УДК 517.956.4

Н. А. Изобов (Ин-т математики НАН Беларуси, Минск)

О СЧЕТНОСТИ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПФАФФА С РАЗЛИЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

We prove that a two-dimensional completely integrable Pfaffian linear system has at most countable number of solutions with all distinct characteristic sets.

Доведено, що двовимірна цілком інтегровна система Пфаффа має не більш ніж зліченне число розв'язків з усіма різними характеристичними множинами.

Будем рассматривать линейные вполне интегрируемые системы Пфаффа

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = A_i(t)x, \qquad x \in R^n, \quad t = (t_1, t_2) \in R^2_+, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

с ограниченными непрерывно дифференцируемыми матрицами A_1 и A_2 n-го порядка. Для аналогов характеристического показателя Ляпунова функции одной переменной — характеристического вектора [1, с. 108; 2, 3] $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^2$ нетривиального решения $x\colon R^2_+ \to R^n \setminus \{0\}$ системы (1), определяемого условиями

$$L_x(\lambda) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln\|x(t)\| - (\lambda, t)}{\|t\|} = 0,$$

$$L_x(\lambda - (2-i, i-1)\varepsilon) > 0 \quad \forall\varepsilon > 0, \quad i = 1, 2$$

(векторное стремление $t \to \infty$ эквивалентно стремлению $\|t\| \equiv \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \to +\infty$) и обозначаемого символом $\lambda[x]$, и характеристического множества [2, 3] $\Lambda_x = \cup\lambda[x] \subset R^2$ этого решения оставался открытым существенный вопрос о числе различных* характеристических множеств Λ_x решений x рассматриваемой системы (для обыкновенных n-мерных линейных систем их, как хорошо известно, не более n). В [4] доказано существование вполне интегрируемой линейной системы Пфаффа с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и счетным числом решений x со всеми различными характеристическими множествами Λ_x. Отметим, что полное описание множества Λ_x каждого отдельного решения x системы (1) дано в [2, 3, 5]. Отметим также, что число различных нижних характеристических множеств [6] $P_x = \cup p[x]$ решений $x \neq 0$ системы (1), которые являются объединением всех нижних характеристических векторов [6] $p[x] = p$ решения x, определяемых условиями

$$l_x(p) \equiv \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln\|x(t)\| - (p, t)}{\|t\|},$$

$$l_x(p + (2-i, i-1)\varepsilon) < 0 \quad \forall\varepsilon > 0, \quad i = 1, 2,$$

*Характеристические множества Λ_{x_1} и Λ_{x_2} нетривиальных решений x_1 и x_2 системы (1) считаем различными, если $\cap_i \lambda_{x_i} \neq \cup_i \Lambda_{x_i}$.

и служащих аналогами нижнего показателя Перрона функции одной переменной, вообще говоря, несчетно [6], а нижнее характеристическое множество $P = \cup_{x \neq 0} P_x$ системы (1) имеет положительную плоскую меру Лебега.

Основной результат настоящей статьи — доказательство того, что любая двумерная система Пфаффа (1) имеет не более чем счетное число решений x с попарно различными характеристическими множествами Λ_x. Этому предшествуют формулировки и доказательство четырех вспомогательных лемм.

Определение. *Ограниченную монотонно убывающую выпуклую вниз функцию* $f_x\colon [\alpha_x, \beta_x] \to [a_x, b_x]$ *будем называть характеристической функцией характеристического множества* Λ_x *решения* $x\colon R^2_+ \to R^n \setminus \{0\}$ *системы* (1) (*или просто характеристической функцией этого решения*), *если оно имеет вид* [2, 3]

$$\Lambda_x = \big\{(\lambda_1, f_x(\lambda_1)) \in R^2\colon \lambda_1 \in [\alpha_x, \beta_2]\big\}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть существуют нетривиальные решения* u *и* v *системы* (1) *и либо точка* λ_1,

$$\min_w \alpha_w < \lambda_1 \in \cap_w [\alpha_w, \beta_w], \quad w = u, v, \tag{2}$$

в которой выполнено неравенство $f_u(\lambda_1) < f_v(\lambda_1)$, *либо точка* $\lambda_1 \in (\beta_u, \beta_v]$, *для которой имеет место неравенство* $f_v(\lambda_1) > a_u$. *Тогда для любой последовательности* $\{t_v(k)\} \uparrow \infty$, *реализующей предел*

$$L_v(\lambda_v) = 0, \quad \lambda_v = (\lambda_1, f_v(\lambda_1)) \in \Lambda_v, \tag{3}$$

справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} u(t_v(k))/\big\|v(t_v(k))\big\| = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала первый случай $\lambda_1 \in \cap_w [\alpha_w, \beta_w]$, $w = u, v$, и первый подслучай $\lambda_1 > \alpha_u$. Возьмем число $\lambda_1' \in (\alpha_u, \lambda_1)$ настолько близким к λ_1, чтобы в силу непрерывности функций $f_u(\mu)$ на отрезке $[\alpha_u, \lambda_1]$ и оценки $f_v(\lambda_1) > f_u(\lambda_1)$ выполнялось неравенство $f_v(\lambda_1) > f_u(\lambda_1')$. Предположим противное, т. е.

$$u(t_v(k))/\|\vartheta(t_v(k))\| \not\to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Тогда без нарушения общности существует такая постоянная $c > 0$, что неравенство

$$\big\|u(t_v(k))\big\| \geq c\|v(t_v(k))\| \tag{6}$$

выполняется для всех $k \in N$. В силу выбора числа λ_1' и предположения (5), (6) для характеристического вектора $\lambda_u' = (\lambda_1', f_u(\lambda_1'))$ решения u имеют место следующие противоречивые неравенства:

$$0 = L_u(\lambda_u') \geq \lim_{k\to\infty} \|t_v(k)\|^{-1} [\ln \|u(t_v(k))\| - (\lambda_v, t_v(k)) + (\lambda_v - \lambda_u', t_v(k))] \overset{(6)}{\geq}$$

$$\overset{(6)}{\geq} L_v(\lambda_v) + (\lambda_1 - \lambda_1')T_1 + [f_v(\lambda_1) - f_u(\lambda_1')]\sqrt{1 - T_1^2} \overset{(3)}{\geq}$$

$$\overset{(3)}{\geq} (T_1 + \sqrt{1 - T_1^2}) \min\{\lambda_1 - \lambda_1', f_v(\lambda_1) - f_u(\lambda_1')\} > 0,$$

в которых

$$T_1 \equiv \lim_{k\to\infty} [t_{v,1}(k)/\|t_v(k)\|] \in [0, 1], \quad t_v(k) = \big(t_{v,1}(k), t_{v,2}(k)\big) \in R_+^2,$$

и без нарушения общности существуют все используемые пределы. Таким образом, в рассматриваемом подслучае равенство (4) доказано.

Во втором подслучае $\lambda_1 > \alpha_v$ согласно [7] существующий без нарушения общности предел $T_2 \equiv \lim\limits_{k\to\infty} \big[t_{v,2}(k)/\|t_v(k)\|\big]$ является положительным и поэтому, снова предположив выполненным (5), получим противоречивое неравенство

$$0 = L_u(\lambda_u) \overset{(6)}{\geq} \varlimsup_{k\to\infty} \big\|t_v(k)\big\|^{-1} \big[\ln \|v(t_v(k))\| - (\lambda_u, t_v(k))\big] \geq$$

$$\geq L_v(\lambda_v) + \big[f_v(\lambda_1) - f_u(\lambda_1)\big]T_2 \overset{(3)}{>} 0.$$

Таким образом, в первом случае необходимое равенство (4) доказано.

Во втором случае $\lambda_1 \in (\beta_u, \beta_v]$ для характеристических векторов $\lambda_u^\circ = (\beta_u, a_u) \in \in \Lambda_u$ и $\lambda_v = (\lambda_1, f_v(\lambda_1)) \in \Lambda_v$ выполнено строгое неравенство $\lambda_u^\circ < \lambda_v$, которое используем при вычислении и оценке следующего предела:

$$\varlimsup_{k\to\infty} \big\|t_v(k)\big\|^{-1} \ln \big[\|u(t_v(k))\|/\|v(t_v(k))\|\big] =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} \|t_v(k)\|^{-1} \Big\{[\ln \|u(t_v(k))\| - (\lambda_u^\circ, t_v(k))] -$$

$$- \big[\ln \|v(t_v(k))\| - (\lambda_v, t_v(k))\big] + (\lambda_u^\circ - \lambda_v, t_v(k))\Big\} \leq$$

$$\leq L_u(\lambda_u^\circ) - L_v(\lambda_v) + (\lambda_u^\circ - \lambda_v, T) < 0;$$

в этих неравенствах существующий без нарушения общности двумерный вектор $T = \lim\limits_{k\to\infty} t_v(k)/\big\|t_v(k)\big\| \geq 0$ имеет единичную длину.

Лемма доказана.

С помощью этой леммы докажем еще несколько предварительных анонсированных в [8, 9] утверждений.

Лемма 1. *Пусть существуют нетривиальные решения u и v системы* (1) *с характеристическими функциями $f_w\colon [\alpha_w, \beta_w] \to [a_w, b_w]$, $w = u, v$, и точка $\gamma \in \in \cap_{w=u,v}[\alpha_w, \beta_w]$, для которой выполнены равенство $f_u(\gamma) = f_v(\gamma)$ и неравенство $f_u(\lambda_1) < f_v(\lambda_1)$ при любом*

$$\lambda_1 \in \big[\max_{w=u,v} \alpha_w, \gamma) \equiv [\alpha, \gamma) \neq \varnothing \quad (\lambda_1 \in (\gamma, \min_{w=u,v} \beta_w] \equiv (\gamma, \beta] \neq \varnothing).$$

Тогда характеристическая функция $f_x(\lambda_1)$ любого решения

$$x(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t), \qquad c_i = \text{const} \neq 0, \quad t \in R_+^2, \tag{7}$$

этой системы определена на отрезке $[\alpha_x, \gamma] \supset [\alpha, \gamma]$ *с левым концом* $\alpha_x = \alpha$ *в случае* $\alpha_u \neq \alpha_v$ (*на отрезке* $[\gamma, \beta_x] \supset [\gamma, \beta]$ *с правым концом* $\beta_x \geq \delta \equiv \sup\{\lambda_1 \in \in [\gamma, \beta_v] \colon f_v(\lambda_1) \geq a_u\}$, *равным* δ *в случае* $a_u \neq a_v$) *и совпадает с функцией* $f_v(\lambda_1)$ *на отрезке* $[\alpha, \gamma]$ (*на отрезке* $[\gamma, \delta]$).

Доказательство. Покажем сначала, что часть области определения — отрезок $[\alpha_x, \gamma]$ функции $f_x(\lambda_1)$ — содержит сегмент $[\alpha, \gamma]$ и для любого $\lambda_1 \in [\alpha, \gamma]$ выполнено равенство $f_x(\lambda_1) = f_v(\lambda_1)$.

Пусть векторная последовательность $\{t_v(k)\} \uparrow \infty$ реализует предел $L_v(\lambda_v) = 0$ для характеристического вектора $\lambda_v = (\lambda_1, f_v(\lambda_1))$ решения $v(t)$ с первой компонентой $\lambda_1 \in (\alpha, \gamma)$ (и тем самым внутренней точки λ_v характеристического множества Λ_v этого решения). Поэтому для этой последовательности выполнено как свойство [7]

$$t_{v,2}(k)/t_{v,1}(k) \to \theta \in (0, +\infty), \tag{8}$$

так и равенство (4). В силу последнего равенства имеем неравенство

$$L_x(\lambda_v) \geq \lim_{k\to\infty} \big\|t_v(k)\big\|^{-1}\Big[\ln\big\|v(t_v(k))\big\|+$$

$$+\ln|\,1 - d\big\|u(t_v(k))\big\|/\big\|v(t_v(k))\big\|\,| - (\lambda_v, t_v(k))\Big] =$$

$$= L_v(\lambda_v) = 0, \quad d = \text{const} > 0. \tag{9_1}$$

Противоположная же оценка $L_x(\lambda_v) \leq 0$ вытекает из очевидных неравенств

$$\|x(t)\| \leq C(\varepsilon)\big[\exp(\lambda_u, t) + \exp(\lambda_v, t)\big]\exp\varepsilon\|t\| \leq$$

$$\leq 2C(\varepsilon)\exp\big[(\lambda_v, t) + \varepsilon\|t\|\big] \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \forall t \in R^2_+. \tag{10}$$

Поэтому из неравенств (9_1) и (10) имеем первое свойство $L_x(\lambda_v) = 0$ определения характеристического вектора. Выполнение же второго свойства

$$L_x(\lambda_v - \varepsilon e_i) > 0, \quad e_i \in R^2_+, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad i = 1, 2,$$

следует из свойства (8) последовательности $\{t_v(k)\}$:

$$L_x(\lambda_v - \varepsilon e_i) \geq L_x(\lambda_v - \varepsilon e_i)|_{\{t_v(k)\}} =$$

$$= L_x(\lambda_v) + \varepsilon[1 + (\theta - 1)(i - 1)]\sqrt{1 + \theta^2} > 0 \quad \forall\varepsilon > 0, \quad i = 1, 2. \tag{9_2}$$

Таким образом, равенство $f_x(\lambda_1) = f_v(\lambda_1)$ доказано для всех внутренних точек отрезка $[\alpha, \gamma]$. Справедливость его на концах этого отрезка следует из свойства непрерывности функции $f_x(\lambda_1)$.

Докажем теперь равенство $\alpha_x = \max\{\alpha_u, \alpha_v\}$ в случае $\alpha_u \neq \alpha_v$. В первом подслучае $\alpha_v < \alpha_u$ рассмотрим последовательность $\{t_u(k)\} \uparrow \infty$ со свойством

$$t_{u,2}(k)/t_{u,1}(k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{11}$$

реализующую равенство $L_u((\alpha_u, b_u)) = 0$ (существование этой последовательности $\{t_u(k)\}$ установлено в [7]). Воспользовавшись оценками

$$
\begin{aligned}
\big\|v(t)\big\| &\le C(\varepsilon)\exp(\alpha_v t_1 + b_v t_2 + \varepsilon\|t\|) \quad \forall\varepsilon>0 \quad \forall t\ge 0,\\
\big\|u(t_u(k))\big\| &\ge C^{-1}(\varepsilon)\exp\Big[((\alpha_u,b_u),t_u(k)) - \varepsilon\|t_u(k)\|\Big] \quad \forall\varepsilon>0, \quad k\in N,
\end{aligned} \tag{12}
$$

справедливыми по определению характеристического вектора, для рассматриваемой последовательности в силу (11) получим неравенство

$$
\big\|v(t_u(k))\big\|/\big\|u(t_u(k))\big\| \le
$$

$$
\le C^2(\varepsilon)\exp\Big\{(\alpha_v-\alpha_u+2\varepsilon)t_{u,1}(k) + \big[f_v(\alpha_v)-f_u(\alpha_u)+2\varepsilon\big]\,t_{u,2}(k)\Big\} =
$$

$$
= O\big(\exp(\alpha_v-\alpha_u+3\varepsilon)t_{u,1}(k)\big) \to 0, \quad k\to\infty.
$$

Из него же, в свою очередь, следует и неравенство

$$
0 = L_x((\alpha_x,b_x)) \ge \lim_{k\to\infty}\big\|t_u(k)\big\|^{-1}\Big[\ln\|u(t_u(k))\| - \big((\alpha_x,b_x),t_u(k)\big)\Big] =
$$

$$
= L_u\big((\alpha_u,b_u)\big) + \lim_{k\to\infty}\big\|t_u(k)\big\|^{-1}\Big[(\alpha_u-\alpha_x)t_{u,1}(k) + (b_u-b_x)t_{u,2}(k)\Big] \overset{(11)}{=}
$$

$$
\overset{(11)}{=} \alpha_u-\alpha_x,
$$

т. е. неравенство $\alpha_x \ge \alpha_u$, которое вместе с доказанным ранее неравенством $\alpha_x \le \alpha_u$ устанавливает необходимое равенство $\alpha_x = \alpha_u$. Аналогичным образом доказывается равенство $\alpha_x = \alpha_v$ в подслучае $\alpha_v > \alpha_u$.

Докажем теперь второе утверждение леммы 1. Как и при доказательстве первого утверждения, покажем сначала, что функция $f_x(\lambda_1)$ определена и совпадает с функцией $f_v(\lambda_1)$ на отрезке $[\gamma,\delta]$.

Рассмотрим случай $\beta_v \le \beta_u$. Пусть, как и ранее, последовательность $\{t_v(k)\}\uparrow\uparrow\infty$ реализует предел $L_v(\lambda_v)=0$ с вектором λ_v, имеющим теперь первую компоненту $\lambda_1 \in (\gamma,\beta_v)\subset(\alpha_v,\beta_v)$. Для этой последовательности выполнены как равенство (4), так и свойство (8). С помощью этих свойств последовательности $\{t_v(k)\}$, как и при доказательстве неравенств (9_1), (9_2) и (10), устанавливаем, что $\lambda_v = (\lambda_1, f_v(\lambda_1))$ является характеристическим вектором решения $x(t)$ при любом $\lambda_1\in[\gamma,\beta]$ в случае $\beta=\beta_v$. Доказательство совпадения характеристических функций $f_x(\lambda_1)$ и $f_v(\lambda_1)$ соответственно решений $x(t)$ и $v(t)$ системы (1) на отрезке $[\gamma,\beta]$ в случае $\beta=\beta_u<\beta_v$ не отличается от приведенного выше доказательства такого совпадения для случая $\beta=\beta_v\le\beta_u$.

Таким образом, осталось рассмотреть промежуток $\varnothing \ne (\beta_u,\delta] \subset (\beta_u,\beta_v]$ возможного изменения аргумента λ_1 характеристической функции $f_x(\lambda_1)$. Возьмем $\lambda_1\in(\beta_u,\delta)$, для которого по определению числа δ выполнено неравенство $f_v(\lambda_1) > a_u$, и соответствующую ему последовательность $\{t_v(k)\}\uparrow\infty$, реализующую предел $L_v(\lambda_v)=0$. Для этой последовательности снова выполнены условия леммы, и поэтому для нее справедливо равенство (4). Поскольку $\lambda_1\in(\alpha_v,\beta_v)$, для последовательности $\{t_v(k)\}$ выполнено и свойство (8). С помощью равенства (4) получаем оценку $L_x(\lambda_v)\ge 0$ для вектора $\lambda_v=(\lambda_1,f_v(\lambda_1))$ (см. неравенство (9_1)). Противоположная оценка $L_x(\lambda_v)\le 0$ является следствием строгого векторного неравенства $(\beta_u,a_u) < (\lambda_1,f_v(\lambda_1)) = \lambda_v$ и следующих неравенств:

$$\big\|x(t)\big\| \le C(\varepsilon)\Big[\exp\big((\beta_u, a_u), t\big) + \exp(\lambda_v, t)\Big] \exp \varepsilon\|t\| \le$$

$$\le 2C(\varepsilon) \exp\big[(\lambda_v, t) + \varepsilon\|t\|\big] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall t \in R^2_+.$$

Тем самым необходимое равенство $L_x(\lambda_v) = 0$ доказано. При доказательстве же неравенств

$$L_x(\lambda_v - \varepsilon e_i) > 0, \quad e_i = (i-1, 2-i) \in R^2_+, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2,$$

аналогичном доказательству неравенств (9_2), используется свойство (8) последовательности $\{t_v(k)\}$.

Итак, функция $f_x(\lambda_1)$ в случае $\delta \in (\beta_u, \beta_v]$ определена на интервале (β_u, δ) и совпадает на нем с функцией $f_v(\lambda_1)$. В силу же непрерывности функции $f_x(\lambda_1)$ и замкнутости ее области определения она определена и совпадает с функцией $f_v(\lambda_1)$ на всем отрезке $[\gamma, \delta]$.

Докажем, наконец, последнее утверждение леммы 1: $\beta_x = \delta$ в случае $a_u \ne a_v$. Рассмотрим сначала случай $a_u < a_v$, для которого $\delta = \beta_v$. Согласно [7], для граничной точки (β_v, a_v) характеристического множества Λ_v существует последовательность $\{\eta(k)\} \uparrow \infty$, реализующая предел $L_v[(\beta_v, a_v)] = 0$ и удовлетворяющая условию

$$\eta_1(k)/\eta_2(k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{13}$$

С помощью оценок

$$\big\|u(t)\big\| \le C(\varepsilon) \exp\big[(\beta_u t_1 + a_u t_2 + \varepsilon\|t\|\big) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall t \ge 0,$$

$$\big\|v(\eta(k))\big\| \ge C^{-1}(\varepsilon) \exp\big(\beta_v \eta_1(k) + a_v \eta_2(k) - \varepsilon\|\eta(k)\|\big) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad k \in N,$$

вытекающих из определения характеристических векторов решений u и v, для последовательности $\{\eta(k)\}$ в силу (13) будем иметь неравенство

$$\big\|u(\eta(k))\big\| / \big\|v(\eta(k))\big\| \le$$

$$\le C^2(\varepsilon) \exp\Big[(\beta_u - \beta_v)\eta_1(k) + (a_u - a_v)\eta_2(k) + 2\varepsilon\|\eta(k)\|\Big] =$$

$$= O\Big[\exp(a_u - a_v + 3\varepsilon)\eta_2(k)\Big] \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Из этой оценки следуют также неравенства

$$0 = L_x\big((\beta_x, a_x)\big) \ge \lim_{k\to\infty} \big\|\eta(k)\big\|^{-1}\Big[\ln\|v(\eta(k))\| - \big((\beta_x, a_x), \eta(k)\big)\Big] =$$

$$= L_v\big((\beta_v, a_v)\big) + \lim_{k\to\infty} \big\|\eta(k)\big\|^{-1}\Big[(\beta_v - \beta_x)\eta_1(k) + (a_v - a_x)\eta_2(k)\Big] \overset{(13)}{=} a_v - a_x,$$

в которых без нарушения общности существуют все используемые пределы и из которых следует неравенство $a_x \ge a_v$. В рассматриваемом случае $a_u < a_v$ ранее было доказано как равенство $f_x(\delta) = a_v$, так и неравенство $\beta_x \ge \delta$. Если теперь предположить, что $\beta_x > \delta$, то в силу строгого убывания функции $f_x(\lambda_1)$ было бы справедливо неравенство $a_v = f_x(\delta) > f_x(\beta_x) \equiv a_x$, противоречащее доказанному выше $a_x \ge a_v$.

Доказательство равенства $\beta_x = \delta$ во втором случае $a_v < a_u$ совпадает с доказательством этого равенства в первом случае $a_u < a_v$ с единственным изменением — заменой всюду решения v на решение u и u на v.

Лемма 1 доказана.

С помощью рассуждений, содержащихся в доказательстве леммы 1, для решений u и v системы (1) с произвольными характеристическими функциями можно доказать такое следствие.

***Следствие* 1.** *Если для характеристических функций* $f_w\colon [\alpha_w, \beta_w] \to [a_w, b_w]$ *решений* $w = u, v$ *системы* (1) *выполнено неравенство* $\alpha_u \neq \alpha_v$ *(неравенство* $a_u \neq a_v$*), то характеристическая функция* f_x *решения* $x = c_1 u + c_2 v$, $c_i = \mathrm{const} \neq 0$, $i = 1, 2$, *этой системы имеет свойство* $\alpha_x = \max\{\alpha_u, \alpha_v\}$ *(свойство* $a_x = \max\{a_u, a_v\}$*).*

Доказательство. В определение решения x системы (1) решения u и v входят равноправно, симметрично. Поэтому для определенности достаточно рассмотреть лишь случаи $\alpha_u < \alpha_v$ и $a_u < a_v$. В первом из них рассмотрим последовательность $\{t_v(k)\} \uparrow \infty$, реализующую предел $L_v((\alpha_v, b_v)) = 0$ с левой граничной точкой (α_v, b_v) множества Λ_v и удовлетворяющую условию [7]

$$t_{v,2}(k)/t_{v,1}(k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{11_1}$$

По определению характеристического вектора справедливы оценки

$$\big\|u(t)\big\| \leq C(\varepsilon) \exp\big(\alpha_u t_1 + b_u t_2 + \varepsilon\|t\|\big) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall t \geq 0,$$

$$\big\|v(t_v(k))\big\| \geq C^{-1}(\varepsilon) \exp\Big[\alpha_v t_{v,1}(k) + b_v t_{v,2}(k) - \varepsilon\big\|t_v(k)\big\|\Big] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad k \in N,$$

из которых в силу свойства (11_1) и предположения $\alpha_u < \alpha_v$ вытекает равенство (4). Поэтому имеют место неравенства

$$0 = L_x\big((\alpha_x, b_x)\big) \overset{(4)}{\geq} \lim_{k\to\infty} \big\|t_v(k)\big\|^{-1} \big[\ln\|v(t_v(k))\| - ((\alpha_x, b_x), t_v(k))\big] =$$

$$= L_v\big((\alpha_v, b_v)\big) + \lim_{k\to\infty} \big\|t_v(k)\big\|^{-1} \big[(\alpha_v - \alpha_x) t_{v,1}(k) + (b_v - b_x) t_{v,2}(k)\big] \overset{(11_1)}{=}$$

$$\overset{(11_1)}{=} \alpha_v - \alpha_x,$$

из которых следует необходимая оценка $\alpha_x \geq \alpha_v$. Тем самым в рассматриваемом случае справедлива и оценка $\alpha_x > \alpha_u$. Поскольку постоянные c_i отличны от 0, решение v можно представить в виде $v = d_1 u + d_2 x$ с некоторыми ненулевыми постоянными d_1 и d_2. Поэтому решения v и x по сравнению с исходной ситуацией поменялись ролями. Применяя доказанное выше утверждение для разложения v на составляющие u и x, получаем неравенство $\alpha_v \geq \alpha_x$, устанавливающее необходимое свойство $\alpha_x = \max\{\alpha_u, \alpha_v\}$.

Второе утверждение $a_x = \max\{a_u, a_v\}$ этого следствия доказывается аналогично.

В общем же случае, допускающем выполнение и равенств $\alpha_u = \alpha_v$ или $a_u = a_v$, справедливо такое утверждение.

***Следствие* 2.** *Для характеристических функций f_u и f_v линейно независимых решений u и v системы* (1) *и характеристической функции f_x ее решения* (7) *выполнены неравенства*

$$\alpha_x \le \max\{\alpha_u, \alpha_v\}, \qquad a_x \le \max\{a_u, a_v\}, \tag{14}$$

превращающиеся в равенства соответственно в случаях $\alpha_u \ne \alpha_v$ и $a_u \ne a_v$.

Доказательство. Если предположить выполненными неравенства $\alpha_x > \alpha_u = \alpha_v$, противоположные первому из неравенств (14), то согласно следствию 1, примененному к исходным решениям u и x с параметрами $\alpha_u < \alpha_x$ и их линейной комбинации $v = c_1'u + c_2'x$ с постоянными $c_i' \ne 0$, будем иметь равенство $\alpha_v = \max\{\alpha_u, \alpha_x\} = \alpha_x$, противоречащее предположенному $\alpha_v = \alpha_u < \alpha_x$. Аналогичным образом устанавливается и второе неравенство (14).

***Замечание* 1.** Следствия 1 и 2 уточняют и обобщают теорему 2.1 Э. И. Грудо [2].

***Замечание* 2.** Условия $\alpha_u \ne \alpha_v$ и $a_u \ne a_v$ следствия 1 являются существенными: существуют линейная система Пфаффа (1) и ее решения u, v и $x = u + v$, для характеристических функций f_w, $w = u, v, x$, которых выполнены условия

$$\alpha_x < \alpha_u = \alpha_v, \qquad a_x < a_u = a_v.$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения зафиксируем произвольный двумерный вектор $r = (r_1, r_2) > 0$ и определим функции

$$\varphi_1(t) = (e^{-r_1 t_1} + e^{-r_2 t_2})^{-1}, \qquad \varphi_2(t) = e^{rt}, \quad t \in R_+^2,$$

а с их помощью двумерную линейную диагональную систему Пфаффа

$$\frac{\partial x}{\partial t_1} = \mathrm{diag}[a_1(t), a_2(t)]x, \qquad \frac{\partial x}{\partial t_2} = \mathrm{diag}[b_1(t), b_2(t)]x, \qquad x \in R^2, \quad t \in R_+^2, \tag{15}$$

с ограниченными непрерывно дифференцируемыми коэффициентами

$$a_i(t) = \varphi_i^{-1}(t)\frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial t_1}, \qquad b_i(t) = \varphi_i^{-1}(t)\frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial t_2}, \qquad i = 1, 2, \quad t \in R_+^2,$$

очевидно, удовлетворяющими условию полной интегрируемости системы (15). В качестве ее решений u, v и x используем решения

$$u(t) = (\varphi_1(t), -\varphi_2(t)), \qquad v(t) = (0, \varphi_2(t)), \quad x(t) = (\varphi_1(t), 0), \qquad t \in R_+^2.$$

Традиционными несколько усовершенствованными рассуждениями покажем, что характеристическим множеством Λ_{φ_1} функции φ_1 является отрезок

$$\Delta = \left\{\lambda \in R_+^2 \colon \frac{\lambda_1}{r_1} + \frac{\lambda_2}{r_2} = 1\right\}$$

прямой плоскости $\lambda_1 O \lambda_2$. Действительно, справедливы оценки

$$\begin{gathered} \ln \varphi_1(t) \le \min\{r_1 t_1, r_2 t_2\} \le \theta r_1 t_1 + (1-\theta) r_2 t_2 \equiv (\lambda, t), \\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (\theta r_1, (1-\theta) r_2), \quad \theta \in [0, 1], \qquad t \in R_+^2, \end{gathered} \tag{16}$$

с векторами λ, составляющими отрезок Δ. Отсюда следует неравенство $L_{\varphi_1}(\lambda) \leq \leq 0$. С другой стороны, на луче $r_2 t_2 = r_1 t_1 \geq 0$ для функции $\varphi_1(t)$ выполнено равенство

$$\ln \varphi_1(t)\big|_{t_2 = r_1 t_1 / r_2} = r_1 t_1 - \ln 2, \quad t_1 \geq 0, \tag{17}$$

из которого, в свою очередь, вытекает неравенство

$$L_{\varphi_1}(\lambda) \geq \lim_{r_2 t_2 = r_1 t_1 \to +\infty} \|t\|^{-1}[r_1 t_1 - (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 r_1 t_1 / r_2)] = 0, \tag{18}$$

а тем самым и необходимое равенство $L_{\varphi_1}(\lambda) = 0$, $\lambda \in \Delta$. Необходимые же неравенства $L_{\varphi_1}(\lambda - \varepsilon e_i) > 0 \ \forall \varepsilon > 0$, $i = 1, 2$, в силу (18) реализуются на луче $t_2 = r_1 t_1 / r_2$ при $t_1 \to +\infty$. Таким образом, установлено включение $\Delta \subset \Lambda_{\varphi_1}$.

Для любого характеристического вектора $\mu \in \Lambda_{\varphi_1}$ функции $\varphi_1(t)$ выполнены неравенства

$$0 = L_{\varphi_1}(\mu) \geq \varlimsup_{t_{3-i} = 0, t_i \to +\infty} \frac{-\ln 2 - \mu_i t_i}{t_i} = -\mu_i, \quad i = 1, 2,$$

из которых следуют и неравенства $\mu_i \geq 0$. В силу (17) и (18) имеем также неравенство

$$0 = L_{\varphi_1}(\mu) \geq L_{\varphi_1}(\mu)\big|_{r_1 t_1 = r_2 t_2} = (r_1 r_2 - r_2 \mu_1 - r_1 \mu_2)/\|r\|,$$

т. е. неравенство $r_1^{-1}\mu_1 + r_2^{-1}\mu_2 \geq 1$.

Пусть предел $L_{\varphi_1}(\mu) = 0$ реализуется по последовательности $\{t(k)\} \uparrow \infty$, имеющей без нарушения общности свойства

$$t_i(k) \to +\infty, \quad i = 1, 2; \qquad t_2(k)/t_1(k) \to \vartheta \in [0, +\infty] \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тогда для этого предела справедливы представления

$$0 = L_{\varphi_1}(\mu) = \begin{cases} (r_1 - \mu_1 - \mu_2 \vartheta)/\sqrt{1 + \vartheta^2}, & \text{если} \quad \vartheta \in [r_1/r_2, +\infty), \\ (r_2 - \mu_2 - \mu_1/\vartheta)/\sqrt{1 + \vartheta^{-2}}, & \text{если} \quad \vartheta \in (0, r_1/r_2), \end{cases}$$

$0 = L_{\varphi_1}(\mu) = -\mu_2$ при $\vartheta = +\infty$ и $0 = L_{\varphi_1}(\mu) = -\mu_1$ при $\vartheta = 0$. В силу установленного ранее неравенства $\mu_i \geq 0$ две точки $\mu \in \Lambda_{\varphi_1}$ соответственно с координатами $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$ являются граничными множества Λ_{φ_1}. Из представлений предела $L_{\varphi_1}(\mu)$ имеем соотношения

$$r_1 = \mu_1 + \vartheta \mu_2 \geq \mu_1 + r_1 \mu_2 / r_2, \quad \vartheta \in [r_1/r_2, +\infty),$$

$$r_2 = \mu_2 + \mu_1/\vartheta \geq \mu_2 + r_2 \mu_1 / r_1, \quad \vartheta \in (0, r_1/r_2),$$

устанавливающие неравенство $r_1^{-1}\mu_1 + r_2^{-1}\mu_2 \leq 1$ для всех внутренних точек $\mu > 0$ множества Λ_{φ_1}. Это неравенство выполняется и для граничных (концевых) точек множества Λ_{φ_1} в силу его замкнутости [2, 3].

Таким образом, доказаны неравенства $\mu_i \geq 0$, $i = 1, 2$, и равенство $r_1^{-1}\mu_1 + + r_2^{-1}\mu_2 = 1$ для любой точки $\mu \in \Lambda_{\varphi_1}$, а тем самым и включение $\Lambda_{\varphi_1} \subset \Delta$. С учетом установленного ранее обратного включения получено представление $\Lambda_{\varphi_1} = \Delta$.

На основании неравенства (16) справедлива оценка $\ln \varphi_1(t) \leq (r, t)$, $r > 0$, $t \in R^2_+$. Поэтому для норм решений u и v выполнены соотношения

$$\varphi_2(t) \leq \|u(t)\| \leq \sqrt{2}\,\varphi_2(t), \qquad \|v(t)\| = \varphi_2(t), \quad t \in R^2_+.$$

Они позволяют для характеристических множеств этих решений получить представления $\Lambda_u = \Lambda_v = \Lambda_{\varphi_2} = \{r\}$, $r > 0$, т. е. равенства

$$\alpha_u = \alpha_v = \beta_u = \beta_v = r_1 > 0, \qquad a_u = a_v = b_u = b_v = r_2 > 0.$$

Для решения же x имеем соотношения

$$\alpha_x = 0 < r_1 = \min\{\alpha_u, \alpha_v\}, \qquad a_x = 0 < r_2 = \min\{a_u, a_v\}.$$

Утверждение, содержащееся в замечании 2, доказано.

Лемма 2. *Пусть существуют нетривиальные решения u и v системы* (1) *с характеристическими функциями f_u и f_v и точки $\gamma_1 < \gamma_2$, $\gamma_i \in \cap_{w=u,v}[\alpha_w, \beta_w]$, такие, что на всем интервале (γ_1, γ_2) выполнено неравенство $f_u(\lambda_1) < f_v(\lambda_1)$. Тогда характеристическая функция $f_x(\lambda_1)$ решения* (7) *этой системы определена на отрезке $[\gamma_1, \gamma_2]$ и совпадает на нем с характеристической функцией $f_v(\lambda_1)$ решения v.*

Доказательство. Пусть, как и при доказательстве леммы 1, последовательность $\{t_v(k)\} \uparrow \infty$ реализует предел $L_v(\lambda_v) = 0$, в котором $\lambda_v = (\lambda_1, f_v(\lambda_1)) \in \Lambda_v$, $\lambda_1 \in (\gamma_1, \gamma_2)$. Тогда согласно лемме выполнено равенство (4), а в силу результатов работы [7] — свойство (8). Рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве неравенств (9_1) и (10), устанавливаем равенство $L_x(\lambda_v) = 0$. Также повторяя доказательство неравенств (9_2), с помощью свойства (8) последовательности $\{t_v(k)\}$ получаем второе необходимое свойство $L_x(\lambda_v - \varepsilon e_i) > 0$ $\forall \varepsilon > 0$, $i = 1, 2$, определения характеристического вектора $\lambda_x(\lambda_1) = \lambda_v(\lambda_1)$, $\lambda_1 \in (\gamma_1, \gamma_2)$. В силу непрерывности функций $f_v(\lambda_1)$, $f_x(\lambda_1)$ и замкнутости областей их задания из предыдущего равенства имеем и необходимое равенство $f_x(\lambda_1) = f_v(\lambda_1)$, $\lambda_1 \in [\gamma_1, \gamma_2]$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть пересечение характеристических множеств Λ_v, не являющегося одноточечным в случаях $\alpha_u = \beta_v$ и $a_u = b_v$, и Λ_u решений u и v системы* (1) *пусто и существуют точки $\lambda'_u \in \Lambda_u$ и $\lambda'_v \in \Lambda_v$, связанные векторным неравенством $\lambda'_u \leq \lambda'_v$. Тогда характеристическая функция $f_x(\lambda_1)$ любого решения* (7) *этой системы определена на отрезке $[\alpha_u(v), \delta] \neq \varnothing$ с левым концом $\alpha_u(v) \equiv \max\{\alpha_u, \alpha_v\}$, равным α_x в случае $\alpha_u \neq \alpha_v$, правым концом $\delta \equiv \sup\{\lambda_1 \in [\alpha_v, \beta_v] : f_v(\lambda_1) \geq a_u\}$, равным β_x в случае $a_u \neq a_v$, и совпадает на этом отрезке с характеристической функцией $f_v(\lambda_1)$ решения v.*

Доказательство. Покажем вначале, что отрезок $[\alpha_u(v), \delta]$ не пуст. Из условия $\lambda'_u \leq \lambda'_v = (\lambda'_{v,1}, \lambda'_{v,2}) \in \Lambda_v$ леммы 3 следует неравенство $\beta_v \geq \lambda'_{v,1} \geq \lambda'_{u,1} \geq \geq \alpha_u$, которое вместе с очевидным неравенством $\lambda'_{v,1} \geq \alpha_v$ устанавливает оценку $\lambda'_{v,1} \geq \alpha_u(v)$. С другой стороны, из неравенств $a_u \leq \lambda'_{u,2} \leq \lambda'_{v,2} = f_v(\lambda'_{v,1})$ вытекает включение $\lambda'_{v,1} \in \big\{\lambda_1 \in [\alpha_v, \beta_v] \colon f_v(\lambda_1) \geq a_u\big\}$, устанавливающее неравенство $\delta \geq \lambda'_{v,1}$, которое вместе с полученным ранее неравенством $\lambda'_{v,1} \geq \alpha_u(v)$ и устанавливает свойство $[\alpha_u(v), \delta] \neq \varnothing$.

Для доказательства леммы 3 образуем непустое по ее условиям множество $\Lambda_u(v) \equiv \{\lambda \in \Lambda_v \colon \exists \lambda_u \in \Lambda_u, \lambda_u \leq \lambda\}$ и рассмотрим оба возможных случая: 1) множество $\Lambda_u(v)$ является одноточечным; 2) оно содержит две различные точки множества Λ_v (а тем самым и весь участок кривой Λ_v, заключенный между этими точками).

В первом случае докажем равенства $\alpha_x = \beta_x = \alpha_u = \alpha_u(v) = \delta \in [\alpha_v, \beta_v]$ и $f_x(\alpha_u(v)) = f_v(\alpha_u(v))$. Здесь возможны три подслучая: 1_1) $\alpha_u = \beta_v$ и $b_u < a_v$; 1_2) $\beta_u < \alpha_v$ и $a_u = b_v$; 1_3) $\Lambda_v = \{(\alpha_v, a_v) \equiv \lambda_v\}$ и $\exists \lambda'_u \in \Lambda_u \colon \lambda'_u < \lambda_v$. Для первых двух подслучаев единственные векторы λ'_u и λ'_v из условий леммы 3 имеют вид $\lambda'_u = (\alpha_u, b_u)$, $\lambda'_v = (\beta_v, a_v) = (\alpha_u, a_v)$ и $\lambda'_u = (\beta_u, a_u)$, $\lambda'_v = (\alpha_v, b_v) = (\alpha_v, a_v)$ соответственно. В обоих подслучаях эти векторы являются граничными точками характеристических множеств Λ_u и Λ_v соответственно. Поэтому в силу результатов [7] существуют векторные последовательности $\{t'_u(k)\} \uparrow \infty$ и $\{t'_v(k)\} \uparrow \uparrow \infty$, реализующие соответственно пределы $L_u(\lambda'_u) = 0$ и $L_v(\lambda'_v) = 0$, а также имеющие свойства

$$t'_{u,2}(k)/t'_{u,1}(k) \to 0, \qquad t'_{v,1}(k)/t'_{v,2}(k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{18_1}$$

в первом подслучае и

$$t'_{u,1}(k)/t'_{u,2}(k) \to 0, \qquad t'_{v,2}(k)/t'_{v,1}(k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{18_2}$$

во втором.

Покажем, что вектор $\lambda'_v = (\alpha_u(v), f_v(\alpha_u(v)))$ является характеристическим вектором решения x как в первом, так и во втором подслучаях. Действительно, в первом из них для последовательности $\{t'_v(k)\}$ выполнены неравенства

$$L_x(\lambda'_v) \geq L_x(\lambda'_v)|_{\{t'_v(k)\}} =$$

$$= L_v(\lambda'_v) + \varlimsup_{k\to\infty} \|t'_v(k)\|^{-1} \ln\left|1 - d\frac{\|u(t'_v(k))\|}{\|v(t'_v(k))\|}\right| \equiv L_v(\lambda'_v) + l_v = 0,$$

так как предел l_v равен 0, что в силу условия $b_u < a_v$ и второго свойства (18_1) вытекает из оценки

$$\big\|u(t'_v(k))\big\|/\big\|v(t'_v(k))\big\| \leq C(\varepsilon)o[\exp(b_u - a_v + \varepsilon)\|t'_v(k)\|] \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

С другой стороны, из условия $\lambda'_u \leq \lambda'_v$ следует оценка $\|x(t)\| \leq C(\varepsilon)\exp\left[(\lambda'_v, t) + \varepsilon\|t\|\right]$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall t \geq 0$, а тем самым и неравенство $L_x(\lambda'_v) \leq 0$. Равенство $L_x(\lambda'_v) = 0$ доказано.

При доказательстве неравенств

$$L_x(\lambda'_v - \varepsilon e_i) > 0, \qquad e_i = (2 - i, i - 1) \in R^2_+, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2, \tag{19}$$

воспользуемся условием $\mathrm{mes}_1 \Lambda_v > 0$, из которого следует неравенство $\alpha_v < \beta_v = \alpha_u$. Поэтому на его основании с учетом свойства (18) для последовательности $\{t'_u(k)\}$ имеем неравенства

$$L_x(\lambda'_v - \varepsilon e_1) \geq L_x(\lambda'_v - \varepsilon e_1)|_{\{t'_u(k)\}} = L_x(\lambda'_u - \varepsilon e_1)|_{\{t'_u(k)\}} =$$

$$= L_x(\lambda'_u)|_{\{t'_u(k)\}} + \varepsilon \overset{\alpha_v \leq \alpha_u}{=} L_u(\lambda'_u) + \varepsilon = \varepsilon > 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

в которых без нарушения общности предполагаем существующими все использованные пределы. Аналогичным образом для последовательности $\{t'_v(k)\}$ со свойством (18_1) и в силу условия $b_u < a_v$ получаем неравенства

$$L_x(\lambda'_v - \varepsilon e_2) \geq L_x(\lambda'_v - \varepsilon e_2)|_{\{t'_v(k)\}} \overset{b_u \leq a_v}{=} L_v(\lambda'_v) + \varepsilon = \varepsilon > 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Итак, доказано, что λ'_v является характеристическим вектором решения x, т. е. доказано равенство $f_x(\alpha_u(v)) = f_v(\alpha_u) = a_v$.

Докажем теперь равенство $\Lambda_x = \{(\alpha_u, a_v)\}$. Согласно следствию 2 выполнены равенства $\alpha_x = \alpha_u$ и $a_x = a_v$. Если теперь предположить $\beta_x > \alpha_x = \alpha_u$, то в силу доказанного равенства $f_x(\alpha_x) = a_v$ и убывания функции $f_x(\lambda_1)$ на отрезке $[\alpha_x, \beta_x]$ имеем противоречивое неравенство $a_v = f_x(\alpha_x) > f_x(\beta_x) \equiv a_x = a_v$. Таким образом, $\beta_x = \alpha_x = \alpha_u$, $\delta = \beta_v = \alpha_u$. В первом подслучае лемма 3 доказана.

Рассмотрим теперь второй подслучай. Равенство $L_x(\lambda'_v) = 0$, необходимое для доказательства того, что $\lambda'_v = (\alpha_v, a_u) = (\alpha_v, b_v)$ является характеристическим вектором решения x, устанавливается точно так же, как и в первом подслучае. Доказательство неравенств (19) осуществляем следующим образом:

$$L_x(\lambda'_v - \varepsilon e_1) \geq L_x(\lambda'_v - \varepsilon e_1)\Big|_{\{t'_v(k)\}} \overset{\beta_u \leq \alpha_v}{=} L_v(\lambda'_v - \varepsilon e_1)|_{\{t'_v(k)\}} =$$

$$= L_v(\lambda'_v) + \varepsilon = \varepsilon > 0,$$

$$L_x(\lambda'_v - \varepsilon e_2) \geq L_x(\lambda'_v - \varepsilon e_2)\Big|_{\{t'_u(k)\}} =$$

$$= L_x(\lambda'_u - \varepsilon e_2|_{\{t'_u(k)\}} \overset{a_v \leq a_u}{=} L_u(\lambda'_u) + \varepsilon = \varepsilon > 0,$$

причем предпоследнее равенство основано на неравенстве $a_v < a_u$, вытекающем из условия леммы 3 о многоточечности множества Λ_v во втором подслучае. Таким образом, λ'_v является характеристическим вектором решения x и $f_x(\alpha_v) = f_v(\alpha_v) = b_v = a_u$. Поскольку согласно следствию 2 имеем $\alpha_x = \alpha_v$ и $a_x = a_u$, предполагая $\beta_x > \alpha_x = \alpha_v$, приходим, как и выше, к противоречию с тем, что $a_x = a_u = f_x(\alpha_v)$. Поэтому $\beta_x = \alpha_x$. Очевидно, и в этом случае $\delta = \alpha_v = \beta_x$. Лемма 3 во втором подслучае доказана.

Рассмотрим третий подслучай. Покажем, что любое решение x имеет единственный характеристический вектор $\lambda_v = (\alpha_v, a_v)$, т. е. докажем равенство $\Lambda_x = \Lambda_v$. С помощью неравенства $\lambda'_u < \lambda_v$ легко доказать равенство $L_x(\lambda_v) = 0$. Неравенства $L_x(\lambda_v - \varepsilon e_i) > 0$, $\varepsilon > 0$, $e_i \in R^2_+$, могут быть доказаны, например, следующим образом. Пусть $\{t^\varepsilon_v(k)\} \uparrow \infty$ реализует предел $L_v(\lambda_v - \varepsilon e_i) > 0$, $\varepsilon > 0$, при некотором фиксированном $i \in \{1, 2\}$. Тогда для того же i выполняются неравенства

$$L_x(\lambda_v - \varepsilon e_i) \geq L_x(\lambda_v - \varepsilon e_i)\Big|_{\{t^\varepsilon_v(k)\}} = L_v(\lambda_v - \varepsilon e_i) > 0, \qquad \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, $\lambda_v \in \Lambda_x$ и поэтому $f_x(\alpha_v) = a_v$, $\alpha_v \in [\alpha_x, \beta_x]$. Из условия $\lambda'_u < \lambda_v$ следуют неравенства $\alpha_u < \alpha_v$ и $a_u < a_v$. Поэтому согласно следствию 2 имеем $\alpha_x = \alpha_v$ и $a_x = a_v$. Из этих равенств и равенства $f_x(\alpha_v) = a_v$ непосредственно получаем $\beta_x = \alpha_v = \beta_v = \delta$. Лемма 3 доказана и в этом подслучае, а тем самым в первом случае.

Рассмотрим второй случай. Поскольку множество $\Lambda_u(v)$ имеет представление $\Lambda_u(v) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_v \colon \lambda_1 \in [\alpha_u(v), \delta]\}$, для любого вектора $\lambda \in \Lambda_v$ с первой компонентой $\lambda_1 \in (\alpha_u(v), \delta) \subset [\alpha_v, \beta_v]$ существует вектор $\lambda_u \in \Lambda_u$, удовлетворяющий условию $\lambda_u < \lambda$. Покажем, что этот вектор λ является характеристическим решения x. Из оценки $\|x(t)\| \le C(\varepsilon)\exp[(\lambda, t) + \varepsilon\|t\|]$ $\forall \varepsilon > 0$, $t \ge 0$, справедливой в силу неравенства $\lambda_u < \lambda$, следует неравенство $L_x(\lambda) \le 0$. Для последовательности же $\{t_v(k)\} \uparrow \infty$, реализующей предел $L_v(\lambda) = 0$, можно получить с помощью того же условия $\lambda_u < \lambda$ (обеспечивающего свойство $\|u(t_v(k))\|/\|v(t_v(k))\| \to 0$ при $k \to \infty$) противоположное неравенство $L_x(\lambda) \ge 0$. Таким образом, доказано равенство $L_x(\lambda) = 0$. Недостающие неравенства (19) устанавливаются с помощью условия $\lambda_u < \lambda$ и свойства $t_{v,i}(k)/\|t_v(k)\| \to \theta_i > 0$, $i = 1, 2$, при $k \to \infty$ последовательности $\{t_v(k)\}$, являющегося без нарушения общности следствием [7] включения $\lambda_1 \in (\alpha_v, \beta_v)$. Итак, $\lambda \in \Lambda_x$. Тем самым в силу свойств непрерывности характеристической функции любого нетривиального решения линейной системы Пфаффа и замкнутости и связности области ее определения справедливо представление $f_x(\lambda_1) = f_v(\lambda_1)$, $\lambda_1 \in [\alpha_u(v), \delta]$. Отсюда, в частности, следуют неравенства $\alpha_x \le \alpha_u(v)$ и $\beta_x \ge \delta$, при этом согласно следствию 2 справедливо равенство $\alpha_x = \max\{\alpha_u, \alpha_v\}$ в случае $\alpha_u \ne \alpha_v$, а по лемме 1 — равенство $\beta_x = \delta$ в случае $a_u \ne a_v$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если для характеристических функций* $f_w \colon [\alpha_w, \beta_w] \to [a_w, b_w]$ *решений* $w = u, v$ *системы* (1) *выполнены условия* $\beta_v < \alpha_u$ *и* $a_v > b_u$, *то характеристическое множество любого решения* (7) *этой системы является одноточечным множеством* $\Lambda_x = \{(\alpha_u, a_v)\}$.

Доказательство. Очевидно, согласно условию этой леммы для вектора $\lambda \equiv \equiv (\alpha_u, a_v)$ выполнены неравенства $\lambda_v'' \equiv (\beta_v, a_v) \le \lambda$ и $\lambda_u' \equiv (\alpha_u, b_u) \le \lambda$. Поэтому для любого характеристического вектора $\lambda_x = (\lambda_{x,1}, \lambda_{x,2})$ любого решения (7) справедлива оценка $\lambda_x \le \lambda$. Для доказательства противоположного неравенства $\lambda_x \ge \lambda$ воспользуемся следствием 2: $\alpha_x = \alpha_u$ и $a_x = a_v$, откуда имеем $\lambda_{x,1} \ge \alpha_u$ и $\lambda_{x,2} \ge a_v$. Равенство $\lambda_x \equiv \lambda$ и лемма 4 доказаны.

С помощью этих четырех лемм доказывается следующая теорема.

Теорема. *Любая двумерная линейная вполне интегрируемая система Пфаффа* (1) *имеет не более счетного числа решений* x *с попарно различными характеристическими множествами* Λ_x.

Доказательство. Сформулируем вначале так называемое свойство двух значений характеристического множества Λ системы (1): не существует *более двух различных* точек у множества Λ с совпадающими первыми и всеми различными вторыми координатами. Действительно, предположив существование точек $(p, q_i) \in \in \Lambda_{x_i} \subset \Lambda$, $q_1 < q_2 < q_3$, $i = 1, 2, 3$, согласно следствию 2 для любого решения $x = c_1x_1 + c_3x_3$, $c_i \ne 0$, имели бы $a_x = q_3$, откуда следует отсутствие у системы (1) решения x_2 с характеристической функцией f_{x_2}, принимающей значение $f_{x_2}(p) = q_2 < q_3$.

1. Опишем множество Λ, содержащее, по крайней мере, два различных одноточечных множества $\{p\}$ и $\{q\}$, реализуемых какими-то линейно независимыми решениями x_1 и x_2 из всего множества X решений системы (1). Тогда любое иное решение $x = c_1x_1 + c_2x_2$, $c_i \ne 0$, согласно леммам 3, 4 и следствию 2 имеет одноточеч-

ное множество $\Lambda_x = \{(\max\{p_1, q_1\}, \max\{p_2, q_2\})\}$ в случае $(q_1 - p_1)(q_2 - p_2) < 0$ или множество $\Lambda_x = \{q\}$ в случае $p < q$ ($\Lambda_x = \{p\}$ в случае $p > q$), т. е. множество Λ в рассматриваемых случаях может состоять из двух или трех различных одноточечных множеств. Отдельного рассмотрения требуют два оставшихся случая: $p_1 = q_1$ и $p_2 < q_2$ и $p_1 < q_1$ и $p_2 = q_2$.

В первом из них согласно следствию 2 для решения x имеем $\alpha_x \leq q_1$ и $a_x = q_2$. При этом по свойству двух значений необходимо $\beta_x \leq q_1$. Если $\alpha_x = q_1$, то также необходимо $\Lambda_x = \{q\}$. Если же существует решение x_3 с параметрами $\alpha_{x_3} = \beta_{x_3} < q_1$ и необходимым $a_{x_3} = q_2$, то $\Lambda_{x_3} = \{(\alpha_{x_3}, q_2)\}$, а любое решение $x = c_1x_1 + c_3x_3$, $c_i \neq 0$, в том числе и x_2, согласно предыдущему имеет множество $\Lambda_x = \{q\}$. В случае $\alpha_{x_3} < \beta_{x_3} \leq q_1$ при необходимом равенстве $a_{x_3} = q_2$ для любого решения $x = c_1x_1 + c_3x_3$, $c_i \neq 0$, имеем: в случае $\beta_{x_3} < q_1$ по лемме 4 $\Lambda_x = \{q\}$, в случае $\beta_{x_3} = q_1$ по лемме 3 $\alpha_x = \max\{\alpha_{x_1}, \alpha_{x_3}\} = q_1$, $\beta_x = \delta = \beta_{x_3} = q_1$ и поэтому $\Lambda_x = \{q\}$. Таким образом, в рассматриваемом случае Λ имеет возможные представления $\Lambda = \{p, q\}$ и $\Lambda = \{p, q, \Lambda_{x_3}\}$ с указанным выше x_3.

Рассмотрим второй случай $p_1 < q_1$ и $p_2 = q_2$. Для любого решения $x = c_1x_1 + c_2x_2$, $c_i \neq 0$, системы (1) необходимо согласно следствию 2 выполнено равенство $\alpha_x = q_1$. Покажем также, что имеет место неравенство $a_x \leq q_2$. Действительно, в случае существования решения $x = w_1$ с величинами $\alpha_{w_1} = q_1$, $a_{w_1} > q_2$ для любого решения $y = c_1w_1 + c_2x_2$, $c_i \neq 0$, в том числе и решения x_1, согласно следствию 2 получаем $a_y = a_{w_1} > q_2$, что невозможно, так как $a_{x_1} = b_{x_1} = q_2$. Если для любого x выполнено также $\beta_x = \alpha_x = q_1$, то в случае $a_x = q_2$ множество Λ состоит из двух точек p и q, а в случае существования решения $x = y_1$ с величиной $a_{y_1} < q_2$ — из трех точек p, q и (q_1, a_{y_1}) (об этом см. начало рассматриваемого пункта). Поэтому предполагаем существующим решение $x = z$ с параметрами $\alpha_z = q_1 < \beta_z$, $a_z \leq q_2$. Если при этом $b_z > q_2$, то характеристическое множество Λ_z содержит подмножество $\Lambda_{x_2}(z) = \{\lambda \in \Lambda_z \colon \lambda > q\} \neq \varnothing$ (см. п. 2 доказательства леммы 3) такое, что любое решение $y = c_2x_2 + c_3z$, $c_i \neq 0$, в том числе и решение $y = x_1$, имеет характеристическое множество $\Lambda_y \supset \Lambda_{x_2}(z)$, что невозможно в силу равенства $\Lambda_{x_1} = \{p\}$. Поэтому $b_z \leq q_2$. Если $b_z < q_2$, то согласно лемме 4 получаем для любого решения $w = c_1x_1 + c_2z$, $c_i \neq 0$, равенство $\Lambda_w = \{q\}$.

Осталось рассмотреть подслучай $\alpha_z = q_1 < \beta_z$, $a_z < q_2 = b_z$. Он совпадает с подслучаем 1_2 доказательства леммы 3 ($x_1 = u$, $z = v$), для которого было установлено равенство $\Lambda_w = \{(\alpha_z, b_z)\} = \{q\}$ для любого решения w системы (1).

Итак, во втором исключительном случае $p_1 < q_1$ и $p_2 = q_2$ множество Λ имеет возможные представления $\Lambda = \{p, q\}$, $\Lambda = \{p, q, (q_1, a_{y_1})\}$ и $\Lambda = \{p, q, \Lambda_z\}$. Таким образом, если характеристическое множество Λ системы (1) содержит два различных одноточечных множества, то она имеет не более трех решений x_i с попарно различными множествами Λ_{x_i}, $i = 1, 2, 3$, что и доказывает теорему в этом случае.

В случае, когда множество Λ содержит *одно* одноточечное характеристическое множество $\{p\}$, реализуемое на некотором подмножестве Z всего множества решений X системы (1), исключим множества $\{p\}$ и Z соответственно из множеств Λ и X и оставшиеся множества $\Lambda \setminus \{p\}$ и $X \setminus Z$ снова обозначим через Λ и X.

Очевидно, это исключение не скажется на справедливости утверждения теоремы, если оно будет доказано для новых множеств Λ и X.

2. Пусть, в соответствии с предыдущим пунктом, ограниченное множество $\Lambda \subset R^2$ состоит из замкнутых множеств — кривых Λ_x, $x \in X$, описываемых убывающими выпуклыми вниз (и тем самым непрерывными) функциями f_x, заданными на отрезках $[\alpha_x, \beta_x]$ положительной длины и имеющими замкнутые множества значений — отрезки $[a_x, b_x]$ также положительной длины.

Множество $\Delta_1 \equiv \{\lambda_1 \in R^1 : \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda\}$ на основании свойства двух значений допускает разбиение на два непересекающихся подмножества: Λ_1 всех тех значений $\lambda_1 \in \Delta_1$, для которых существуют *единственные* точки $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$, и $\Lambda_2 = \Delta_1 \setminus \Lambda_1$. Множество Λ_2 в соответствии со свойством двух значений множества Λ может либо быть пустым, либо состоять (напомним, что множество Λ также состоит лишь из замкнутых множеств — непрерывных кривых $\Lambda_x \subset R^2$, заданных на отрезках $[\alpha_x, \beta_x] \subset R^1$ положительной длины) из изолированных точек и компонент связности $r = |r_1, r_2| \subset R^1$ положительной длины.

2.1. Пусть $\Lambda_2 = \varnothing$. Тогда возможны следующие случаи:

2.1.1. Существуют два линейно независимых решения $u, v \in X$, для которых выполнено равенство

$$f_u(\lambda_1) = f_v(\lambda_1), \quad \lambda_1 \in \Big[\max\{\alpha_u, \alpha_v\}, \min\{\beta_u, \beta_v\}\Big] \equiv [\theta_1, \theta_2] \neq \varnothing.$$

Тогда согласно следствию 2 имеем $\alpha_x = \theta_1$ в случае $\alpha_u \neq \alpha_v$ для всех остальных решений $x = c_1 u + c_2 v$, $c_i \neq 0$, из множества X и $\alpha_{x_1} \leq \alpha_x = \alpha_u = \alpha_v$ для некоторого *одного* решения $x = x_1$ и всех остальных $x \in X$, линейно независимых с каждым из решений x_1, u и v (существование двух линейно независимых решений $x_1, x_2 \in X$ со свойством $\alpha_{x_1} \leq \alpha_{x_2} < \alpha_u = \alpha_v$ исключается повторным применением следствия 2 к решению $x_2 = d_1 x_1 + d_2 u$, $d_i \neq 0$). Аналогичным образом устанавливается равенство $a_x = f_u(\theta_2) = \max\{a_u, a_v\}$ в случае $\beta_u \neq \beta_v$ ($\Rightarrow a_u \neq a_v$ в случае 2.1.1), т. е. $\beta_x = \theta_2$ для всех $x = c_1 u + c_2 v \in X$ с постоянными $c_i \neq 0$, и неравенство $\beta_{x_2} \geq \beta_x = \beta_u = \beta_v$ с некоторым $x = x_2 \in X$ и любым $x \in X$, линейно независимым с каждым из решений u, v и x_2, причем характеристические функции у любых двух из этих решений на общих промежутках определения совпадают. Очевидно, в рассматриваемом случае система (1) имеет лишь конечное число решений с попарно различными характеристическими множествами.

2.1.2. Существуют два линейно независимых решения $u, v \in X$ с параметрами определения $\beta_v < \alpha_u$ и $a_v > b_u$. В этом случае согласно лемме 4 все решения $x = c_1 u + c_2 v$, $c_i \neq 0$, имеют одноточечное множество $\Lambda_x = \{(\alpha_u, a_v)\}$, исключенные нами из множества X. Этот случай невозможен.

2.1.3. Существуют решения $u, v \in X$, для которых $\beta_u < \alpha_v$ и $a_u \leq b_v$. Подслучай $a_u = b_v$ есть случай 1_2 доказательства леммы 3. В нем установлено, что множество Λ_x любого решения (7) является одноточечным и совпадает с точкой (α_v, b_v). Этот подслучай невозможен. Подслучай $a_u < b_v$ соответствует случаю 2 доказательства леммы 3 и по нему для любого решения $x = c_1 u + c_2 v \in X$, $c_i \neq 0$, имеем равенство $f_x(\lambda_1) = f_v(\lambda_1)$, $\lambda_1 \in [\alpha_v, \delta]$, причем всегда $\alpha_x = \alpha_v$, а $\beta_x = \delta$ в случае $a_u \neq a_v$. В случае же $a_u = a_v$ может появиться *одно* решение $x = x_1 \in X$, для которого $\beta_{x_1} > \delta$ и, по-прежнему, $\alpha_{x_1} = \alpha_v$ и $f_{x_1}(\lambda_1) = f_v(\lambda_1)$, $\lambda_1 \in [\alpha_v, \delta]$.

Действительно, в силу равенств $f_{x_1}(\delta) = f_v(\delta) = a_v = a_u$ выполняется неравенство $a_{x_1} = f_{x_1}(\beta_{x_1}) < f_{x_1}(\delta) = a_v$. Тогда любое решение $y = d_1x_1 + d_2v \in X$, $d_i \neq 0$, имеет согласно следствию 2 границу $a_y = a_v$, а тем самым и $a_x = a_v = a_u$ для прежних $x \in X$, отличных от x_1 (линейно независимых с x_1.) Отсюда по определению числа δ следует равенство $\beta_x = \delta$. Это означает, что могут существовать не более трех решений с попарно различными характеристическими множествами.

2.2. Пусть Λ_2 содержит изолированную точку $\lambda_1 = q_1$. Поскольку множество Λ не содержит одноточечных множеств Λ_x, это возможно лишь в случае существования решений $u, v \in X$, для характеристических функций f_u и f_v которых выполнено одно из двух условий: 2.2.1) $\beta_v = q_1 = \alpha_u$ и $a_v = q_2 > p_2 = b_u$; 2.2.2) $\beta_u = q_1 = \alpha_v$ и $a_u = p_2 < q_2 = b_v$.

2.2.1. Этот случай совпадает со случаем 1_1 доказательства леммы 3. В нем установлено равенство $\Lambda_x = \{(\alpha_u, a_v)\}$ для всех решений (7), исключающее этот случай из рассмотрения.

2.2.2. Рассматриваемый случай совпадает (отличие $\beta_u = \alpha_v$ несущественно) со случаем 2.1.3 при $a_u < b_v$. Там установлено, что система (1) имеет не более трех решений с попарно различными характеристическими множествами.

2.3. Множество Λ_2 состоит из одних (непересекающихся) компонент связности $r = |r_1, r_2|$ положительной длины. Число их, очевидно, не более чем счетно. Их бесконечное число реализовано в работе автора [4].

Установим вначале, что для любой компоненты связности $r \subset \Lambda_2$ существует лишь одно решение u_r системы (1), для которого выполнены соотношения

$$f_{u_r}(\lambda_1) = \inf_{x \neq 0} f_x(\lambda_1) \equiv f(\lambda_1) < \sup_x f_x(\lambda_1) \equiv F(\lambda_1), \quad \lambda \in r. \tag{20}$$

Предположим противное: существует решение $y \in X$, для которого выполнены неравенства

$$r_1 < \alpha_y < r_2, \qquad f_y(\lambda_1) < F(\lambda_1), \qquad \lambda_1 \in r \cap [\alpha_y, \beta_y].$$

Возьмем точку $\rho \in (r_1, \alpha_y)$ и решение $v \in X$ с характеристической функцией f_v, принимающей значение $f_v(\rho) = F(\rho)$, $\rho \in [\alpha_v, \beta_v]$, и являющееся линейно независимым с решением y. Тогда согласно следствию 2 в силу неравенств $\alpha_v \leq$ $\leq \rho < \alpha_y$ для любого решения $x = c_1y + c_2v$, $c_i \neq 0$, системы (1) выполнено равенство $\alpha_x = \max\{\alpha_y, \alpha_v\} = \alpha_y$. Это означает, что система (1) не имеет ни одного решения x, характеристическая функция f_x которого была бы определена в точке $\lambda_1 = \rho < \alpha_y$ и тем самым могла бы реализовать равенство $f_x(\rho) =$ $= f(\rho)$. Полученное противоречие устанавливает существование решения $u_r \in X$, характеристическая функция f_{u_r} которого определена на всем промежутке $r \subset$ $\subset [\alpha_{u_r}, \beta_{u_r}]$ и удовлетворяет неравенству (20). Единственность такого решения u_r (решения x и cx, $c \in R^1 \setminus \{0\}$, всюду в статье отождествляем) следует из лемм 1 и 2: для *любого* решения $x \in X$, линейно независимого с u_r, выполнены соотношения

$$f_x(\lambda_1) = F(\lambda_1) > f_{u_r}(\lambda_1), \qquad \lambda_1 \in r \cap [\alpha_x, \beta_x], \quad \alpha_x < \beta_x.$$

Зафиксируем произвольный промежуток $r \subset \Lambda_2$ и точку $\rho \in r$. Покажем, что построенное решение $u_r \in X$ и любое решение $x \in X$ с характеристической функцией f_x, принимающей значение $f_x(\rho) = F(\rho) > f(\rho)$, имеют определенные на отрезке $[\inf \Lambda_2, \rho]$ характеристические функции. Предположим противное: существует решение $y_1 \in X$, для которого $\alpha_{y_1} > \inf \Lambda_2$ и $\rho \in [\alpha_{y_1}, \beta_{y_1}]$. Если окажется, что $y_1 = u_r$, то в качестве $y_2 \in X$ возьмем какое-либо решение, удовлетворяющее условиям $\rho \in [\alpha_{y_2}, \beta_{y_2}]$, $\quad f_{y_2}(\rho) = F(\rho) > f_{y_1}(\rho) = f(\rho)$. Решения y_1 и y_2 линейно независимы, и любое решение $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \in X$, $c_i \neq 0$, имеет согласно следствию 2 величину $\alpha_y \leq \max\{\alpha_{y_1}, \alpha_{y_2}\} \equiv m$, причем $m > \inf \Lambda_2$ по предположению и все множество решений y вместе с решениями y_1 и y_2 составляют множество X. Если выполнено $\alpha_{y_2} \neq \alpha_{y_1}$, то $\alpha_y = m$, и поэтому на интервале $(\inf \Lambda_2, m)$ или его части (в том числе и пустой) может быть определена лишь *одна* функция f_{y_2}, а это противоречит определению множества Λ_2 и неравенству $\inf \Lambda_2 < m$. Если же $\alpha_{y_2} = \alpha_{y_1} = m$ и существует решение $y_3 \in X$ с величиной $\alpha_{y_3} < m$, то оно является единственным, так как решения y_1 и y_3 линейно независимы и любое другое решение $z = d_1 y_1 + d_3 y_3 \in X$, $d_i \neq 0$, снова согласно следствию 2 имеет величину $\alpha_z = \max\{\alpha_{y_1}, \alpha_{y_3}\}$. Как и выше, получаем равенство $\inf \Lambda_2 \geq m$, противоречащее справедливому по предположению противоположному неравенству.

Если решение $y_1 \in X$ будет удовлетворять дополнительному условию $f_{y_1}(\rho) = F(\rho)$, то в качестве решения $y_2 \in X$ возьмем решение u_r и снова придем к противоречию.

Таким образом, все решения $x \in X$ системы (1) имеют характеристические функции f_x с промежутками определения $[\alpha_x, \beta_x] \supset [\inf \Lambda_2, \sup \Lambda_2]$. При этом для каждой компоненты связности $r \subset \Lambda_2$ (все они имеют положительную длину) существует единственное решение $u_r \in X$ с характеристической функцией f_{u_r}, принимающей значения $f_{u_r}(\lambda_1) = f(\lambda_1) < F(\lambda_1) = f_x(\lambda_1)$ для всех $\lambda_1 \in r$ и всех линейно независимых с u_r решений $x \in X$ системы (1). Вместе с тем по определению множества Λ_2 и доказанного включения $[\alpha_x, \beta_x] \supset \Lambda_2$ для всех решений $x \in X$(в том числе и решения u_r) справедливы равенства $f_x(\lambda_1) = f(\lambda_1) = F(\lambda_1)$, $\lambda_1 \in [\alpha_x, \beta_x] \setminus \Lambda_2$. Функции же $f(\lambda_1) \leq F(\lambda_1)$ являются убывающими выпуклыми вниз непрерывными функциями, заданными на некотором одном отрезке $[\delta_1, \delta_2]$ и удовлетворяющими соотношениям

$$f(\lambda_1) < F(\lambda_1), \quad \lambda_1 \in \Lambda_2;$$

$$f(\lambda_1) = F(\lambda_1), \quad \lambda_1 \in [\delta_1, \delta_2] \setminus \Lambda_2.$$

Очевидно, что число компонент связности $r \subset \Lambda_2$ положительной длины конечно или счетно, поэтому конечно или счетно и число решений $u_r \in X$, имеющих все отличные друг от друга характеристические множества Λ_{u_r}. Удалим все эти решения из множества X. Новое множество $X \setminus \{u_r\}$ снова обозначим через X; ему соответствуют новые множества Λ^0 и $\Lambda_2^0 = \varnothing$, причем $f_x(\lambda_1) = F(\lambda_1)$, $\lambda_1 \in [\inf \Lambda_2, \sup \Lambda_2] \neq \varnothing$ для всех решений $x \in X$. Тем самым мы возвратились к п. 2.1.1 доказательства.

Теорема доказана.

Из ее доказательства вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 3.** *Пусть u и v — линейно независимые решения системы* (1) *с характеристическими функциями f_u и f_v, удовлетворяющими условию $\alpha_u = \alpha_v$* (*условию $a_u = a_v$*). *Тогда неравенство $\alpha_x < \alpha_u$* (*неравенство $a_x < a_u$*) *возможно лишь для одного решения $x = c_1 u + c_2 v$, $c_i \neq 0$, системы* (1).

***Замечание* 3.** Доказательство теоремы фактически содержит полное описание характеристического множества Λ двумерной линейной вполне интегрируемой системы Пфаффа (1).

1. *Гайшун И. В.* Линейные уравнения в полных производных. – Минск: Наука и техника, 1989. – 254 с.
2. *Грудо Э. И.* Характеристические векторы и множества функций двух переменных и их основные свойства // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 12. – С. 2115 – 2128.
3. *Грудо Э. И.* Характеристические векторы решений линейных однородных систем Пфаффа // Там же. – 1977. – **13**, № 5. – С. 826 – 840.
4. *Изобов Н. А.* О существовании линейной системы Пфаффа со счетным числом различных характеристических множеств ее решений // Там же. – 1998. – **34**, № 6. – С. 735 – 743.
5. *Ласый П. Г.* К теории характеристических векторов в линейных пространствах // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1981. – № 4. – С. 20 – 24.
6. *Изобов Н. А.* О существовании линейных систем Пфаффа с множеством нижних характеристических векторов положительной плоской меры // Дифференц. уравнения. – 1997. – **33**, № 12. – С. 1623 – 1630.
7. *Изобов Н. А.* О временных последовательностях, реализующих характеристические и нижние характеристические векторы решений // Там же. – 1999. – **35**, № 6. – С. 738 – 744.
8. *Изобов Н. А.* Леммы о характеристическом множестве линейной комбинации решений линейной системы Пфаффа. I // Там же. – 2002. – **38**, № 11. – С. 1571 – 1572.
9. *Изобов Н. А.* Леммы о характеристическом множестве линейной комбинации решений линейной системы Пфаффа. II // Там же. – 2003. – **39**, № 6. – С. 859 – 860.

Получено 05.10.2006