УДК 517.946

І. Д. Пукальський (Чернів. нац. ун-т)

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

In the spaces of classical functions, we prove the correct solvability of the Dirichlet problem for parabolic equations with nonlocal integral condition for a time variable and with arbitrary power order of the degeneration of coefficients with respect to the time variable and space variables.

В пространствах классических функций со степенным весом доказана корректная разрешимость задачи Дирихле для параболических уравнений с нелокальным интегральным условием по временной переменной и произвольному степенному порядку вырождения коэффициентов как по временной, так и по пространственным переменным.

У працях [1, 2] розглядалось застосування принципу екстремуму для лінійних еліптико-параболічних рівнянь 2-го порядку з невід'ємною характеристичною формою, коефіцієнти яких мають степеневі особливості обмеженого порядку на межі області. Методом бар'єрних функцій встановлено апріорні оцінки і строгий принцип максимуму.

У праці [3] побудовано теорію класичних розв'язків задачі Коші і крайових задач для рівномірно параболічних рівнянь, які мають степеневі особливості обмеженого порядку на межі області в коефіцієнтах при молодших похідних. За допомогою спеціальних функціональних просторів у праці [4] для параболічних рівнянь з невід'ємною квадратичною формою, яка вироджується на межі області, встановлено розв'язність задачі Коші. Вивчення крайової задачі для систем зі сталими коефіцієнтами та інтегральною нелокальною умовою за часовою змінною проведено у [5].

Встановленню коректної розв'язності задачі з скісною похідною та односторонньої крайової задачі з нелокальною умовою за часовою змінною для параболічних рівнянь, які вироджуються на межі області за сукупністю змінних степеневим чином, присвячено праці [6, 7].

Тут за допомогою апріорних оцінок і принципу максимуму вивчається задача Діріхле для параболічних рівнянь зі степеневими особливостями в коефіцієнтах на межі області та інтегральною нелокальною умовою за часовою змінною. В гельдерових просторах зі степеневою вагою встановлено існування і єдиність розв'язку нелокальної задачі Діріхле.

Постановка задачі та основний результат. Нехай D — обмежена опукла область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D. Розглянемо в області $Q = (0, T] \times D$ задачу знаходження функції $u(t, x)$, яка при $t > 0$, $t \neq t^{(0)}$, $t^{(0)} \in (0, T)$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t, x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} A_i(t, x) \partial_{x_i} - A_0(t, x) \right] u(t, x) = f(t, x) \tag{1}$$

і нелокальну умову

$$u(0, x) + \int_0^T q(\tau, t) u(\tau, x) d\tau = \varphi(x), \tag{2}$$

а на бічній межі $\Gamma = (0, T] \times \partial D$ — крайову умову

$$u\big|_{\Gamma} = \psi(t, x)\big|_{\Gamma}. \tag{3}$$

Нехай $l^{(1)}$, $l^{(2)}$ — довільні дійсні числа, $\overline{D} = D \cup \partial D$, $|x - \xi| = \inf_{\xi \in \partial D} \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2 \right]^{1/2}$, $x \in D$, $Q^{(0)} = Q \setminus \{(t, x) \in Q \mid t = t^{(0)}, x \in D\}$.

Особливості коефіцієнтів диференціального виразу L будуть характеризувати такі функції: $s_1(l^{(1)}, t) = |t - t^{(0)}|^{l^{(1)}}$ при $|t - t^{(0)}| \leq 1$, $s_1(l^{(1)}, t) = 1$ при $|t - t^{(0)}| \geq 1$, $s_2(l^{(2)}, x) = |x - \xi|^{l^{(2)}}$ при $|x - \xi| \leq 1$, $s_2(l^{(2)}, x) = 1$ при $|x - \xi| \geq 1$.

Нехай $\overline{Q} = [0, T] \times \overline{D}$, а $P(t, x)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $B_k(t^{(1)}, x^{(2)})$ і $P_k^{(2)}(t^{(2)}, x^{(2)})$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, — точки із Q, $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{k-1}^{(1)}, x_k^{(2)}, x_{k+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$. Позначимо через $\beta_k^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_i^{(\nu)}$, α дійсні числа, такі, що $\beta_k^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\gamma^{(\nu)} \geq 0$, $\mu_i^{(\nu)} \geq 0$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\alpha \in (0, 1)$, $\nu \in \{1, 2\}$. Покладемо $s(l; P) = s_1(l^{(1)}, t) s_2(l^{(2)}, x)$. Означимо функціональні простори, в яких досліджується задача.

$C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; l; Q)$ — простір функцій u, $(t, x) \in \overline{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_t^k \partial_x^j u$, $2k + |j| \leq 2$, для яких є скінченною норма

$$\| u; \gamma, \beta; l; Q \|_{2+\alpha} = \sum_{j=0}^{2} \| u; \gamma, \beta; l; Q \|_j + [\![u; \gamma, \beta; l; Q]\!]_{2+\alpha},$$

де, наприклад,

$$\| u; \gamma, \beta; 0; Q \|_0 = \sup_{P \in \overline{Q}} |u(P)| \equiv \| u; Q \|_0,$$

$$[\![u; \gamma, \beta; l; Q]\!]_{2+\alpha} = \sum_{i,j,k=1}^{n} \Bigg\{ \sup_{\{P_1, B_k\} \subset \overline{Q}} \Big[s(l + (2+\alpha)\gamma - \beta_i - \beta_j - \alpha\beta_k; \tilde{P}_1) \times$$

$$\times \left| x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right|^{-\alpha} \left| \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(P_1) - \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(B_k) \right| \Big] + \sup_{\{P_1, B_k\} \subset \overline{Q}} \Big[s(l + (2+\alpha)\gamma - \alpha\beta_k; \tilde{P}_1) \times$$

$$\times \left| x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right|^{-\alpha} \left| \partial_t u(P_1) - \partial_t u(B_k) \right| \Big] + \sup_{\{P_k^{(2)}, B_k\} \subset \overline{Q}} \Big[s(l + (2+\alpha)\gamma - \beta_i - \beta_j; \tilde{P}_2) \times$$

$$\times \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\alpha/2} \left| \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(P_k^{(2)}) - \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(B_k) \right| \Big] + \sup_{\{P_k^{(2)}, B_k\} \subset \overline{Q}} \Big[s(l + (2+\alpha)\gamma; \tilde{P}_2) \times$$

$$\times \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\alpha/2} \left| \partial_t u(P_k^{(2)}) - \partial_t u(B_k) \right| \Big] \Bigg\}.$$

Тут $s(l; \tilde{P}_1) = \min(s(l; P_1); s(l; B_k))$, $s(l; \tilde{P}_2) = \min(s(l; P_k^{(2)}); s(l; B_k))$.

$C^r(\mu_j; Q)$ — множина функцій v_j, $(t, x) \in \overline{Q}$, які мають частинні похідні в $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_x^k v_j$, $|k| \leq [r]$, для яких є скінченною норма

$$\left\| v_j; \mu_j, Q \right\|_r = \sum_{|k| \leq [r]} \sup_{P \in \overline{Q}} \left[s(\mu_j + |k|; P) \left| \partial_x^k v_j(P) \right| \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ \sum_{|k| = [r]} \Bigg[\sup_{\{P_1, B_i\} \subset \overline{Q}} s(\mu_j + |k|; \tilde{P}_1) s_2(\{r\}, \tilde{x}) \left| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right|^{-\{r\}} \times$$

$$\times\left|\partial_x^k v_j(P_1)-\partial_x^k v_j(B_i)\right| + \sup_{\{B_i,P_i^{(2)}\}\subset\overline{Q}} s(\mu_j;\tilde P_2)s_1\left(\left\{\frac{r}{2}\right\},\tilde t\right)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\{r/2\}}\times$$

$$\times\left|v_j(B_i)-v_j(P_i^{(2)})\right| + \sup_{\{B_i,P_i^{(2)}\}\subset\overline{Q}} s(\mu_j+|k|;\tilde P_2)\times$$

$$\times\, s_1\left(\frac{\{r\}}{2},\tilde t\right)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\{r\}/2}\left|\partial_x^k v_j(B_i)-\partial_x^k v_j(P_i^{(2)})\right|\Bigg]\Bigg\},$$

де $[r]$ — ціла частина числа r, $\{r\}=r-[r]$, $s_1(l^{(1)};\tilde t)=\min\left(s_1(l^{(1)},t^{(1)}),\right.$ $\left.s_1(l^{(1)},t^{(2)})\right)$, $s_2(l^{(2)};\tilde x)=\min\left(s_2(l^{(2)},x^{(1)}),s_2(l^{(2)},x^{(2)})\right)$.

Припустимо, що для задачі (1) – (3) виконуються такі умови:

1°) коефіцієнти $A_i\in C^{\alpha}(\mu_j;Q)$, $i\in\{0,1,\dots,n\}$, $A_0\le K<+\infty$, K — стала, $A_{ij}\in C^{\alpha}(\beta_i+\beta_j;Q)$ і для довільного вектора $\xi\in\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ виконується нерівність

$$c_1|\xi|^2 \;\le\; \sum_{ij=1}^{n} s(\beta_i+\beta_j;P)A_{ij}(P)\xi_i\xi_j \;\le\; c_2|\xi|^2,$$

c_1, c_1 — фіксовані додатні сталі;

2°) функції $f\in C^{\alpha}(\gamma,\beta;\mu_0;Q)$, $\varphi\in C^{2+\alpha}(\tilde\gamma,\tilde\beta;0;D)$, $\psi\in C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$, $\gamma^{(\nu)}=\max\left\{\max_i(1+\beta_i^{(\nu)}),\max_i(\mu_i^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}),\frac{\mu_0^{\nu}}{2}\right\}$, $\nu\in\{1,2\}$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$, $\tilde\gamma=(0,\gamma^{(2)})$, $\tilde\beta=(0,\beta^{(2)})$;

3°) межа ∂D належить класу $C^{2+\alpha}$, функція $q(t,x)\in C^{2+\alpha}(Q)$, $\sup_{\overline{Q}}\int_0^T|q(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau\le\lambda_0<1$, де λ — довільне число, яке задовольняє нерівність $\lambda<\inf_{Q}\left(-A_0(t,x)\right)$, $\left[\psi(0,x)+\int_0^T q(\tau,x)\psi(\tau,x)d\tau-\varphi(x)\right]_{\partial D}=0$.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1) – (3) *виконано умови* 1° – 3°. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1) – (3) *у просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ *і для нього справджується оцінка*

$$\|u;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le c\big(\|f;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_{\alpha}+\|\varphi;\tilde\gamma,\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|\psi;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\big). \tag{4}$$

Для доведення теореми 1 побудуємо послідовність розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничним значенням якої буде розв'язок задачі (1) – (3).

Нехай $Q_m=Q\cap\{(t,x)\in Q\,|\,s_1(1,t)\ge m_1^{-1},s_2(1,x)\ge m_2^{-1}\}$ — послідовність областей, яка при $m_1\to\infty$, $m_2\to\infty$ збігається до Q, $D_m=\{x\in D\,|\,s_2(1,x)\ge m_2^{-1}\}$, $\partial D_m=\{x\in D\,|\,s_2(1,x)=m_2^{-1}\}$, $\Gamma_m=\partial D_m\times(0,T]$, де $m=(m_1,m_2)$, m_1, m_2 — натуральні числа, $m_1>1$, $m_2>1$.

Розглянемо в області Q крайову задачу

$$(L_1 u_m)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} - a_0(t,x)\right] u_m(t,x) =$$

$$= f_m(t,x), \tag{5}$$

$$u_m(0,x) + \int_0^T q(\tau,x)u_m(\tau,x)\,d\tau = \varphi_m(x), \tag{6}$$

$$u_m(t,x)\big|_\Gamma = \psi_m(t,x)\big|_\Gamma. \tag{7}$$

Коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, функції f_m, φ_m, ψ_m визначаються таким чином. Якщо $(t,x) \in (0,T] \times \overline{D}_m$ і $\beta_i^{(1)} + \beta_j^{(1)} \geq 0$, то $a_{ij}(t,x) = \min\left(A_{ij}(t,x), A_{ij}(m_1^{-1}, x)\right)$ при $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$ і

$$a_{ij}(t,x) =$$

$$= \min\left(A_{ij}(t,x), \frac{m_1(t^{(0)} - t)+1}{2} A_{ij}(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)})+1}{2} A_{ij}(t^{(0)} + m_1^{-1}, x)\right)$$

при $t^{(0)} > m_1^{-1}$. У випадку $\beta_i^{(1)} + \beta_j^{(1)} < 0$ виберемо $a_{ij}(t,x) = \max\left(A_{ij}(t,x), A_{ij}(m_1^{-1}, x)\right)$ при $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$ і

$$a_{ij}(t,x) =$$

$$= \max\left(A_{ij}(t,x), \frac{m_1(t^{(0)} - t)+1}{2} A_{ij}(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)})+1}{2} A_{ij}(t^{(0)} + m_1^{-1}, x)\right)$$

при $t^{(0)} > m_1^{-1}$.

Коефіцієнти $a_i(t,x) = \min\left(A_i(t,x), A_i(m_1^{-1}, x)\right)$ при $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$ і

$$a_i(t,x) =$$

$$= \min\left(A_i(t,x), \frac{m_1(t^{(0)} - t)+1}{2} A_i(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)})+1}{2} A_i(t^{(0)} + m_1^{-1}, x)\right)$$

при $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Функції $f_m(t,x) = \min\left(f(t,x), f(m_1^{-1}, x)\right)$ при $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$ і

$$f_m(t,x) =$$

$$= \min\left(f(t,x), \frac{m_1(t^{(0)} - t)+1}{2} f(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)})+1}{2} f(t^{(0)} + m_1^{-1}, x)\right)$$

при $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$. При $x \in D_m$ функції $\varphi_m(x) = \varphi(x)$.

Для $(t,x) = Q \setminus \{(0,T) \times D_m\}$ коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0 і функції f_m, ψ_m є розв'язками зовнішньої задачі

$$\partial_t u = \Delta u, \quad u(0,x) = 0, \quad u|_{\Gamma_m} = g(t,x),$$

де, наприклад, для a_i $g = a_i\big|_{\Gamma_m}$, $\vec{n}$ — нормаль до Γ_m. Для $x \in D \setminus D_m$ функція φ_m є розв'язком зовнішньої задачі Діріхле

$$\Delta v = 0, \qquad v\big|_{\partial D_m} = \varphi\big|_{\partial D_m}.$$

У задачі (5) – (7) виконаємо заміну

$$u_m(t,x) = v_m(t,x)e^{-\lambda t} + \psi_m(t,x),$$

де λ задовольняє умову 3°. Одержимо

$$(L_2 v_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} - a_0(t,x) - \lambda\right] v_m(t,x) =$$

$$= f_m(t,x)e^{-\lambda t} - (L\psi_m)(t,x) \equiv F(t,x), \tag{8}$$

$$v_m(0,x) + \int_0^T q(\tau,x)e^{-\lambda\tau} v_m(\tau,x)\,d\tau =$$

$$= \varphi_m(x) - \psi_m(0,x) - \int_0^T q(\tau,x)\psi_m(\tau,x)\,d\tau \equiv \Phi_m(x), \tag{9}$$

$$v_m\big|_\Gamma = 0. \tag{10}$$

Знайдемо оцінку розв’язків крайових задач (8) – (10).

Теорема 2. *Нехай* v_m *— класичний розв’язок задачі* (8) – (10) *в області* Q *і виконано умови* $1^\circ – 3^\circ$. *Тоді для* v_m *виконується нерівність*

$$|v_m| \le \max\left(\left\| \Phi_m \left(1 - \int_0^T |q(\tau,t)|e^{-\lambda\tau}\,d\tau\right)^{-1};\ D\right\|_0,\ \left\|F(-a_0-\lambda)^{-1}; Q\right\|_0\right). \tag{11}$$

Доведення. Можливі три випадки: розв’язок v_m є недодатним в Q, або найбільше додатне значення v_m досягається на D, або це найбільше значення досягається в точці $P_1 \in Q$.

У першому випадку $\max\limits_{\overline{Q}} v_m(t,x) \le 0$, у другому — $0 \le \max\limits_{\overline{Q}} v_m(t,x) = = \max\limits_{\overline{D}} v_m(t,x) = v_m(0,x^{(3)})$. Тоді з нелокальної умови (9) маємо

$$\Phi_m(x^{(3)}) \ge v_m(0,x^{(3)})\left[1 - \int_0^T \left|q(\tau,x^{(3)})\right| e^{-\lambda\tau}\,d\tau\right]^{-1}.$$

Тому

$$v_m(0,x^{(3)}) \le \max_{\overline{D}}\left(\Phi_m(x)\left(1 - \int_0^T \left|q(\tau,x^{(3)})\right| e^{-\lambda\tau}\,d\tau\right)^{-1}\right).$$

У третьому випадку $\max\limits_{\overline{Q}} v_m(t,x) = v_m(P_1)$, причому в точці P_1 виконуються співвідношення

$$\partial_t v_m \ge 0, \qquad \partial_{x_i} v_m = 0, \qquad -\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m(P_1) \ge 0. \tag{12}$$

Нерівність (12) має місце, оскільки в точці максимуму другі похідні $\partial_{y_k}\partial_{y_k} v_m$ за будь-яким напрямком

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} s(\beta_i; P_1)(x_i - x_i^{(1)}), \qquad \det \| \alpha_{ki} \| \neq 0,$$

недодатні, а

$$\sum_{ik=1}^{n} \alpha_{ki}(P_1) \partial_{x_i} \partial_{x_k} v_m(P_1) = \sum_{lj=1}^{n} \left(\sum_{ik=1}^{n} s(\beta_i + \beta_k; P_1) a_{ik}(P_1) \alpha_{kl} \alpha_{ji} \right) \partial_{y_l} \partial_{y_j} v_m(P_1) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \, \partial_{y_l} \partial_{y_l} v_m < 0.$$

Тому, згідно з обмеженням 1°, характеристичні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ квадратичної форми додатні. З урахуванням (12) і рівняння (8) у точці P_1 виконується нерівність

$$v_m(P_1) \leq F(P_1)\left(-a_0(P_1) - \lambda\right)^{-1}.$$

Аналогічно, розглядаючи точку найменшого від'ємного значення функції v_m, маємо

$$v_m \geq \min\left(0, \min_{\overline{D}} \left(\Phi_m \left(1 - \int_0^T |q(\tau, x)| e^{-\lambda\tau} d\tau \right)^{-1} \right), \min_{\overline{Q}} \left(F(-a_0 - \lambda)^{-1} \right) \right).$$

Отже, для розв'язку задачі (8) – (10) справджується оцінка (11).

Розглянемо однорідну задачу Діріхле

$$(L_2 v_m)(t, x) = 0, \quad v_m(0, x) = g(x), \quad v_m|_\Gamma = 0. \tag{13}$$

Нехай $E_m(t, x, \tau, \xi)$ — функція Гріна задачі (13) [8, с. 469].

***Зауваження* 1.** Для функції $E_m(t, x, \tau, \xi)$ виконуються нерівності

$$E_m(t, x, \tau, \xi) \geq 0, \qquad 0 \leq \int_D E_m(t, x, 0, \xi) \, d\xi \leq 1.$$

Встановимо існування розв'язку задачі (8) – (10).

Теорема 3. *Якщо виконано умови теореми* 1, *то існує єдиний розв'язок задачі* (8) – (10), *для якого справджується оцінка* (11).

Доведення. Розв'язок задачі (8) – (10) шукаємо у вигляді

$$v_m(t, x) = \int_D E_m(t, x, 0, \xi) v_m(0, \xi) \, d\xi + \omega_m(t, x), \tag{14}$$

де

$$\omega_m(t, x) = \int_D E_m(t, x, 0, \xi) \Phi_m(\xi) \, d\xi + \int_0^t d\tau \int_D E_m(t, x, \tau, \xi) F(\tau, \xi) \, d\xi$$

— розв'язок задачі Діріхле (8) – (10) з початковою умовою

$$\omega_m(0, x) = \Phi_m(x).$$

Згідно з теоремою 2, для $\omega_m(t, x)$ має місце оцінка

$$|\omega_m| \leq \max\left(\| \Phi_m; D \|_0; \; \| F(-a_0 - \lambda)^{-1}; Q \|_0 \right).$$

Задовольняючи нелокальну умову (9), маємо

$$v_m(0, x) + \int_0^T q(\tau, x) e^{-\lambda\tau} d\tau \int_D E_m(\tau, x, 0, \xi) v_m(0, \xi) d\xi =$$

$$= -\int_0^T q(\tau, x) e^{-\lambda\tau} \omega_m(\tau, x) d\tau \equiv F_2(x). \tag{15}$$

Розв'язок інтегрального рівняння шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$v_m^{(k)}(0, x) = F_2(x) + \int_0^T q(\tau, x) e^{-\lambda\tau} d\tau \int_D E_m(\tau, x, 0, \xi) v_m^{(k-1)}(0, \xi) d\xi,$$

$$v_m^{(0)}(0, x) = F_2(x).$$

Враховуючи зауваження 1, отримуємо

$$\left| \int_0^T q(\tau, x) e^{-\lambda\tau} d\tau \int_D E_m(\tau, x, 0, \xi)\, d\xi \right| \le \int_0^T |q(\tau, x)| e^{-\lambda\tau} d\tau \le \lambda_0 < 1.$$

Тому, оцінюючи різниці між послідовними наближеннями, одержуємо

$$\left| v_m^{(k)}(0, x) - v_m^{(k-1)}(0, x) \right| \le \lambda_0^k \| F_2; Q \|_0.$$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння (15) зображується рівномірно збіжним функціональним рядом

$$v_m(0, x) = F_2(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(v_m^{(k)}(0, x) - v_m^{(k-1)}(0, x) \right)$$

і для нього справджується оцінка

$$\left| v_m(0, x) \right| \le \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} \| F_2; Q \|_0. \tag{16}$$

Підставляючи значення $v_m(0, x)$ у (14), одержуємо розв'язок задачі (8) – (10).

Знайдемо оцінки похідних розв'язку крайової задачі

$$(L_0 v)(t, x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} s(\beta_i + \beta_j; P_1) A_{ij}(P_1) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \right] v(t, x) = F_3(P),$$

$$v(0, x) + \int_0^T q(\tau, x) e^{-\lambda\tau} v(\tau, x) d\tau = \varphi_0(x), \tag{17}$$

$$v \big|_{\Gamma} = 0.$$

Коефіцієнти диференціального виразу L_0, згідно з накладеними умовами, обмежені сталими, не залежними від точки P_1. Тому існують такі сталі c, c_{jk}, що для функції Гріна однорідної задачі Діріхле

$$(L_0 v)(t, x) = F_3(P), \qquad v(0, x) = \varphi_0(x), \qquad v \big|_{\Gamma} = 0$$

справджується оцінка [8, с. 469]

$$\left| \partial_t^j \partial_x^k \Gamma(t, x, \tau, \xi) \right| \le c_{jk} (t - \tau)^{-(n+k)/2 - j} \exp\left\{ -c \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau} \right\}.$$

Має місце така теорема.

Теорема 4. *Нехай* $F_3 \in C^{\alpha}(Q)$, $\varphi_0 \in C^{2+\alpha}(D)$ *і виконано умови* 1°, 3°. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (17) *у просторі* $C^{2+\alpha}(D)$ *і для нього виконується оцінка*

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q)} \le c\left(\|F_3\|_{C^{\alpha}(Q)} + \|\varphi_0\|_{C^{2+\alpha}(D)}\right). \tag{18}$$

Доведення. Розв'язок задачі (17) шукаємо у вигляді

$$v(t,x) = \int_D \Gamma(t,x,0,\xi)v(0,\xi)\,d\xi + \int_0^t d\tau \int_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)F_3(\tau,\xi)\,d\xi +$$
$$+ \int_D \Gamma(t,x,0,\xi)\varphi_0(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Задовольняючи нелокальну умову задачі (17), одержуємо інтегральне рівняння

$$v(0,x) + \int_0^T q(\tau,x)e^{-\lambda\tau}\,d\tau \int_D \Gamma(t,x,0,\xi)v(0,\xi)\,d\xi = \omega^{(1)}(t,x), \tag{20}$$

де

$$\omega^{(1)}(t,x) =$$
$$= -\int_0^T q(\tau,x)e^{-\lambda\tau}\,d\tau \left[\int_0^T d\beta \int_D \Gamma(t,x,\beta,\xi)F_3(\beta,\xi)\,d\xi + \int_D \Gamma(t,x,0,\xi)\varphi_0(\xi)\,d\xi\right].$$

Розв'язок рівняння (20) шукаємо методом послідовних наближень. Повторюючи міркування з доведення теореми 3, маємо

$$|v(0,x)| \le c\left(\|F_3;Q\|_{C^{\alpha}(Q)} + \|\varphi_0;D\|_{C^{2+\alpha}(D)}\right).$$

Використовуючи оцінку функції Гріна і рівність (20), знаходимо

$$\|v(0,x)\|_{C^{2+\alpha}(D)} \le c\left(\|F_3\|_{C^{\alpha}(Q)} + \|\varphi_0\|_{C^{2+\alpha}(D)}\right). \tag{21}$$

Враховуючи властивості функції Гріна $\Gamma(t,x,\tau,\xi)$, оцінку (21) і рівність (19), одержуємо нерівність (18).

Існування розв'язку нелокальної задачі Діріхле для рівняння з виродженням. Введемо у просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|v_m;\gamma,\beta;l;Q\|_{2+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається як $\|u;\gamma,\beta;l;Q\|_{2+\alpha}$, тільки замість функцій $s_1(l^{(1)},t)$, $s_2(l^{(2)},x)$ беремо відповідно $d_1(l^{(1)},t)$, $d_2(l^{(2)},x)$, де $d_1(l^{(1)},t) = \max\left(s_1(l^{(1)},t),\, m_1^{-l^{(1)}}\right)$ при $l^{(1)} \ge 0$ і $d_1(l^{(1)},t) = \min\left(s_1(l^{(1)},t),\, m_1^{-l^{(1)}}\right)$ при $l^{(1)} < 0$; $d_2(l^{(2)},x) = \max\left(s_2(l^{(2)},x),\, m_2^{-l^{(2)}}\right)$ при $l^{(2)} \ge 0$ і $d_2(l^{(2)},x) = \min\left(s_2(l^{(2)},x),\, m_2^{-l^{(2)}}\right)$ при $l^{(2)} < 0$, $d(l;P) = d_1(l^{(1)},t)d_2(l^{(2)},x)$.

Теорема 5. *Якщо виконано умови* 1° – 3°, *то для розв'язку задачі* (8) – (10) *справджується оцінка*

$$\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c\left(\|F;\gamma,\beta;2\gamma;Q\|_{\alpha} + \left\|\Phi_m;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\right\|_{2+\alpha} + \|v_m;Q\|_0\right). \tag{22}$$

Стала c *не залежить від* m.

Доведення. Використовуючи означення норми й інтерполяційні нерівності із [9, с. 176], маємо

$$\| v_m; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2+\alpha} \le (1+\varepsilon^{\alpha}) [\![v_m; \gamma, \beta; 0; Q]\!]_{2+\alpha} + c(\varepsilon) \| v_m; Q \|_0 .$$

Тому досить оцінити півнорму $[\![v_m; \gamma, \beta; 0; Q]\!]_{2+\alpha}$.

Із визначення норми випливає існування в Q точок P_1, B_r, $P_r^{(2)}$, для яких виконується одна з нерівностей

$$\frac{1}{2} [\![v_m; \gamma, \beta; 0; Q]\!]_{2+\alpha} \le E_k, \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}, \tag{23}$$

$$E_1 \equiv \sum_{i,j,r=1}^{n} d(2\gamma - \beta_i - \beta_j + \alpha(\gamma - \beta_r); \tilde{P}_1) \left| x_r^{(1)} - x_r^{(2)} \right|^{-\alpha} \times$$

$$\times \left| \partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m(P_1) - \partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m(B_r) \right|,$$

$$E_2 \equiv \sum_{i,j,r=1}^{n} d(2\gamma - \beta_i - \beta_j + \alpha\gamma; \tilde{P}_2) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\alpha/2} \times$$

$$\times \left| \partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m(B_r) - \partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m(P_r^{(2)}) \right|,$$

$$E_3 \equiv \sum_{r=1}^{n} d(2\gamma + \alpha(\gamma - \beta_r); \tilde{P}_1) \left| x_r^{(1)} - x_r^{(2)} \right|^{-\alpha} \left| \partial_t v_m(P_1) - \partial_t v_m(B_r) \right|,$$

$$E_4 \equiv \sum_{r=1}^{n} d((2+\alpha)\gamma; \tilde{P}_2) \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right|^{-\alpha/2} \left| \partial_t v_m(B_r) - \partial_t v_m(P_r^{(2)}) \right|.$$

Якщо $\left| t^{(1)} - t^{(2)} \right| \ge d(2\gamma; \tilde{P}) \dfrac{\rho^2}{16} \equiv T_1$, ρ — довільна стала, $\rho \in (0, 1)$, $d(\gamma, \tilde{P}) = \min\left(d(\gamma, \tilde{P}_1), d(\gamma, \tilde{P}_2)\right)$, то

$$E_k \le 2\rho^{-\alpha} \| v_m; \gamma, \beta; 0; Q \|_2, \quad k \in \{2, 4\}.$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E_k \le \varepsilon^{\alpha} [\![v_m; \gamma, \beta; 0; Q]\!]_{2+\alpha} + c(\varepsilon) \| v_m; Q \|_0 . \tag{24}$$

Вибираючи ε достатньо малим $(\varepsilon = 4^{-\alpha/2})$, з нерівностей (23) знаходимо

$$[\![v_m; \gamma, \beta; 0; Q]\!]_{2+\alpha} \le c \| v_m; Q \|_0 . \tag{25}$$

Якщо $\left| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right| \ge n^{-1} d(\gamma - \beta_i; \tilde{P}) \dfrac{\rho}{4} \equiv T_2$, то

$$E_k \le 2\rho^{-\alpha} \| v_m; \gamma, \beta; 0; Q \|_2, \quad k \in \{1, 3\}.$$

Використовуючи інтерполяційні нерівності, отримуємо оцінку (25) і у випадку $k \in \{1, 3\}$.

Нехай $\left| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right| \le T_2$ і $\left| t^{(1)} - t^{(2)} \right| \le T_1$. Будемо вважати, що $d(\gamma, \tilde{P}) \equiv d(\gamma, P_1)$. Запишемо задачу (8) – (10) у вигляді

$$(L_3 v_m)(t, x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1) \partial_{x_i}\partial_{x_j} \right] v_m = \sum_{ij=1}^{n} \left(a_{ij}(t, x) - a_{ij}(P_1) \right) \partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} v_m + (a_0(t,x)+\lambda)v_m + F(t,x) \equiv F_4(t,x),$$

$$v_m(0,x) + \int_0^T q(\tau,x)e^{-\lambda\tau} v_m(\tau,x)\,d\tau = \Phi_m(x), \tag{26}$$

$$v_m\big|_\Gamma = 0.$$

Нехай $V_1 \in Q$, V_1 — куб із центром у точці P_1, $V_r = \{(t,x)\in Q \,\big|\, |t-t^{(1)}| \leq 16r^2T_1,\ t^{(1)}\geq 0,\ |x_i^{(1)}-x_i| \leq 4rT_2,\ i\in\{1,\ldots,n\}\}$.

У задачі (26) виконаємо заміну $v_m(t,x)=\omega_m(t,y)$, $y_i = d(\beta_i, P_1)x_i$, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Область визначення $\omega_m(t,y)$ позначимо через Q_0. Тоді функція $W_m(t,y)=\omega_m(t,y)\eta(t,y)$ задовольняє крайову задачу

$$\left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i+\beta_j; P_1)a_{ij}(P_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\right] W_m =$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i+\beta_j; P_1)a_{ij}(P_1)[\partial_{y_i}\omega_m\partial_{y_j}\eta + \partial_{y_j}\omega_m\partial_{y_i}\eta] +$$

$$+\,\omega_m\left[\sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i+\beta_j; P_1)a_{ij}(P_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta - \partial_t\eta\right] + F_4(t,Y)\eta \equiv F_5(t,y),$$

$$W_m(0,y) + \int_0^T q(\tau,Y)e^{-\lambda\tau}W_m(\tau,y)\,d\tau =$$

$$= \int_0^T q(\tau,Y)e^{-\lambda\tau}\omega_m(\tau,y)[\eta(\tau,y)-\eta(0,y)]\,d\tau + \Phi_m(Y) \equiv \Psi_m(y), \tag{27}$$

$$W_m\big|_\Gamma = 0,$$

де

$$\eta(\tau,y) = \begin{cases} 1, & (t,y)\in H_{1/4}, \quad \left|\partial_t^j\partial_y^k\eta(t,y)\right| \leq c_{kj}d^{-1}((2j+k)\gamma; P_1), \\ 0, & (t,y)\notin H_{3/4}, \quad 0 \leq \eta(t,y) \leq 1, \end{cases}$$

$$H_r = \left\{(t,y)\in Q_0 \,\big|\, |t-t^{(1)}| \leq rT_1,\ |y_i - y_i^{(1)}| \leq r\,d(\gamma,P_1)\frac{\rho}{4}n^{-1},\ y_i^{(1)} = \right.$$

$$\left. = d(\beta_i,P_1)x_i^{(1)}\right\}, \qquad Y = (d^{-1}(\beta_1,P_1)y_1,\ldots,d^{-1}(\beta_n,P_1)y_n).$$

Коефіцієнти рівняння (27) обмежені сталими, не залежними від P_1. Тому на підставі теореми 4 для довільних точок $M_1(t^{(1)},\xi^{(1)})\in H_{1/4}$ і $M_2(\tau^{(2)},\xi^{(2)})\in H_{1/4}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_\tau^j\partial_\xi^k\omega_m(M_1) - \partial_\tau^j\partial_\xi^k\omega_m(M_2)\right| \leq$$

$$\leq c\Big(\|F_5\|_{C^\alpha(H_{3/4})} + \|\Psi_m\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}\cap\{t=0\})}\Big), \tag{28}$$

де $d(M_1,M_2)$ — параболічна відстань між точками M_1, M_2, $2j+|k|=2$.

Використовуючи властивості функції $\eta(t, y)$, означення простору $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і повертаючись до змінних (t, x), знаходимо

$$E_k \leq c\Big(\big\| v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4} \big\|_2 + \big\| F_4; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4} \big\|_\alpha + \big\| v_m; V_{3/4} \big\|_0 + \\ + \Big\| \Phi_m; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; V_{3/4} \cap \{t = 0\} \Big\|_{2+\alpha}\Big). \tag{29}$$

Знайдемо оцінку $\big\| F_4; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4} \big\|_\alpha$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка виразу $F_4(t, x)$. Наприклад,

$$[\![\, (a_i(t, x) - a_{ij}(P_1))\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m; \gamma, \beta; 2\gamma, V_{3/4}]\!]_\alpha \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{\{A_1, B_k, A_k^{(2)}\} \subset V_{3/4}} \Bigg[d\big((2\gamma - \beta_i - \beta_j; \tilde{A}\big) \big|\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j} v_m(A_1)\big| \Bigg\{ \big| \tau^{(1)} - \tau^{(2)} \big|^{-\alpha/2} \times$$

$$\times\, d(\beta_i + \beta_j + \alpha\gamma; \tilde{A}) \big| a_{ij}(A_k^{(2)}) - a_{ij}(B_k) \big| +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} d(\beta_i + \beta_j + \alpha(\gamma - \beta_l); \tilde{A}) \big| \xi_l^{(1)} - \xi_l^{(2)} \big|^{-\alpha} \big| a_{ij}(A_1) - a_{ij}(B_l) \big| \Bigg\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sup_{\{A_1, B_k, A_k^{(2)}\} \subset V_{3/4}} d(\beta_i + \beta_j; \tilde{A}) \big| a_{ij}(A_1) - a_{ij}(B_k) \big| \times$$

$$\times \Bigg\{ \sum_{l=1}^{n} d(2\gamma - \beta_i - \beta_j + \alpha(\gamma - \beta_l); \tilde{A})) \big| \xi_l^{(1)} - \xi_l^{(2)} \big|^{-\alpha} \big| \partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j} v_m(A_1) - \partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j} v_m(B_l) \big| +$$

$$+\, d(2\gamma - \beta_i - \beta_j + \alpha\gamma; \tilde{A}) \big| \tau^{(1)} - \tau^{(2)} \big|^{-\alpha/2} \big| \partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j} v_m(B_l) - \partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j} v_m(A_l^{(2)}) \big| \Bigg\} \Bigg] \leq$$

$$\leq c\rho^\alpha [\![v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}]\!]_{2+\alpha} + c_1 \| v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4} \|_2 .$$

Отже, для норми $\| F_4; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4} \|_\alpha$ дістаємо оцінку

$$\| F_4; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4} \|_\alpha \leq \\ \leq c\Big(\big\| F; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4} \big\|_\alpha + \big\| v_m; V_{3/4} \big\|_0\Big) + \varepsilon_1 \big\| v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4} \big\|_{2+\alpha}, \tag{30}$$

де $\varepsilon_1 = n^2\rho^\alpha + \varepsilon^\alpha$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $\rho \in (0, 1)$, ρ, ε — довільні фіксовані числа.

Підставляючи (30) в (29), знаходимо

$$E_k \leq c\Big(\| F; \gamma, \beta; 2\gamma; Q \|_\alpha + \big\| v_m; V_{3/4} \big\|_0 + \Big\| \Phi_m; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D \Big\|_{2+\alpha}\Big) + \\ + \varepsilon_1 \| v_m; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2+\alpha}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}. \tag{31}$$

Використовуючи нерівності (23), (25), (31) і вибираючи ρ і ε досить малими, отримуємо нерівність (22).

Тепер доведемо теорему 1, використавши теореми 2, 5.

Оскільки

$$\begin{aligned} \| F; \gamma, \beta; 2\gamma; Q \|_\alpha &\leq c\big(\| f; \gamma, \beta; \mu_0; Q \|_\alpha + \| \psi; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2+\alpha}\big), \\ \Big\| \Phi_m; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D \Big\|_{2+\alpha} &\leq c\big(\| \varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D \|_{2+\alpha} + \| \psi; \gamma, \beta; 0; Q \|_{2+\alpha}\big), \end{aligned} \tag{32}$$

то на підставі нерівності (22) маємо

$$\|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \le c\big(\|f; \gamma, \beta; \mu_0; Q\|_\alpha + $$
$$+ \|\varphi; \tilde\gamma, \tilde\beta; 0; D\|_{2+\alpha} + \|\psi; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha}\big). \tag{33}$$

Права частина нерівності (33) не залежить від m і послідовності $\{V_m^{(0)}\} = \{|v_m(P)|\}$, $\{V_m^{(1)}\} = \{d(\gamma - \beta_i, P)|\partial_{x_i} v_m(P)|\}$, $\{V_m^{(2)}\} = \{d(2\gamma - \beta_i - \beta_j, P)|\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m(P)|\}$, $\{V_m^{(3)}\} = \{d(2\gamma, P)|\partial_t v_m(P)|\}$, $P \in Q$, рівномірно обмежені і одностайно неперервні. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{V_{m(r)}^{(k)}\}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, рівномірно збіжні в Q. Переходячи в задачі (8) – (10) до границі при $r \to \infty$, одержуємо, що $u = ve^{-\lambda t} + \psi$ — єдиний розв'язок задачі (1) – (3), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$, і справджується оцінка (4).

Зображення розв'язку задачі (1) – (3).

Теорема 6. *Нехай виконано умови* $1° - 3°$, $f \in C^\alpha(\gamma, \beta; 0; Q)$. *Тоді єдиний розв'язок задачі* (1) – (3) *у просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ *визначається інтегралами Стільтьєса з борелівською мірою*

$$u(t, x) = u_1 + u_2 + u_3 \equiv \int_Q \Gamma_1(t, x; d\tau, d\xi) f(\tau, \xi) + $$
$$+ \int_D \Gamma_2(t, x; d\xi)\varphi(\xi) + \int_\Gamma \Gamma_3(t, x; d\tau, d_\xi S)\psi(\tau, \xi) \tag{34}$$

і для компонент $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ *виконуються нерівності*

$$0 \le \int_Q \Gamma_1(t, x; d\tau, d\xi) \le \left\| e^{\lambda t}(-A_0(t, x) - \lambda)^{-1}; Q \right\|_0,$$
$$0 \le \int_\Gamma \Gamma_3(t, x; d\tau, d_\xi S) \le e^{\lambda T}, \tag{35}$$
$$0 \le \int_D \Gamma_2(t, x; d\xi) \le \left\| \left[1 - \int_0^T |q(\tau, x)| e^{-\lambda\tau} d\tau \right]^{-1}; D \right\|_0 .$$

Доведення. Оскільки $C^k(\gamma, \beta; 0; Q) \subset C^k(\gamma, \beta; \mu_0; Q)$, то для $f \in C^\alpha(\gamma, \beta; 0; Q)$ виконується нерівність

$$\|f; \gamma, \beta; \mu_0; Q\|_0 \le c\|f; \gamma, \beta; 0; Q\|_\alpha .$$

Отже, на підставі теореми 1 для розв'язку задачі (1) – (3) справджується оцінка

$$\|u; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \le c\big(\|f; \gamma, \beta; 0; Q\|_\alpha + \|\varphi; \tilde\gamma, \tilde\beta; 0; D\|_{2+\alpha} + \|\psi; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha}\big). \tag{36}$$

Розглядатимемо $u(t, x)$ при фіксованих (t, x) як лінійний неперервний функціонал $\Phi(f, \varphi, \psi)$ на нормованому просторі $C_\alpha \equiv C^\alpha(\gamma, \beta; 0; Q) \times C^{2+\alpha}(\tilde\gamma, \tilde\beta; 0; D)$ з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (36).

Беручи до уваги включення $C_\alpha \subset C$ і теорему Рісса, можна вважати, що $u(t, x)$ породжує борелівську міру $\Gamma(t, x, Z)$, яка визначена на σ-алгебрі підмножин Z області $\overline{Q}$, включаючи $\overline{Q}$ і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціонала визначається фомулою (34).

З теореми 2 випливає виконання для розв'язків задачі (1) – (3) нерівностей

$$0 \le u_1 \le \left\| f e^{\lambda t}(-A_0 - \lambda)^{-1}; Q \right\|_0, \quad 0 \le u_3 \le \left\| \psi e^{\lambda t}; \Gamma \right\|_0,$$
$$0 \le u_2 \le \left\| \varphi \left[1 - \int_0^T q(\tau, x) e^{-\lambda\tau} d\tau \right]^{-1}; D \right\|_0, \tag{37}$$

де u_1 — розв'язок крайової задачі (1) – (3) при $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$, u_2 — розв'язок крайової задачі (1) – (3) при $f \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ і u_3 — розв'язок задачі (1) – (3) при $f \equiv$ $\equiv 0$, $\varphi \equiv 0$.

Підставляючи в нерівності (37) відповідно $f(t, x) \equiv 1$, $\varphi(x) \equiv 1$ і $\psi \equiv 1$, одержуємо нерівності (35).

1. *Камынин Л. И., Химченко Б. Н.* Об априорных оценках решения параболического уравнения 2-го порядка вблизи нижней крышки параболической границы // Сиб. мат. журн. – 1981. – **22**, № 4. – С. 94 – 113.
2. *Камынин Л. И., Химченко Б. Н.* О принципе максимума для эллиптико-параболического уравнения второго порядка // Там же. – 1972. – **13**, № 4. – С. 777 – 789.
3. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
4. *Бабин А. В., Кабакбаев С. Ж.* О гладкости вплоть до границы решений параболических уравнений с вырождающимся оператором // Мат. сб. – 1994. – **185**, № 7. – С. 13 – 38.
5. *Борок В. М., Перельман М. А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29 – 34.
6. *Пукальський І. Д.* Нелокальна задача Неймана для параболічного рівняння з виродженням // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 9. – С. 1232 – 1244.
7. *Пукальський І. Д.* Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболічних рівнянь // Там же. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1521 – 1531.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
9. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.

Одержано 23.05.2005