УДК 517.9

Е. А. Гребеников (Вычислит. центр РАН, Москва, Россия),
А. В. Чичурин (Брест. ун-т, Беларусь)

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧАМИ КОСМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

We present a survey of results of the study of differential equations solutions of which have singularities of a certain type, in particular moving singular points with sufficiently simple topology. New statements about the forms of particular and general solutions of similar equations are obtained.

Наведено огляд результатів досліджень диференціальних рівнянь, розв'язки яких мають особливості певного типу і, насамперед, рухомі особливі точки з достатньо простою топологією. Одержано нові твердження про вигляд частинних та загальних розв'язків таких рівнянь.

1. В начале 20-го столетия Ж. Шази выполнил ряд фундаментальных качественных исследований некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих финальные решения ньютоновой проблемы трех тел и топологию окрестности пространства при сколь угодно взаимно близком приближении двух или трех взаимно притягивающихся тел.

В специальном курсе по аналитической и качественной небесной механике, который читал в 50 – 60-х годах 20-го века академик Ю. А. Митропольский для студентов и аспирантов Киевского университета им. Т. Шевченко, детально обсуждались проблемы влияния и взаимосвязи общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений с проблемами космодинамики, ставшими в ту пору весьма актуальными.

Один из авторов имел счастливую возможность слушать некоторые лекции Ю. А. Митропольского, повлиявшие на выбор тематики его исследований, что нашло некоторое отражение в данной статье.

2. Отсутствие методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида обусловило развитие аналитической и качественной теорий, в которых одной из актуальных задач является изучение свойств решений непосредственно по аналитическому виду дифференциальных уравнений. Одна из основных задач аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений — исследование уравнений, решения которых имеют особенности определенного типа и, в первую очередь, подвижные особые точки с достаточно простой топологией.

Задача об описании классов уравнений, решения которых характеризуются определенными свойствами, восходит к работам Брио и Буке [1, 2]. Они изучили уравнения вида

$$P(w, w') = 0 \qquad (1)$$

с однозначными решениями, где P — полином степени n относительно неизвестной w и ее производной w' (аргумент функции w обозначим через z). Из уравнений (1) Эрмит [3] выделил уравнения, решения которых не имеют подвижных критических особых точек (п. к. о. т.), и показал, что решения таких уравнений являются рациональными функциями или рационально выражаются через показательные или эллиптические функции.

Для уравнения

$$P(w', w, z) = 0,$$

где P — полином относительно w' и w с аналитическими коэффициентами по z (z — аргумент функции w), Фукс и Пенлеве доказали теоремы [4], дающие необходимые и достаточные условия принадлежности этого уравнения к так называемому P-типу (решения таких уравнений не содержат подвижных критических особых точек и существенно особых точек однозначных функций).

Дифференциальные уравнения второго порядка вида

$$w'' = R(w', w, z), \tag{2}$$

где R — рациональная функция по w', w с аналитическими коэффициентами по z, исследовали Пенлеве и Гамбье [4]. В результате было выделено пятьдесят различных классов уравнений вида (2) P-типа. Исследование этих классов показало, что общее решение сорока четырех из них выражается или через элементарные функции, или через решения некоторых линейных уравнений, или через решения нелинейных уравнений первого порядка, или через решения шести неприводимых уравнений Пенлеве. Дальнейшие исследования уравнений Пенлеве были выполнены Фуксом [5], Гарнье [6], Шлезингером [7], В. В. Голубевым [8], Бутру [9].

Новый этап исследований уравнений Пенлеве начался в 1952 году. В работе Н. П. Еругина [10] для этих уравнений были сформулированы новые задачи, решения которых получены в работах А. И. Яблонского [11, 12], Н. А. Лукашевича [13 – 19], В. В. Цегельника [20 – 22], Л. А. Бордаг и А. В. Китаева [23, 24], Мурата [25], Окамото [26 – 29], Фокаса, Абловица [30] и др. В работах [31 – 34] Бюро с помощью своего метода повторил все результаты Пенлеве и Гамбье и нашел классы уравнений P-типа вида

$$P(w'', w', w, z) = 0,$$

где P — полином второй степени относительно w'' и полином относительно w', w с аналитическими коэффициентами относительно z. Аналогичные исследования выполнены также Кардон-Лебруном [35, 36].

Дифференциальные уравнения с иррациональной правой частью вида

$$(w'')^m = R(w', w, z), \qquad m \in \mathbb{N},$$

на предмет принадлежности к P-типу рассматривались Косгроу [37, 38].

Уравнения вида

$$w''' = P(w'', w', w, z), \tag{3}$$

$$w''' = R(w'', w', w, z) \tag{4}$$

(P — полином по w'', w', w с аналитическими коэффициентами по z, R — рациональная функция по w'', w', w с аналитическими коэффициентами по z) исследовали Гарнье [39], Шази [40], Бюро [41], Кардон-Лебрун [42], Экстон [43], Н. А. Лукашевич [44 – 46], В. И. Ляликова [47, 48], И. П. Мартынов [49 – 53], Косгроу [54] и др. Ими найдены в некоторых случаях необходимые и достаточные условия отсутствия п. к. о. т. у решений специальных видов уравнений вида (3), (4). Среди уравнений вида (3) Шази выделил такие, у которых общие интегралы являются однозначными функциями, в то время как их особые интегралы имеют подвижные критические точки. Основная задача, рассмотренная Шази [40], состояла в построении и исследовании новых нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка P-типа и открытии новых классов функций, определяемых этими уравнениями.

Исследование уравнения вида (4), согласно методу Пенлеве, сводится к исследованию уравнений

$$w''' = A(w', w, z)w''^2 + B(w', w, z)w'' + C(w', w, z), \tag{5}$$

где $A(w', w, z)$ имеет один из следующих видов:

$$0, \qquad \frac{1-1/n}{w'+a_1} \quad (n \in Z \setminus \{0, -1\} \vee n = \infty),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w'+a_1}+\frac{1}{w'+a_2}\right), \qquad \frac{1}{w'+a_1} + \frac{1}{2(w'+a_2)},$$

$$\frac{1}{2(w'+a_1)} + \frac{1}{3(w'+a_2)}, \qquad \frac{1}{2(w'+a_1)} + \frac{3}{4(w'+a_2)},$$

$$\frac{1}{2(w'+a_1)} + \frac{5}{6(w'+a_2)},$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{w'+a_1}+\frac{1}{w'+a_2}\right), \qquad \frac{2}{3(w'+a_1)} + \frac{5}{6(w'+a_2)}, \qquad \frac{3}{4}\left(\frac{1}{w'+a_1}+\frac{1}{w'+a_2}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w'+a_1}+\frac{1}{w'+a_2}+\frac{1}{w'+a_3}\right).$$

Здесь a_i, $i = 1, 2, 3,$ — рациональные функции по w и аналитические функции по z; функции B, C являются рациональными (дробями), каждый полюс которых не более чем первого порядка и совпадает с полюсом дроби A. При этом порядок бесконечности $w' = \infty$ для B и C не более чем первый и третий соответственно. Упрощенное уравнение для уравнения (5) имеет вид

$$w''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{w''^2}{w'} + b(w)w'w'' + c(w)w'^3, \tag{6}$$

где $n \in Z \setminus \{0, -1\} \vee n = \infty$; $b(w)$, $c(w)$ — рациональные функции по w.

Шази рассматривал уравнения (5), упрощенные уравнения (6) для которых были бы, возможно, более сложными (максимальное число полюсов w равно шести). Если общий интеграл упрощенного уравнения (6) был автоморфной функцией (фуксовой или клейновой), то общий интеграл полного уравнения также выражался в этих функциях. Среди упрощенных уравнений Шази выделил уравнение вида

$$y''' = \frac{PQ'' - P''Q}{PQ' - P'Q}y'y'' - \frac{P'Q'' - P''Q'}{PQ' - P'Q}y'^3$$

(P, Q — многочлены четвертой степени по w с постоянными коэффициентами), которое оказалось наиболее интересным с точки зрения решаемой задачи. Для этого уравнения полное уравнение, согласно методу Пенлеве [4, 40], имеет вид

$$y''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{(y'-a_k')(y''-a_k'') + A_k(y'-a_k')^3 + B_k(y'-a_k')^2 + C_k(y'-a_k')}{y - a_k} +$$

$$+ Dy'' + Ey' + \prod_{i=1}^{6}(y-a_i)\sum_{k=1}^{6}\frac{F_k}{y-a_k} \tag{7}$$

и удовлетворяет необходимым условиям принадлежности к P-типу. Необходимые и достаточные условия принадлежности к P-типу для уравнения (7) представляют собой систему

$$\sum_{k=1}^{6} A_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} a_k A_k = -6, \qquad \sum_{k=1}^{6} a_k^2 A_k = -2\sum_{k=1}^{6} a_k, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{6} F_k = \sum_{k=1}^{6} a_k F_k = \sum_{k=1}^{6} a_k^2 F_k = 0, \tag{9}$$

$$2A_k^2 + \sum_j \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0, \qquad k, j = \overline{1,6};\ j \neq k, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} -\left(-\frac{5}{2}A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j} \right) B_k + \sum_j \left(\frac{1}{2}A_k + \frac{1}{a_k - a_j} \right) B_j = -A_k' + \\ + A_k \sum_j \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - 3\sum_j A_j \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} + \frac{3}{2}A_k \sum_{k=1}^{6} a_i' A_i, \\ 2D + \sum_{k=1}^{6} \left(B_k - 3a_k' A_k \right) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} -\left(2A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j} \right) C_k + \sum_j C_j \frac{1}{a_k - a_j} = B_k^2 - B_k' - B_k \sum_j \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - \\ - \sum_j \frac{3A_j\left(a_k' - a_j'\right)^2 + 2B_j\left(a_k' - a_j'\right)}{a_k - a_j} + B_k D - E - \sum_j \frac{a_k'' - a_j''}{a_k - a_j}, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} -a_k''' - B_k C_k + C_k' + \sum_j \frac{\left(a_k' - a_j'\right)\left(a_k'' - a_j'' - C_k\right) + A_j\left(a_k' - a_j'\right)^3}{a_k - a_j} + \\ + \sum_j \frac{B_j\left(a_k' - a_j'\right)^2 + C_j\left(a_j' - a_k'\right)}{a_k - a_j} + E a_k' + \\ + D\left(a_k'' - C_k\right) + F_k \prod_j \left(a_k - a_j\right) = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

$$k, j = \overline{1,6}; \quad j \neq k,$$

состоящую из 31 алгебраически-дифференциального уравнения, в которых неизвестными являются 32 функции — коэффициенты уравнения (7).

Шази не нашел решений системы уравнений (8) – (13), а потому явно не выделил классы уравнений вида (7), решения которых не имеют п. к. о. т. [55]. Спустя 80 лет Н. А. Лукашевич продолжил исследование этой системы. В работе [45] он решил систему уравнений (8), (10) и показал, что коэффициенты A_k и a_k, $k = \overline{1,6}$, уравнения (7) связаны соотношениями

$$A_j = -\frac{1}{a_j}, \qquad j = \overline{1,6}. \tag{14}$$

Решение системы уравнений (11) – (13) в общем виде было получено в работе [56]. При этом удалось найти все решения системы (8) – (13) как в случае постоянных величин a_k, $k = \overline{1,6}$, так и в случае, когда функции a_k, $k = \overline{1,6}$, имеют вид

$$a_k = \gamma_k \exp\left\{ \int \lambda(x)\,dx \right\}, \qquad k = \overline{1,6}, \tag{15}$$

где γ_k — некоторые постоянные.

Так, в случае постоянных a_k, $k = \overline{1,6}$, решение системы уравнений (8) – (13) описывается следующей теоремой [56, 57].

Теорема 1. *Система уравнений* (8) – (13) *при постоянных* a_k, $k = \overline{1,6}$, *имеет три решения*:

$$B_k = -\frac{1}{3}D, \quad C_k = \frac{a_k}{3}\left(E - \frac{1}{3}D' + \frac{2}{9}D^2\right) + a_k\left(\sigma_3 - a_k\sigma_2 - a_k^3\right)\chi,$$

$$F_k = \frac{a_k}{3\varphi(a_k)}\left(\frac{1}{3}D'' - \frac{2}{3}DD' - \frac{2}{3}E' + \frac{2}{3}DE + \frac{4}{27}D^3\right), \quad k = \overline{1,6}, \tag{16}$$

$$\chi = C\exp\left\{-\frac{2}{3}\int D\,dx\right\} \quad (\textit{при}\ \psi = 0),$$

или

$$B_k = a_k\left(\sigma_2 + a_k^2\right)\psi - \frac{1}{3}D, \quad C_k = \psi^2 a_k^3\left(\frac{1}{3}a_k^4 + \frac{4}{3}\sigma_2 a_k^2 + \sigma_2^2 + \frac{4}{3}\sigma_4\right) +$$
$$+ \frac{a_k}{3}\left(E - \frac{1}{3}D' + \frac{2}{9}D^2 + \psi^2(6\sigma_2\sigma_4 + 2\sigma_6)\right) - a_k^2\left(\sigma_2 + a_k^2\right)\chi,$$

$$F_k = \frac{a_k^2\left(\sigma_2 + a_k^2\right)\left(a_k^6 + 4\sigma_2 a_k^4 + a_k^2\left(3\sigma_2^2 + 4\sigma_4\right) + 7\sigma_2\sigma_4 + \sigma_6\right)}{3\varphi(a_k)}\psi^3, \quad k = \overline{1,6}, \tag{17}$$

$$E = \frac{1}{9}\left(3D' - 2D^2\right) + \sigma_2\sigma_4 - \sigma_6, \quad \chi = 0 \quad (\textit{при}\ s_3 = 0),$$

или

$$B_k = a_k\left(\sigma_2 + a_k^2\right)\psi - \frac{1}{3}D, \quad C_k = \psi^2 a_k^3\left(\frac{1}{3}a_k^4 + \frac{4}{3}\sigma_2 a_k^2 + \sigma_2^2 + \frac{4}{3}\sigma_4\right) +$$
$$+ \frac{a_k}{3}\left(E - \frac{1}{3}D' + \frac{2}{9}D^2 + \psi^2(6\sigma_2\sigma_4 + 2\sigma_6)\right) - a_k^2\left(\sigma_2 + a_k^2\right)\chi,$$

$$F_k = \frac{1}{27\varphi(a_k)}\left[a_k\psi\left(9a_k^9\psi^2 - 27a_k^6\chi + 9a_k^3\sigma_6\psi^2 + \psi(-4DD' + 3(D'' - 3E'))\right)\right],$$
$$k = \overline{1,6}, \tag{18}$$
$$\chi' = \frac{1}{27}\left(18D\chi + \left(3D' - 2D^2 - 9E - 9\sigma_6\right)\psi^3\right), \quad \sigma_2 = \sigma_4 = 0,$$

где D — *заданная,* ψ — *произвольная аналитическая функция по* z, *а* σ_i, $i = 2, 3, 4,$ — *соответствующие элементарные симметрические многочлены, составленные из элементов* a_k, $k = \overline{1,6}$, $\varphi(a_k) = \prod_j (a_k - a_j)$, $k, j = \overline{1,6}$, $j \neq k$.

Учитывая вид решений (16) – (18) системы уравнений (8) – (13), можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Уравнения*

$$w''' = \sum_{k=1}^{6}\frac{w'w'' - w'^3/a_k + B_k w'^2 + C_k w'}{w - a_k} +$$
$$+ Dw'' + Ew' + \prod_{i=1}^{6}(w - a_i)\sum_{k=1}^{6}\frac{F_k}{w - a_k}, \tag{19}$$

имеющие соответственно коэффициенты (16), (17) *или* (18), *принадлежат к P-типу.*

Доказательство этой теоремы вытекает из того факта, что в каждом из этих трех случаев коэффициенты уравнения (19) удовлетворяют системе (8) – (13), представляющей собой необходимые и достаточные условия принадлежности уравнения (7) к P-типу.

Таким образом, из теоремы 2 следует, что среди уравнений (7) существуют три вида уравнений P-типа, которые имеют неподвижные полюсы a_k, $k = \overline{1,6}$. Как показано в [45], уравнение (19) с постоянными коэффициентами a_k, $k = \overline{1,6}$, всегда можно с помощью замены $\frac{dw}{dz} = \eta$, $\eta^2 = y$ свести к линейному неоднородному уравнению второго порядка с шестью особыми точками

$$\frac{d^2y}{dw^2} = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{w-a_k}\frac{dy}{dw} - 2\sum_{k=1}^{6} \frac{y}{a_k(w-a_k)} + 2E\left(1+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{6} \frac{a_k}{w-a_k}\right). \tag{20}$$

В свою очередь исследование уравнения (20) сводится к исследованию уравнения

$$\frac{d^2y}{dw^2} - \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{w-a_k}\frac{dy}{dw} + 2\sum_{k=1}^{6} \frac{y}{a_k(w-a_k)} = 0. \tag{21}$$

В [56] приведено решение уравнения (21) в виде сходящихся степенных рядов, а для уравнения (19) найдено однопараметрическое семейство решений в виде общего решения уравнения Риккати. Для 39 коэффициентных соотношений уравнения (19) доказаны теоремы о существовании решений.

Если коэффициенты a_k, $k = \overline{1,6}$, не постоянны и имеют вид (15), то решение системы уравнений (8) – (13) имеет вид, указанный в [56]. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Система* (8) – (13) *при* $a_k = \gamma_k \exp\left\{\int \lambda(x)dx\right\}$, $k = \overline{1,6}$, *имеет четыре решения*:

$$B_k = -\frac{1}{3}D - 3\lambda, \tag{22}$$

$$C_k = \frac{\gamma_k}{3}\left(E - \frac{1}{3}D' + \frac{2}{9}D^2 + 2\lambda' - 4\lambda D - 31\lambda^2\right)e^{\int \lambda(x)dx} + \\ + \gamma_k\left(\sigma_3 - \gamma_k\sigma_2 - \gamma_k^3\right)\chi, \tag{23}$$

$$F_k = \\ = \frac{\gamma_k}{9\varphi(\gamma_k)}e^{\int \lambda(x)dx}\left[2\theta(D+3\lambda) + 9D\lambda^2 + 9\lambda^3 - 9(D+3\lambda)\lambda' - 3(3E\lambda + \theta' - 3\lambda'')\right],$$

$$k = \overline{1,6}, \tag{24}$$

$$\chi = 0,$$

или

$$(22), (23), (24), \quad \chi' = \left(\frac{2}{3}D + 3\lambda\right)\chi, \quad \sigma_4 = 0,$$

или

$$B_k = \gamma_k\left(\sigma_2 + \gamma_k^2\right)\psi - \frac{1}{3}D - 3\lambda, \tag{25}$$

$$C_k = \frac{\gamma_k}{3}\left(E - \frac{1}{3}D' + \frac{2}{9}D^2 + 2\lambda' - 4\lambda D - 31\lambda^2\right)e^{\int \lambda(x)dx} - \gamma_k^2\left(\sigma_2 + \gamma_k^2\right)\chi +$$

$$+\left[\gamma_k^3\left(\sigma_2^2+\frac{4}{3}\sigma_2\gamma_k^2+\frac{1}{3}\gamma_k^4+\frac{4}{3}\sigma_4\right)+\frac{\gamma_k}{3}(6\sigma_2\sigma_4+2\sigma_6)\right]\psi^2 e^{\int\lambda(x)dx}, \qquad (26)$$

$$F_k = \frac{\gamma_k^4}{3\varphi(a_k)}\left(3\chi'-\left(2D+9\lambda+3\gamma_k^3\psi\right)\chi\right) +$$

$$+ \frac{\gamma_k e^{\int\lambda(x)dx}}{4860\varphi(a_k)}\Big[226D^3-6D^2\left(405\lambda-58\gamma_k^3\psi\right)+$$

$$+3D\left(339E+12963\lambda^2-1728\gamma_k^3\lambda\psi-21\sigma_6\psi^2-353D'-42\lambda'\right)+$$

$$+9\Big(107541\lambda^3-1434\gamma_k^3\lambda^2\psi+E\left(174\gamma_k^3\psi-351\lambda\right)+$$

$$+\left(\left(400\gamma_k^6+781\sigma_6\right)\psi^2+73D'-38\lambda'\right)+$$

$$+2\gamma_k^3\psi\left(3\left(30\gamma_k^6+59\sigma_6\right)\psi^2-29D'-6\lambda'\right)+60(D''+3\lambda''-3E')\Big)\Big], \qquad k=\overline{1,6},$$

$$\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=0, \qquad \chi'=\left(\frac{2}{3}D+3\lambda\right)\chi-(\theta+\sigma_6\psi^2)\psi e^{\int\lambda(x)dx},$$

или

$$(25), (26), \qquad \sigma_3=\sigma_4=0,$$

$$F_k=\frac{\gamma_k e^{\int\lambda(x)dx}}{4860\varphi(a_k)}\Big(224D^3-6D^2\left(391\lambda+2\gamma_k\left(\sigma_2+\gamma_k^2\right)\psi\right)+$$

$$+6D\left(168E+9894\lambda^2+216\gamma_k\left(\sigma_2+\gamma_k^2\right)\lambda\psi-15\sigma_6\psi^2-176D'-24\lambda'\right)-$$

$$-9\Big(417E\lambda-153147\lambda^3+6E\gamma_k\left(\sigma_2+\gamma_k^2\right)\psi-4641\gamma_k\left(\sigma_2+\gamma_k^2\right)\lambda^2\psi-$$

$$-2\gamma_k\left(\sigma_2+\gamma_k^2\right)\psi\left(3\left(30\gamma_k^2\left(\sigma_2+\gamma_k^2\right)\left(3\sigma_2+\gamma_k^2\right)+29\sigma_6\right)\psi^2+D'-186\lambda'\right)+$$

$$+\lambda\left(3\left(2400\gamma_k^4\left(\sigma_2+\gamma_k^2\right)-2339\sigma_6\right)\psi^2-739D'+474\lambda'\right)+3(60E'-20D''+\theta')\Big)\Big),$$

$$k=\overline{1,6}, \qquad \lambda'=\frac{1}{60}\left(20\lambda(D+33\lambda)-\theta-\sigma_6\psi^2\right),$$

где $\psi=\frac{C}{3}e^{\int(D(x)-27\lambda(x))dx}$, D *— заданная, а* λ *— произвольная аналитическая функция по* x, $\theta\equiv E-\frac{1}{3}D'+\frac{2}{9}D^2+2\lambda'-4\lambda D-31\lambda^2$, $\varphi(a_k)\equiv\equiv\prod_j(a_k-a_j)$, $k,j=\overline{1,6}$, $j\neq k$, C *— произвольная постоянная.*

Шази [40, 55] показал, что некоторые случаи вырождения уравнения (7) являются уравнениями Пенлеве и, следовательно, уравнение (7) может быть рассмотрено как уравнение, решения которого являются существенно новыми функциями. В работах [56, 58] найдены коэффициентные соотношения, при которых уравнение (7) имеет двупараметрическое семейство решений, представляющее собой общее решение уравнений вида

$$y''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}\right)y'^2+\frac{1}{3}D(x)y', \qquad y''=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{y-1}+\frac{1}{y+1}\right)y'^2.$$

Последнее уравнение легко интегрируется в элементарных функциях

$$y=1+\frac{1}{C_1(x-C_2)-1}+\frac{1}{C_1(C_2-x)-1},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Чтобы найти общее решение системы Шази (8) – (13), надо решить систему уравнений (9) и уравнение

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{a_k\left(\sigma_2 + a_k^2\right)a_k'}{\varphi(a_k)} = 0$$

(это уравнение получено в работе [59]). При этом функции A_k, $k = \overline{1,6}$, имеют вид (14), а вид функций B_k, C_k, F_k, $k = \overline{1,6}$, указан в работах [56, 59] (из-за громоздкости мы эти функции здесь не приводим).

В заключение отметим, что разработка метода обратной задачи рассеяния обусловила значительный прогресс в развитии математической физики, особенно в последние десятилетия 20-го столетия. Применение этого метода позволило проинтегрировать многие дифференциальные уравнения в частных производных, важные в приложениях (уравнения Кортевега – де Фриза, уравнение sin-Gordon, нелинейное уравнение Шредингера и др.). Применение метода группового анализа уравнений в частных производных, а также метода, усовершенствованного Вейсом (J. Weiss), Табором (M. Tabor), Карневейлом (G. Carnevale) (идеи этого метода восходят к работам С. В. Ковалевской и Пенлеве), как к уравнениям в частных производных, так и к обыкновенным дифференциальным уравнениям, способствовало появлению большого числа новых физических моделей (описываемых этими уравнениями), которые редуцируются к уравнениям P-типа. После работ Шлезингера, Фукса, Гарнье, посвященных представлению коэффициентов системы дифференциальных уравнений Фукса в виде функций положения полюсов, в работах японских математиков (Сато, Дзимбо, Мива и др.) получила развитие теория изомонодромной деформации, и здесь также обнаружена связь с уравнениями P-типа. Приложение этой теории к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений приведено в работах А. Р. Итса, В. Ю. Новокшенова, А. А. Капаева, А. В. Китаева и др.

При исследовании уравнения Шази вида (7) с постоянными коэффициентами при $D = 0$ появляется уравнение, которое удается свести к линейному уравнению второго порядка с шестью особыми точками. Исследование этого уравнения актуально, поскольку само уравнение тесно связано с уравнениями класса Фукса и уравнениями математической физики.

Таким образом, можно заключить, что изучение свойств решений для рассматриваемых классов дифференциальных уравнений второго и третьего порядков важно не только с точки зрения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, но и с точки зрения ее приложений к астрономическим, физическим и другим проблемам.

1. *Briot C., Bouquet T.* Recherches sur les properties des fonction definites par des equations differentielles // J. Ecole Polut. – Paris, 1856.
2. *Briot C., Bouquet T.* Theorie des fonctions elliptiques // J. Ecole Polut. – Paris, 1875.
3. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.
4. *Painleve P.* Lecons sur les theorie analytique des equations differentielles. Professies a Stokholm. – Paris, 1897. – 589 p.
5. *Fuchs R.* Uber lineare homogene Differential gleichungen Zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenenwesentlichen singularen Stellen // Math. Ann. – 1907. – **63**. – S. 301 – 321.
6. *Garnier R.* Sur les equations differentielles du trouseme ordre dont l’integrale generale est uniforme et sur classe d’equations nouvelles d’ordre superieur dont l’integrale generale a ses points critiques fixes // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1912. – **29**. – P. 1 – 126.
7. *Schlesinger L.* Uber eine Klasse von Differentialsystemen beliebigen Ordnung mit festen kritischen Punkten // J. reine und angew. Math. – 1912. – **141**. – S. 96 – 145.
8. *Голубев В. В.* Къ теоріи уравненій Painleve // Мат. сб. – 1912. – **28**, вып. 2. – С. 323 – 349.

9. *Boutroux P.* Etude asymptotique de transcendantes de M. Painleve dont est les solutions des equations differentielles du second ordre // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1914. – **31**. – P. 99–159.
10. *Еругин Н. П.* Аналитическая теория нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. – 1952. – **16**, № 4. – С. 465–486.
11. *Яблонский А. И.* Общее представление решений второго уравнения Пенлеве // Докл. АН БССР. – 1958. – **2**, № 11. – С. 139–142.
12. *Яблонский А. И.* О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. – 1959. – № 3. – С. 30–35.
13. *Громак В. И., Лукашевич Н. А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. – Минск: Университетское, 1990. – 157 с.
14. *Лукашевич Н. А.* К теории четвертого уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. – 1967. – **3**, № 5. – С. 771–789.
15. *Лукашевич Н. А.* К теории третьего уравнения Пенлеве // Там же. – 1967. – **3**, № 11. – С. 1913–1923.
16. *Лукашевич Н. А.* К теории пятого уравнения Пенлеве // Там же. – 1968. – **4**, № 8. – С. 1413–1420.
17. *Лукашевич Н. А.* К теории уравнений Пенлеве // Там же. – 1970. – **6**, № 3. – С. 425–430.
18. *Лукашевич Н. А.* Некоторые задачи аналитической теории дифференциальных уравнений: Автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1971. – 17 с.
19. *Лукашевич Н. А.* К теории шестого уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. – 1972. – **8**, № 8. – С. 1404–1408.
20. *Цегельник В. В.* Аналитическая характеристика решений нелинейных дифференциальных уравнений P-типа: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1985. – 82 с.
21. *Цегельник В. В.* Гамильтонианы, связанные с первым уравнением Пенлеве // Докл. НАН Беларуси. – 2001. – **45**, № 5. – С. 45–47.
22. *Цегельник В. В.* Уравнения Пенлеве-типа: аналитические свойства решений и их приложения: Автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Минск, 2002. – 32 с.
23. *Бордаг Л. А., Китаев А. В.* Об алгебраических и рациональных решениях пятого уравнения Пенлеве. – Дубна, 1986. – 14 с. – (Препринт / Объед. ин-т ядер. исслед.; Р5-86-334).
24. *Бордаг Л. А., Китаев А. В.* Преобразования решений третьего и пятого уравнений Пенлеве и их частные решения. – Дубна, 1985. – 17 с. – (Препринт / Объед. ин-т ядер. исслед.; Р5-85-740).
25. *Murata Y.* Rational solutions of the second and the fourth Painleve equations // Func. ekvacioj. – 1985. – **28**. – P. 1–32.
26. *Okamoto K.* Studies of the Painleve equations III, second and fourth Painleve equations P_{II} and P_{IV} // Math. Ann. – 1986. – **275.** – P. 221–255.
27. *Okamoto K.* Studies of the Painleve equations II, fifth Painleve equations P_{V} // Jap. J. Math. – 1987. – **13**, № 1. – P. 47–76.
28. *Okamoto K.* Studies of the Painleve equations I, sixth Painleve equations P_{VI} // Ann. math. pura ed appl. – 1987. – **146.** – P. 337–381.
29. *Okamoto K.* Studies of the Painleve equations IV, third Painleve equations P_{III} // Func. ekvacioj. – 1987. – **30.** – P. 305–332.
30. *Fokas A. S., Ablowitz M. J.* On a unified approach to transformations and elementary solutions of Painleve equations // J. Math. Phys. – 1982. – **23**, № 11. – P. 2033–2041.
31. *Bureau F. J.* Differential equations with fixed critical points // Ann. mat. pura ed appl. Ser IV. – 1964. – **64**. – P. 229–364.
32. *Bureau F. J.* Equations differentielles du second ordre enyet du second degre en $\ddot{Y}$ dont l'integrale ginerale est a points critiques fixes // Ann. mat. pura ed appl. Ser. IV. – 1972. – **91**. – P. 163 – 281.
33. *Bureau F. J.* Les equations differentielles du second ordre a points critiques fixes. Les integrales de equations A3 de Painleve // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. – 1983. – **69**, № 11. – P. 614–640.
34. *Bureau F. J.* Systèmes différentiels à points critiques fixes. IX. Les systèmes différentiels polynomiaux stables // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. – 1981. – **67**, № 11. – P. 755–781.
35. *Cardon-Lebrun C.* Conditions nesessaires pour que solutions de certaines equations differentielles soient a points critiques isoles fixes // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. – 1969. – **55**, № 7. – P. 524–536, 656–672.
36. *Cardon-Lebrun C.* Simplifices de Painleve dont les solutions sont a points critiques isoles fixes // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. – 1969. – **55**, № 10. – P. 883–915.
37. *Cosgrove C. M., Scoufis G.* All binomial type Painleve equations of the second order and degree three or higher // Stud. Appl. Math. – 1993. – **90**. – P. 119–187.
38. *Cosgrove C. M., Scoufis G.* Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree // Ibid. – 1993. – **88**. – P. 25–87.
39. *Garnier R.* Sur les equations differentielles du troisieme ordre dont l'integrale generale est

uniforme et sur une classe d'equations nouvelles d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes. – Paris, 1911. – **1–4**. – P. 1 – 127.

40. *Chazy J.* Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur, dont l'integrale generale a ses points critiques fixes // Acta Math. – 1911. – **34**. – P. 317 – 385.
41. *Bureau F. J.* Sur des systèmes différentiels non linéaires du troisième ordre et les équations différentielles non linéaires associées // Acad. roy. Belg. Bull. – 1987. – **73**, № 6 – 9. – P. 335 – 353.
42. *Cardon-Lebrun C.* Une classe d'equations differentielles troisieme ordre dont les solutions sont a points critiques isoles fixes // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. – 1970. – **56**, № 2. – P. 101 – 125.
43. *Exton H.* Third orders differential systems with fixed critical points // Funkc. ekvacioj. – 1976. – **19**, № 1. – P. 45 – 51.
44. *Лукашевич Н. А.* Уравнения третьего порядка без подвижных критических точек (п. к. т.) // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 5. – С. 778 – 785.
45. *Лукашевич Н. А.* К теории уравнения Шази // Там же. – 1993. – **29**, № 2. – С. 353 – 357.
46. *Лукашевич Н. А.* Простейшие дифференциальные уравнения третьего порядка P-типа // Там же. – 1995. – **31**, № 6. – С. 955 – 961.
47. *Ляликова В. И.* Специальное дифференциальное уравнение третьего порядка с неподвижными критическими особыми точками // Там же. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1090 – 1092.
48. *Ляликова В. И.* Уравнение третьего порядка с неподвижными критическими точками и кратными полюсами // Докл. АН БССР. – 1984. – **28**, № 6. – С. 485 – 487.
49. *Мартынов И. П.* Об одном уравнении третьего порядка без подвижных критических точек // Там же. – 1985. – **29**, № 2. – С. 115 – 118.
50. *Мартынов И. П.* Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических точек // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 6. – С. 937 – 946.
51. *Мартынов И. П.* Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка // Там же. – № 5. – С. 764 – 771.
52. *Мартынов И. П.* Об условиях однозначности решений дифференциальных уравнений третьего порядка с иррациональной правой частью // Докл. АН БССР. – 1986. – **30**, № 10. – С. 872 – 875.
53. *Мартынов И. П.* Аналитические свойства уравнений и систем третьего порядка: Автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1998. – 24 с.
54. *Cosgrove C. M.* Chazy classes IX – XI of third-order differential equations // Stud. Appl. Math. – 2000. – **104**. – P. 171 – 228.
55. *Добровольский В. А.* Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. – Киев: Вища шк., 1974. – 456 с.
56. *Чичурин А. В.* Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса. – М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 2003. – 163 с.
57. *Chichurin A. V.* About some equations of the third order with six poles // Bul. Acad. Stiinte Rep. Moldova. – 2003. – № 2 (42). – P. 59 – 68.
58. *Чичурин А. В.* К проблеме существования отображений между классами уравнений Шази и уравнениями второго порядка // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Математика. – 2003. – № 2. – С. 74 – 78.
59. *Чичурин А. В.* Об общем решении системы Шази // Весн. Бресцкага ун-та. Сер. естеств. наук. – 2003. – № 2. – С. 17 – 22.

Получено 13.10.2006