

В. Г. Барьяхтар (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Ин-т магнетизма НАН Украины и М-ва образования и науки Украины, Киев),

А. В. Самар (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Киев)

ОБЩИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПО СТАБИЛИЗАЦИИ И ДЕСТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ

We demonstrate the complete mathematical analogy between the description of motion of an electron in periodic field and the phenomenon of resonance. We formulate a zone approach to the analysis of the phenomenon of parametric resonance. For an oscillator under action of external force described by the Weierstrass function, we compute increments of oscillation increase and formulate the condition of parametric resonance. For the known problem of a pendulum with vibrating point of suspension, by using the Lamé equation, we find exact conditions of the stabilization of pendulum in the upper (unstable) equilibrium position.

Продемонстровано повну математичну аналогію в описі руху електрона в періодичному полі та явища параметричного резонансу. Сформульовано зонний підхід до аналізу явища параметричного резонансу. Для осцилятора під дією зовнішньої сили, що описується функцією Вейерштрасса, обчислено інкременти наростання коливань і сформульовано умову параметричного резонансу. Для відомої задачі про маятник із віброючою точкою підвісу за допомогою рівняння Ламе знайдено точні умови стабілізації маятника у верхньому (нестійкому) положенні рівноваги.

1. Введение. Как известно, в ряде случаев задача стабилизации (дестабилизации) состояния физической системы является очень важной проблемой. Наиболее известный пример относится к стабилизации движения заряженных частиц в ускорителях и накопителях путем организации их движения в переменных в пространстве магнитных полях (сильная фокусировка). Идея сильной фокусировки высказана в работах Кристофилоса, Куранта, Ливингстона, Снайдера (см. [1 – 3]). Для стабилизации движения заряженных частиц в циклических ускорителях используют специальные магниты, расположенные вдоль кольца ускорителя, в линейных ускорителях — периодически расположенные по длине ускорителя. Напомним, что в накопителях частицы проходят расстояния в сотни километров.

Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси [4, 5] рассмотрели и экспериментально реализовали параметрическое возбуждение тока в электрическом резонансном контуре, т. е. дестабилизацию основного (бестокового) состояния резонансного контура. К таким задачам относятся задачи о раскачивании качелей (параметрический резонанс) и задача о стабилизации качелей в вертикальном состоянии (задача Н. Н. Боголюбова [6], П. Л. Капицы [7] (см. также [8]).

Математическое описание всех перечисленных выше физических задач дается с помощью уравнения Хилла [9]. По этой причине оно по-прежнему привлекает к себе внимание физиков и математиков.

Напомним, что уравнение Хилла имеет вид

$$y''(x) + [\Phi(x) + \lambda]y(x) = 0. \quad (1)$$

Здесь λ — постоянная величина, $\Phi(x)$ — периодическая функция, $\Phi(x + a) = \Phi(x)$, $y''(x)$ — вторая производная функции $y(x)$.

В случае электрона в кристалле y имеет смысл его волновой функции $y(x) = \Psi(x)$, $\Phi(x) = -U(x)$ — потенциальной энергии взаимодействия электрона с кристаллом, a — постоянная решетки кристалла, $\lambda = E$ — энергия электрона в кристалле, x — его координата.

В случае электрического колебательного контура $y = q$ — электрический заряд на конденсаторе, $\Phi(t) + \lambda = [1/L(t)C(t)] = \omega_0^2(t)$, L и C — соответственно индуктивность и емкость колебательного контура, зависящие от времени. Производная берется по времени. В случае маятника с вибрирующей точ-

кой подвеса (задача Боголюбова – Капицы) переменная x имеет смысл времени t , $y = \varphi$ — угол смещения маятника, $f(t) = \Phi(t)\varphi$ представляет собой периодическую с периодом T силу, действующую на точку подвеса, $-\lambda\varphi(t) = \omega_0^2\varphi(t)$ — сила, отклоняющая маятник из состояния с максимальной потенциальной энергией, $\omega_0^2 = g/l$, g — ускорение свободного падения, l — длина маятника.

Интерес математиков к уравнению (1) обусловлен тем, что в связи с развитием теории солитонов актуальными стали задачи о таком выборе $\Phi(x)$, когда уравнение Хилла имеет точные n -зонные решения. Эта проблема была в центре внимания в 70-е годы прошлого столетия. Существенный вклад в ее решение внесли математики Советского Союза [10 – 12].

В настоящее время имеется достаточно полное описание свойств квазичастицы в кристалле [13, 14]. В работе [15] предложена точно решаемая модель трехмерного движения электрона в кристалле, в работах [16, 17] — точно решаемая модель задачи о параметрическом резонансе. Эта модель базируется на уравнении Хилла с потенциалом Ламе.

2. Параметрический резонанс. Новый метод исследования. В задаче о параметрическом резонансе рассматривается движение материальной точки в окрестности устойчивого состояния (физический маятник, точка подвеса которого находится выше центра тяжести) и ищутся такие периодические внешние воздействия, которые дестабилизировали бы ее основное состояние и вызвали бы колебательное движение.

Будем исходить из уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y - V(t)y = 0, \quad V(t) = V(t+T), \quad \frac{1}{T} \int_0^T V(t)dt = 0, \quad (2)$$

где y — координата материальной точки, t — время, T — период, и считать, что среднее по времени V равно нулю. При отсутствии силы $f = V(t)y$ движение материальной точки тривиально: положительным ω_0^2 (вещественным частотам ω_0) соответствуют гармонические колебания конечной амплитуды; отрицательным ω_0^2 (мнимым частотам ω_0) соответствует экспоненциальное возрастание y со временем. Характер движения материальной точки качественно меняется под действием силы $f = V(t)y$, а именно, на оси собственных частот ω_0^2 под действием этой силы возникают „разрешенные” и „запрещенные” зоны (рис. 1).

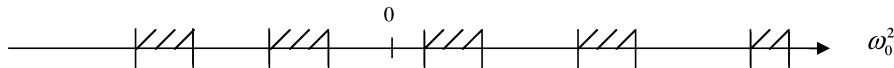


Рис. 1

„Разрешенным” зонам соответствует финитное движение материальной точки даже при отрицательных ω_0^2 (стабилизация движения), „запрещенным” — инфинитное движение даже при положительных ω_0^2 (дестабилизация движения). Заштрихованные участки соответствуют тем ω_0^2 , при которых движение финитное, амплитуда колебаний ограничена. Незаштрихованные участки оси ω_0^2 соответствуют тем случаям, когда движение инфинитное, амплитуда колебаний экспоненциально возрастает со временем.

Задачу (2) легко переформулировать в задачу о собственных значениях и собственных функциях операторов сдвига $R(T)$ по времени на период T «потенциала» $V(T)$ и «гамильтониана» h :

$$R(T)y(t) = y(t+T) = \lambda y(t), \quad (3)$$

$$h y(t) = \left[-\frac{d^2}{dt^2} + V(t) \right] y(t) = \omega_0^2 y(t),$$

где λ и ω_0^2 — собственные числа, которым соответствуют собственные функции задачи. Задача (3) имеет глубокую аналогию с движением электрона в периодическом поле кристалла, которая впервые была отмечена в [16–18].

2.1. Приближение слабой связи. Здесь мы приведем, не останавливаясь на расчетах, результаты для случая слабой внешней силы

$$|V(t)| \ll |\omega_0^2|.$$

В этом приближении координаты центров „запрещенных” зон определяются формулой

$$\omega_0^2(s) = \frac{\pi s}{T}, \quad s = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

„Запрещенная” зона s занимает на оси ω_0^2 интервал значений

$$\left(\frac{\pi s}{T} \right)^2 - \left| V\left(\frac{2\pi s}{T} \right) \right| \leq \omega_0^2 \leq \left(\frac{\pi s}{T} \right)^2 + \left| V\left(\frac{2\pi s}{T} \right) \right|. \quad (5)$$

Координаты „разрешенной” зоны s , расположенной между s - и $(s+1)$ -й „запрещенными” зонами, определяются неравенствами

$$\left(\frac{\pi s}{T} \right)^2 + \left| V\left(\frac{2\pi s}{T} \right) \right| \leq \omega_0^2 \leq \left(\frac{\pi(s+1)}{T} \right)^2 - \left| V\left(\frac{2\pi(s+1)}{T} \right) \right|. \quad (6)$$

В формулах (5), (6) $|V(2\pi s/T)|$ — компонента Фурье периодического потенциала $V(t) = V(t+T)$:

$$V(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} V(s\Omega) \exp(-is\Omega t), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (7)$$

Собственные функции, соответствующие частотам ω_0^2 , лежащим в „разрешенных” зонах, имеют вид

$$y_{1,2}(t) = \exp(\pm i\omega t) u_{1,2}(t), \quad u(t) = u(t+T), \quad (8)$$

где ω — квазичастота, определяющая изменение собственной частоты ω_0^2 в „разрешенной” („запрещенной”) зоне. „Разрешенной” зоне частот соответствует вещественная квазичастота ω , „запрещенной” зоне — комплексная.

При $s = 1$ функции $u_{1,2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1,2}(t) = & 1 - V\left(-\frac{2\pi}{T}\right) [(\omega \mp \Omega)^2 - \omega_0^2]^{-1} \exp(-i\Omega t) - \\ & - V\left(\frac{2\pi}{T}\right) [(\omega \pm \Omega)^2 - \omega_0^2]^{-1} \exp(i\Omega t) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

В этих формулах собственное число ω_0^2 определяется из дисперсионного уравнения

$$(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - (\omega - \Omega)^2) - |V(1)|^2 = 0, \quad (10)$$

которое справедливо при ω , близких к $|\omega - \Omega/2| \ll \Omega$. Из дисперсионного уравнения имеем

$$\omega_{0,s}^2(\omega) = \frac{1}{2}[\omega^2 + (\omega - \Omega)^2] \mp \frac{1}{2}\sqrt{\Omega^2(2\omega - \Omega)^2 + 4\left|V\left(\frac{2\pi}{T}\right)\right|^2}. \quad (11)$$

На рис. 2 приведены зависимости первой ω_{0-}^2 и второй ω_{0+}^2 ветвей собственных частот ω_0^2 вблизи точки $\omega \approx \Omega/2$ (при этом $\Omega = 2$; $4|V(2\pi/T)|^2 = 0,1$). Первая ветвь описывает уменьшение собственной частоты ω_0^2 при удалении от точки $\omega = \Omega/2$, а вторая — ее увеличение. Отметим, что обе ветви подходят к точке $\omega = \Omega/2$ с нулевой производной $(d\omega_0^2/d\omega)|_{\omega=\Omega/2} = 0$. Это обстоятельство не является случайным, а обусловлено общими свойствами движения в системе с периодическим потенциалом. Оно аналогично равенству нулю групповой скорости электрона на границе Бриллюэна.

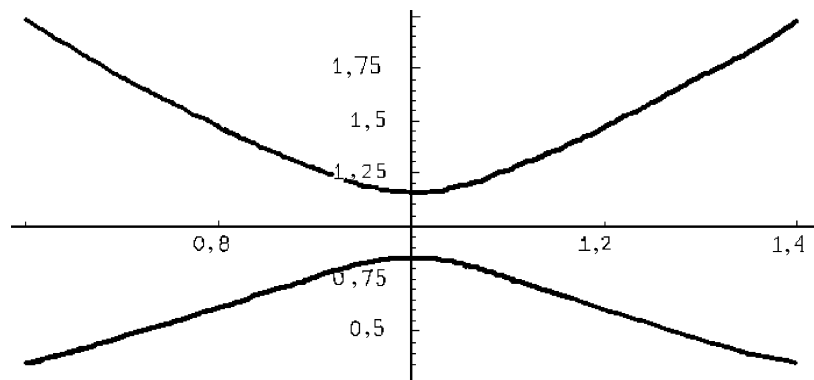


Рис. 2

Мы видим, что решения (8), (9) описывают колебания маятника с ограниченной амплитудой и частотой ω_0^2 , если рассматривается „разрешенная” зона в области положительных ω . Конкретное значение частоты колебаний определяется величиной ω_0^2 . Проведенный анализ элементарно распространяется на любую „разрешенную” зону.

В случае, когда $|\omega - (\pi s/T)| \ll \pi s/T$, собственная частота $\omega_{0\mp}^2(s)$ определяется по формуле

$$\omega_{0,s}^2(\omega) = \frac{1}{2}[\omega^2 + (\omega - s\Omega)^2] \mp \frac{1}{2}\sqrt{(s\Omega)^2(2\omega - s\Omega)^2 + 4\left|V\left(\frac{2\pi s}{T}\right)\right|^2}. \quad (12)$$

Перейдем к определению зависимости $\omega_0^2(\omega, s)$ от квазичастоты ω в „запрещенной” зоне s . Чтобы получить значения $\omega_0^2(\omega, s)$ из интервала

$$\left(\frac{\pi s}{T}\right)^2 - \left|V\left(\frac{2\pi s}{T}\right)\right| \leq \omega_0^2 \leq \left(\frac{\pi s}{T}\right)^2 + \left|V\left(\frac{2\pi s}{T}\right)\right|, \quad (13)$$

необходимо считать, что квазичастота ω имеет мнимую часть. Поскольку интервал (13) достаточно узкий, выбираем ω и ω_0 в виде

$$\omega = \frac{s\Omega}{2} + i\gamma = \frac{\pi s}{T} + i\gamma, \quad \omega_0 = \frac{\Omega}{2} + \varepsilon. \quad (14)$$

Подставляя эти выражения в дисперсионное уравнение (10), получаем

$$\varepsilon^2 + \gamma^2 = R^2, \quad R^2 \equiv \left| V\left(\frac{2\pi}{T}\right) \right|^2 \frac{1}{\Omega}. \quad (15)$$

Прокомментируем полученное соотношение. Во-первых, мы видим, что инкремент нарастания колебаний $\gamma = \gamma_{\max} = R = |V(2\pi/T)|/\Omega$ достигает максимального значения при $\varepsilon = 0$ или $\omega_0 = \Omega/2$. Это и есть известное условие параметрического резонанса. Во-вторых, γ_{\max} прямо пропорционально интенсивности внешней силы $|V(2\pi/T)|$. В-третьих, инкремент нарастания колебаний γ равен нулю на концах „запрещенной“ зоны, т. е. при $\varepsilon = \pm R$.

Из уравнения (15) видно, что инкремент γ равен нулю, если вертикальная производная $(\partial\gamma/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=\pm R}$ равна ∞ . Этот результат можно представить как равенство нулю производной обратной функции, $(\partial\varepsilon/\partial\gamma)_{\varepsilon=\pm R} = 0$, что полностью совпадает с равенством нулю производной $(d\omega_0^2/d\omega)_{\omega=\Omega/2} = 0$.

В случае s -й „запрещенной“ зоны формулы (15) принимают вид

$$\varepsilon^2 + \gamma^2 = R_s^2, \quad (16)$$

где

$$R_s^2 \equiv \left| V\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \right|^2 \frac{1}{(s\Omega)^2}, \quad \varepsilon = \omega_0 - \frac{s\Omega}{2}, \quad i\gamma = \omega - \frac{s\Omega}{2}. \quad (17)$$

В заключение этого подпункта обсудим вопрос, связанный с изменением отношения ширины „запрещенной“ зоны к ширине „разрешенной“ зоны с ростом номера зоны s . В рассматриваемом случае отношение ширины „запрещенной“ зоны к ширине „разрешенной“ зоны значительно меньше единицы,

$$\frac{[\Delta\omega_0^2]_{s,\text{запр}}}{[\Delta\omega_0^2]_{s,\text{разр}}} = \frac{4|V(s\Omega)|}{(s+1/2)\Omega^2} \ll 1. \quad (18)$$

Этот результат означает, что вероятность P обнаружить на больших частотах $\omega_0^2 \sim \frac{s^2\Omega^2}{2}$, $s \gg 1$, колебания с амплитудой, неограниченно возрастающей со временем, является достаточно малой. Очевидно, что эта вероятность пропорциональна отношению (18). Поэтому

$$P \approx \left. \frac{|V(s\Omega)|}{s\Omega^2} \right|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (19)$$

Вероятность P' обнаружить колебания с ограниченной амплитудой на больших частотах равна единице. Этот вывод становится точным результатом для потенциала Ламе. Он имеет ясный смысл: малая переменная сила не изменяет характер колебаний на больших частотах.

2.2. Потенциал Ламе. Точное решение задачи о параметрическом резонансе. Выбирая в задаче (3) в качестве «потенциала» $V(t)$ функцию Вейерштрасса

$$V(x) = n(n+1)\wp(it+t_1, t_1, t_2), \quad (20)$$

получаем уравнение Ламе. В этой формуле через t_1 , t_2 обозначены соответственно вещественный и мнимый периоды функции Вейерштрасса. Потенциал (20) является периодическим потенциалом с периодом $T = -2it_2 = 2|t_2|$.

Впервые уравнение Ламе появилось при разделении переменных уравнения Лапласа в эллипсоидальных координатах. Уравнение Ламе имеет точное реше-

ние. А именно, нормированное на период решение уравнения (3) с потенциалом (20) при $n = 1$ определяется формулой [19]

$$\Psi_{\pm}(t, \omega_0^2) = \left[\frac{S_1(t, \omega_0^2)}{\langle S_1(t, \omega_0^2) \rangle} \right]^{1/2} \exp \left\{ \pm i \sqrt{R_3(\omega_0^2)} \int_{t_0}^t [S_1(t', \omega_0^2)]^{-1} dt' \right\}. \quad (21)$$

Здесь $S_1(t, \omega_0^2)$ — полином первой степени относительно ω_0^2 , а $R_3(\omega_0^2)$ — полином третьей степени относительно ω_0^2 , угловые скобки означают усреднение по периоду «потенциала» (20),

$$\begin{aligned} S_1(t, \omega_0^2) &= \omega_0^2 - \wp(it + t_1; t_1, t_2), \\ R_3(\omega_0^2) &= (\omega_0^2 - e_1)(\omega_0^2 - e_2)(\omega_0^2 - e_3), \\ \langle S_1(t, \omega_0^2) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T S_1(t', \omega_0^2) dt' = \omega_0^2 - \frac{\eta_2}{t_2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Проанализируем полученные формулы. Величины $e_1 > e_2 > e_3$; $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ имеют смысл границ зон. Они определяются как значения функции Вейерштрасса в полупериодах $t_1, t_1 + t_2, t_2$ соответственно: $e_1 = \wp(t_1)$, $e_2 = \wp(t_1 + t_2)$, $e_3 = \wp(t_2)$. Интервал значений $-\infty < \omega_0^2 < e_3$ соответствует неустойчивому основному состоянию маятника, и мы его рассматривать не будем. Интервал значений $e_3 < \omega_0^2 < e_2$ также не будем рассматривать, так как он содержит отрицательные частоты ω_0^2 . Интервал значений $0 < e_2 < \omega_0^2 < e_1$ имеет большое значение для параметрического резонанса, так как ему соответствуют мнимые квазичастоты. Наконец, интервалу значений $e_1 < \omega_0^2 < \infty$ соответствуют колебания маятника с ограниченной амплитудой.

Как видно из (22), $S_1(t, \omega_0^2)$ является периодической функцией с периодом $T = -2it_2$. Поэтому первый множитель в формуле (21) играет роль периодической функции в формуле (8). Второй множитель определяет связь между квазичастотой и собственной частотой ω_0^2 [19]

$$\omega(\omega_0^2) = \sqrt{R_3(\omega_0^2)} \int_{e_2^0}^{\omega_0^2} [\langle S_1(t', \omega_0^2) \rangle]^{-1} dt'. \quad (23)$$

Из формулы (23) видно, что $\omega_0^2 \rightarrow \infty$, а значит, $\omega \rightarrow \omega_0^2$.

Имея в виду рассмотрение „запрещенной“ зоны значений ω_0^2 , мы в качестве нижнего предела взяли левую границу „запрещенной“ зоны. Формулу (23) можно преобразовать к виду [19]

$$\omega(\omega_0^2) = i \int_{\varepsilon}^E \frac{(x - \eta'/t_2)}{(e_1 - x)(e_2 - x)(e_3 - x)} dx.$$

Поскольку эта величина является мнимой, удобно ввести инкремент нарастания Γ колебаний в виде

$$\Gamma(\omega_0^2) = \int_{\varepsilon}^E \frac{(x - \eta'/t_2)}{(e_1 - x)(e_2 - x)(e_3 - x)} dx.$$

Из этой формулы непосредственно следует, что максимального значения инкремента нарастания $\Gamma(\omega_0^2)$ достигает при $\omega_0^2|_{\max} = -\eta_2/t_2$, так как при этом значении ω_0^2 производная $d\Gamma(\omega_0^2)/d\omega_0^2$ равна нулю. Можно показать, что величина $-\eta_2/t_2$ положительна и лежит в интервале $e_2 < \omega_0^2|_{\max} < e_1$.

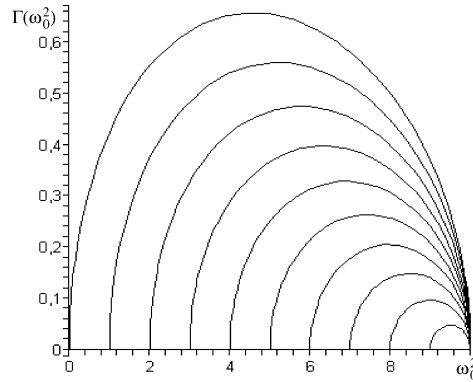


Рис. 3

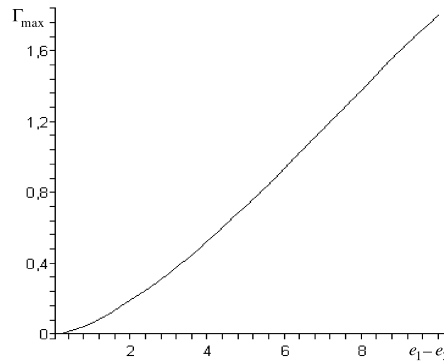


Рис. 4

На рис. 3, 4 представлены графики зависимостей инкремента нарастания $\Gamma(\omega_0^2)$ от ω_0^2 и максимума инкремента нарастания $\Gamma_{\max} = \Gamma(-\eta_2/t_2)$ от ширины „запрещенной” зоны $e_1 - e_2$ (амплитуды внешней силы). Эта ширина, как мы видели на примере „слабой” связи, играет роль интенсивности «потенциала» $V(t)$. В случае потенциала Ламе это есть разность значений функции Вейерштрасса в полупериодах. Отметим, что в случае однозонного потенциала Ламе $n = 1$ при условии $\omega_0^2 > 0$ можно промоделировать «слабую» ($(e_1 - e_2) \ll \ll (e_2 - e_3)$) и «среднюю» ($(e_1 - e_2) \approx (e_2 - e_3)$) связи. Анализируя приведенные графики, можно сделать такие выводы.

1. В случае «слабой» связи $\Gamma = k(e_1 - e_2)$, где k — коэффициент пропорциональности. Отклонение от линейной зависимости начинается при $((e_1 - e_2) \approx \approx (e_2 - e_3))$. Это полностью соответствует общему приближению „слабой” связи.

2. Инкремент нарастания $\Gamma(\omega_0^2)$ достигает своего максимального значения при $\omega_0^2 \approx (1/2)(e_1 - e_2)$. Это также соответствует рассмотрению в приближении „слабой” связи $\omega_0^2 \gg |V(t)|$.

Случай «сильной» связи требует рассмотрения двухзонного потенциала.

Переход от однозонного к многозонному потенциалу имеет некоторые трудности, связанные с практическим определением границ зон, хотя алгоритм определения границ зон известен.

3. Задача о маятнике с вибрирующей точкой подвеса. Движение маятника в поле тяжести хорошо известно. Если отклонения маятника от вертикальной оси таковы, что энергия остается в пределах $-mgl < E < mgl$, где m — масса маятника, l — его длина, g — ускорение силы тяжести, то маятник совершает колебания. Если же энергия маятника E превышает значение mgl , $E > mgl$, то движение маятника представляет собой вращение вокруг точки подвеса.

Вибрация точки подвеса может дестабилизировать колебания маятника около положения минимума или стабилизировать их в окрестности максимума. Пусть координата точки подвеса меняется со временем

$$y_n = V(t).$$

Это приводит к действию на маятник дополнительного момента сил

$$M = \ddot{V}(t)\sin\theta,$$

и уравнение движения маятника принимает вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta - \frac{\ddot{V}(t)}{l} \sin\theta = 0. \tag{24}$$

Рассмотрим случай вращательного движения. Если $\varepsilon = \left| \frac{\ddot{V}(t)}{l} \right| \ll 1$, то для изучения движения маятника можно использовать общий метод усреднения, развитый Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским. Такой анализ независимо был проведен Н. Н. Боголюбовым [6] и П. Л. Капицей [7]. Ими было показано, что вибрации точки подвеса могут так изменить потенциальную энергию маятника $U_{ef}(\theta)$, что точке $\theta = \pi$ соответствует минимум $U_{ef}(\theta)$ и маятник с вибрирующей точкой подвеса может совершать колебания, когда его центр тяжести находится выше точки подвеса. Условием такого движения является выполнение неравенства $\omega > \sqrt{2}l\omega_0/a$ [7] в случае, когда $V(t) = a \sin \omega t$.

Хорошим дополнением к общему методу малого параметра может служить точно решаемая модель. Чтобы исследовать движение маятника в окрестности $|\theta - \pi| \ll 1$, представим уравнение (24) в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi + \ddot{V}(t) = 0, \tag{25}$$

где $\varphi = \pi - \theta$. Если $V(t)$ выбрать в виде $\ddot{V}(t) = -2\wp(it + t_1, t_1, t_2)$, где $\wp(t)$ — функция Вейерштрасса, то уравнение (25) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \omega_0^2 \varphi - 2\wp(it + t_1, t_1, t_2)\varphi. \tag{26}$$

Знак минус перед вторым слагаемым означает, что $V = 0$ (точка подвеса неподвижна), и поэтому замена уравнения (24) на (26) неправомерна, так как $\varphi(t)$ неограниченно возрастает со временем. Мы будем рассматривать это уравнение только для $\omega_0^2 > 0$.

Решения уравнения (26) имеют вид (21). Область $\omega_0^2 < \omega_{01}^2$ соответствует

таким решениям, когда φ неограниченно возрастает со временем (вращение маятника вокруг точки подвеса), область $e_3 < \omega_0^2 < e_2 < 0$ — колебаниям $\varphi(t)$ с конечной амплитудой. В этой области реализуется стабилизация движения маятника около положения максимума его потенциальной энергии $U = -mgl \cos \theta$.

Условие

$$e_3 < \omega_0^2 < e_2 < 0, \quad (27)$$

полученное нами в случае потенциала Ламе, формально противоречит условию Боголюбова $\omega > \sqrt{2} l \omega_0 / a$. Более внимательный анализ показывает, что это не так. Действительно, большим по модулю частотам ω соответствует малый по модулю период t_2 . Поскольку при $t_2 \rightarrow 0$ $e_3 \rightarrow -\infty$, для больших частот момента сил, приложенного к точке подвеса, условие (27) фактически совпадает с условием Н. Н. Боголюбова. Отметим, что метод малого параметра, развитый Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским, не позволяет получить ограничение на величину частоты момента сил сверху.

Выводы и результаты.

1. Показана полная математическая аналогия в описании движения электрона в периодическом поле и явления параметрического резонанса. Сформулирован зонный подход к анализу параметрического резонанса.

2. Продемонстрирована эффективность уравнения Ламе для исследования различных задач стабилизации и дестабилизации движения. В частности, для осциллятора под действием внешней силы, описываемой функцией Вейерштрасса, рассчитаны инкременты нарастания колебаний и сформулировано условие параметрического резонанса. Для известной задачи о маятнике с вибрирующей точкой подвеса с помощью уравнения Ламе найдены точные условия стабилизации маятника в верхнем (неустойчивом) положении равновесия.

Авторы выражают благодарность Е. Д. Белоколосу за помощь при выполнении этой работы и полезные обсуждения.

1. Courant E. D., Snyder H. S. Theory of alternating-gradient synchrotron // Ann. Phys. – 1958. – 3. – P. 1 – 123.
2. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. – М.: Физматгиз, 1962. – 352 с.
3. Лебедев А. Н., Шальнов А. В. Основы физики и техники ускорителей. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 528 с.
4. Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. Лекция 19 // Полн. собр. тр. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – Т. 4. – С. 511.
5. Папалекси Н. Д. Эволюция понятия резонанса // Успехи физ. наук. – 1947. – 31, вып. 4. – С. 447 – 460.
6. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. Ин-та строит. механики АН УССР. – 1950. – 14. – С. 9 – 34.
7. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теор. физики. – 1951. – 21, вып. 5. – С. 588 – 598.
8. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
9. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. – М.: Физматгиз, 1963. – 515 с.
10. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
11. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
12. Марченко В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 264 с.
13. Абрикосов А. А. Основы теории металлов. – М.: Наука, 1987. – 520 с.
14. Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов. – М.: Наука, 1971. – 415 с.

15. *Baryakhtar V. G., Belokolos E. D., Korostil A. M.* A new method for calculating the electron spectrum of solids. Application to high-temperature superconductivity // *Phys. Stat. Sol. (b)*. – 1992. – **169**. – P. 105 – 114.
16. *Барьяхтар В. Г., Барьяхтар И. В., Самар А. В.* Точно решаемая модель параметрического резонанса // *Международ. конф. памяти М. А. Кривоглаза (16 – 18 июня 2004 г.)*. – Киев: Ин-т металлофизики НАН Украины, 2004.
17. *Барьяхтар В. Г.* Единое уравнение для движения электрона в кристалле и параметрического резонанса. Точно решаемая модель // *Металлофизика и новейшие технологии*. – 2005. – **27**, № 1. – С. 119 – 134.
18. *Барьяхтар В. Г., Барьяхтар И. В., Самар А. В.* Единое уравнение для движения электрона в кристалле и параметрического резонанса. Точно решаемая модель // *Киев. Боголюбов. конф. „Современные проблемы математики и теоретической физики” (13 – 16 сент. 2004 г.)*: Тез. докл. – Киев: Ин-т теорет. физики НАН Украины, 2004. – С. 61.
19. *Белокос Е. Д.* Математические основы теории твердых тел с квазипериодической структурой. – Киев, 1982. – 27 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т теор. физики).

Получено 13.10.2006