$ хоча б одного додатного 0 — нестійка точка.

Для критичного випадку справджується таке твердження про стійкість.

Теорема 9. *Якщо існує окіл* U *точки* 0 *такий, що серед власних чисел матриці* $G(x)$ *для* $x\in U$ *немає додатних, то точка спокою* 0 *рівняння* (165) *є стійкою.*

Дійсно, при виконанні умови теореми квадратична форма

$$V(x) = \frac{1}{2}(x, x) \tag{168}$$

згідно із (168) та (164) має похідну на довільному розв'язку рівняння (165)

$$V(x) = \big(G(x)x, x\big),$$

яка для всіх $x\in U$ задовольняє умову знакосталості

$$\big(G(x)x, x\big) = \big(\grave{}Q(x)D(x)Q(x)x, x\big) = \big(D(x)Q(x)x, Q(x)x\big) \le 0,$$

де Q — ортогональна матриця, D — діагональна матриця, діагональними елементами якої є власні числа матриці $G(x)$. Цього достатньо, щоб стійкість точки спокою 0 рівняння (165) випливала з теореми Ляпунова про стійкість [11].

Зазначимо, що всі точки спокою рівняння (165) можна знайти лише серед точок, які задовольняють рівняння

$$f(x) = f(0).$$

Зауважимо також, що всі періодичні, квазіперіодичні та майже періодичні розв'язки $x_t(x^0)$ рівняння (165) задовольняють умову про спільне середнє значення функції $f(x_t(x^0))$:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x_t(x^0))\,dt = f(0).$$

Інтегруючи (166), отримуємо

$$\big(x_t(x_0), x_t(x_0)\big) = \big(x_\tau(x_0), x_\tau(x_0)\big) + 2\int_\tau^t \big(f(x_t(x_0)) - f(x_0)\big)dt \tag{169}$$

для довільних t та τ з інтервалу (α, β). Із (169), зокрема, випливає, що коли

$$\lim_{t\to-\infty} x_t(x_0) = 0,$$

то для всіх $t<\beta$

$$\big(x_t(x_0), x_t(x_0)\big) = 2\int_{-\infty}^t \big(f(x_t(x_0)) - f(x_0)\big)dt,$$

якщо ж

$$\lim_{t\to+\infty} x_t(x_0) = 0,$$

то для всіх $t>\alpha$

$$\big(x_t(x_0), x_t(x_0)\big) = -2\int_t^{+\infty} \big(f(x_t(x_0)) - f(x_0)\big)dt.$$

Насамкінець, зауважимо, що теорема про стійкість, яку сформульовано вище, має наступне узагальнення.

Теорема 10. *Нехай рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \tag{170}$$

де $X:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — C^2*-функція в* D, *має точку спокою* 0:

$$X(0) = 0.$$

Тоді якщо існує окіл U *точки* 0 *такий, що симетрична частина*

$$\frac{\grave{G}(x) + G(x)}{2} \tag{171}$$

матриці

$$G(x) = \int_0^1 \frac{\partial X}{\partial x}(\tau x)\,d\tau$$

не має в U *додатних власних чисел, то точка спокою* 0 *рівняння* (170) *є асимптотично стійкою, коли власні числа матриці* (171) *для* $x\in U$, $x\neq 0$, *від'ємні, та стійкою, коли серед них є нульові для* $x\in U$, $x\neq 0$.

Дійсно, оскільки в околі точки 0 згідно з лемою 1 рівняння (170) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = G(x)x, \tag{172}$$

то квадратична форма

$$V(x) = \frac{1}{2}(x, x)$$

має похідну для будь-якого розв'язку рівняння (172)

$$\dot{V}(x) = \big(G(x)x, x\big) = \frac{1}{2}\big(\big({}^{\top}G(x) + G(x)\big)x, x\big) \le \alpha(x)(x, x), \qquad x \in U,$$

де $\alpha(x)$ — найбільше із власних чисел матриці (171).

Згідно з теоремами Ляпунова про стійкість з умов для $\alpha(x)$ в теоремі 10 випливають потрібні нам твердження стосовно стійкості точки спокою 0 рівняння (170), що завершує доведення теореми 10.

1. *Хирш М.* Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979. – 279 с.
2. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.
3. *Милнор Дж.* Теория Морса. – М.: Мир, 1965. – 184 с.
4. *Арнольд В. И.* Замечание о подготовительной теореме Вейерштрасса // Функцион. анализ. – 1967. – **1**, вып. 3. – С. 1 – 8.
5. *Арнольд В. И.* Особенности гладких отображений // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 1(139). – С. 3 – 44.
6. *Houzel C.* Géomètrie analytique locale. I // Semin. H. Cartan. – 1960/1961. – № 18.
7. *Malgrange B.* Le theoreme de preparation eu geometrie differentiable // Ibid. – 1962/1963. – № 11 – 13, 22.
8. *Самойленко А. М.* Об эквивалентности гладкой функции полиному Тейлора в окрестности критической точки конечного типа // Функцион. анализ. – 1968. – **2**, вып. 4. – С. 63 – 69.
9. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. – М.: Наука, 1982. – 302 с.
10. *Мозер Ю.* О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь // Математика: Сб. пер. – 1962. – **6**, вып. 5. – С. 51 – 67.
11. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.

Одержано 01.12.2006