

25. Булат А.Ф., Дырда В.И., Звягильский Е.Л., Кобец А.С. Прикладная механика упруго-наследственных сред. В 3-х томах. – К.: Наук. думка, 2012. – Т. 2. Методы расчёта эластомерных деталей. – 2012. – 535 с.

УДК 678.4.06:621.81

Дырда В.И., Гребенюк С.Н., Лисица Н.И., Решевская Е.С.,  
Тархова В.М., Новикова А.В., Заболотная Е.Ю.

## РАСЧЁТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Розглянуто пружно-деформований стан гумових віброізоляторів з урахуванням контактної взаємодії з деталями конструкції.

### STRESS-STRAIN STATE CALCULATION OF VIBROINSULATORS OF COMPLICATED FORM

Stress-strain state of rubber vibroinsulators is considered, taking into account contact interaction with construction parts.

При проектировании и разработке эластомерных элементов конструкций одним из основных видов расчёта является определение параметров напряжённо-деформированного состояния. Эластомерный материал имеет ряд уникальных свойств – высокую механическую прочность, эластичность и слабую сжимаемость [1]. В связи с этим для адекватного описания поведения конструкций из эластомеров в условиях эксплуатации нужны специальные приёмы и методы решения поставленных задач [2].

Вследствие значительной сложности данных задач аналитические методы дают решение лишь для конструкций относительно простой формы. Применение численных методов позволяет получать решение задачи контакта эластомерных элементов сложной геометрической формы с другими деталями конструкций. Наиболее широко применяемым среди численных методов является метод конечных элементов.

Эластомер как слабосжимаемый материал имеет коэффициент Пуассона, близкий к значению 0,5. При расчёте напряжённо-деформированного состояния вводятся компоненты тензора упругих постоянных, с помощью которого устанавливается связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций. Эти компоненты выражаются через коэффициенты Ляме. Значение одного из них  $\lambda$  стремится к бесконечности при приближении коэффициента Пуассона к 0,5, что приводит к потере точности получаемых решений.

Поэтому возникает необходимость в создании специальных подходов к расчёту напряжённо-деформированного состояния эластомерных элементов, которые бы учитывали специфические свойства слабосжимаемых материалов и условия контактного взаимодействия эластомерных элементов с другими деталями конструкций. Моментная схема конечного элемента основана на введении тройной аппроксимации: полей перемещений, деформаций и функции изменения объёма [3]. Причём порядок разложения деформаций и функции изменения объёма выбирается с таким расчётом, чтобы исключить все компоненты деформаций, реагирующие на жёсткие смещения и эффект «ложного сдвига», и все компоненты функции изменения объёма, реагирующие на слабую сжимаемость эластомера.

Выбор полинома, аппроксимирующего функцию перемещений, также определяет точность вычислений по вышеуказанной схеме. В работе в качестве такого полинома был принят интерполяционный полином Эрмита [4], который задаётся

через узловые значения перемещений конечного элемента и их частные производные:

$$u_{k'} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^3 u_i^{(pqr)} \phi^{(pqr)} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^3 \left( u_{k'}^{(pqr)} N_{(pqr)} + \frac{\partial u_{k'}^{(pqr)}}{\partial x_3} N'_{(pqr)} \right), \quad (1)$$

где  $N_{(pqr)}$ ,  $N'_{(pqr)}$  – функции формы;

$u_i^{(pqr)}$  – узловые значения перемещений конечного элемента;

$\phi^{(pqr)}$  – аппроксимирующая функция.

Далее приведен вывод соотношений матрицы жёсткости трёхмерного конечного элемента, который основывается на вариации упругой энергии деформации:

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (2)$$

Учитывая закон Гука, имеем

$$\delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \delta \theta) dV. \quad (3)$$

Аппроксимация перемещений, основанная на выбранном интерполяционном полиноме имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{k'} = \sum_{pqr}^{113} \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)} = & \omega_{k'}^{(000)} \psi^{(000)} + \omega_{k'}^{(001)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(002)} \psi^{(002)} + \omega_{k'}^{(003)} \psi^{(003)} + \\ & + \omega_{k'}^{(010)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(011)} + \omega_{k'}^{(012)} \psi^{(012)} + \omega_{k'}^{(013)} \psi^{(013)} + \omega_{k'}^{(100)} \psi^{(100)} + \\ & + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(101)} + \omega_{k'}^{(102)} \psi^{(102)} + \omega_{k'}^{(103)} \psi^{(103)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(110)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(111)} + \\ & + \omega_{k'}^{(112)} \psi^{(112)} + \omega_{k'}^{(113)} \psi^{(113)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\omega_{k'}^{(pqr)}$  – коэффициенты разложения;

$\psi^{(pqr)}$  – набор степенных координатных функций вида

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x^1)^p (x^2)^q (x^3)^r}{p!q!r!};$$

$p=0,1$ ,  $q=0,1$ ,  $r=0,1,2,3$  – степени аппроксимирующего полинома по соответствующим направлениям.

Компоненты тензора деформаций аппроксимируем путём разложения компонент  $\varepsilon_{ij}$  в ряд Маклорена в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg}^{(ij)} e_{ij}^{(stg)} \psi^{(stg)}, \quad (5)$$

где

$$\sum_{stg}^{(ij)} = \sum_{s=0}^{L_{ij}} \sum_{t=0}^{M_{ij}} \sum_{g=0}^{N_{ij}}; \quad (6)$$

$$L_{ij} = \begin{cases} l & \text{при } i, j \neq 1, \\ l-1; & \end{cases} \quad (7)$$

$$M_{ij} = \begin{cases} m & \text{при } i, j \neq 2, \\ m-1; & \end{cases} \quad (8)$$

$$N_{ij} = \begin{cases} n & \text{при } i, j \neq 3, \\ n-1. & \end{cases} \quad (9)$$

В матричной форме данные соотношения имеют вид:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \{e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\}. \quad (10)$$

Коэффициенты разложения  $e_{ij}^{(stg)}$  вычисляются по формулам:

$$e_{11}^{(pqr)} = \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p+1-\mu q-\nu r-\eta)}^{k'}; \quad (11)$$

$$e_{22}^{(pqr)} = \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu q+1-\nu r-\eta)}^{k'}; \quad (12)$$

$$e_{33}^{(pqr)} = \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu q-\nu r+1-\eta)}^{k'}; \quad (13)$$

$$e_{12}^{(pqr)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left( \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu+1 q-\nu r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu q-\nu+1 r-\eta)}^{k'} \right); \quad (14)$$

$$e_{13}^{(pqr)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left( \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu+1 q-\nu r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'} \right); \quad (15)$$

$$e_{23}^{(pqr)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left( \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu q-\nu+1 r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'} \right), \quad (16)$$

где

$$b_{(\mu\nu\lambda)}^{k'} = \frac{\partial^{(\mu+\nu+\lambda)} z^{k'}}{(\partial x_1)^\mu (\partial x_2)^\nu (\partial x_3)^\lambda} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0}. \quad (17)$$

Анализируя каждую из компонент разложения  $e_{ij}^{(stg)}$ , замечаем, что некоторые коэффициенты  $\omega_{k'}^{(pqr)}$  не входят в разложение для аппроксимации перемещений (4), поэтому исключаем их и записываем компоненты деформаций в следующем виде

$$\varepsilon_{11} = e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{11}^{(002)} \psi^{(002)} + e_{11}^{(003)} \psi^{(003)} + e_{11}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{11}^{(011)} \psi^{(011)} + e_{11}^{(012)} \psi^{(012)} + e_{11}^{(013)} \psi^{(013)}; \quad (18)$$

$$\varepsilon_{22} = e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{22}^{(002)} \psi^{(002)} + e_{22}^{(003)} \psi^{(003)} + e_{22}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{22}^{(101)} \psi^{(101)} + e_{22}^{(102)} \psi^{(102)} + e_{22}^{(103)} \psi^{(103)}; \quad (19)$$

$$\varepsilon_{33} = e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{33}^{(002)} \psi^{(002)} + e_{33}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{33}^{(011)} \psi^{(011)} + e_{33}^{(012)} \psi^{(012)} + e_{33}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{33}^{(101)} \psi^{(101)} + e_{33}^{(102)} \psi^{(102)} + e_{33}^{(110)} \psi^{(110)} + e_{33}^{(111)} \psi^{(111)} + e_{33}^{(112)} \psi^{(112)}; \quad (20)$$

$$\varepsilon_{12} = e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{33}^{(002)} \psi^{(002)} + e_{33}^{(003)} \psi^{(003)}; \quad (21)$$

$$\varepsilon_{23} = e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{33}^{(002)} \psi^{(002)} + e_{33}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{33}^{(101)} \psi^{(101)} + e_{33}^{(102)} \psi^{(102)}; \quad (22)$$

$$\varepsilon_{13} = e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{33}^{(002)} \psi^{(002)} + e_{33}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{33}^{(011)} \psi^{(011)} + e_{33}^{(012)} \psi^{(012)}. \quad (23)$$

В матричной форме коэффициенты  $e_{ij}$  записываются следующим образом:

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{s'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (24)$$

Коэффициенты матрицы  $[F_{ij}^{s'}]$  вычисляются на основе выше перечисленных формул.

Введение функции изменения объёма позволяет учитывать слабую сжимаемость эластомера. Аппроксимацию функции изменения объёма также записываем, отбросив компоненты, не удовлетворяющие принципам моментной схемы:

$$\theta = \sum_{\alpha=0}^0 \sum_{b=0}^0 \sum_{c=0}^2 \xi^{(\alpha\beta\gamma)} \psi^{(\alpha\beta\gamma)} = \xi^{(000)} + \xi^{(001)} \psi^{(001)} + \xi^{(002)} \psi^{(002)}, \quad (25)$$

где  $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$  – коэффициенты разложения, которые находим из соотношения:

$$\xi^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \varepsilon_{ij} g^{ij}}{(\partial x_1)^\alpha (\partial x_2)^\beta (\partial x_3)^\gamma} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0}. \quad (26)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi^{(000)} &= e_{11}^{(000)} g^{11} + e_{22}^{(000)} g^{22} + e_{33}^{(000)} g^{33}; \\ \xi^{(001)} &= e_{11}^{(001)} g^{11} + e_{22}^{(001)} g^{22} + e_{33}^{(001)} g^{33}; \\ \xi^{(002)} &= e_{11}^{(002)} g^{11} + e_{22}^{(002)} g^{22} + e_{33}^{(002)} g^{33}. \end{aligned} \quad (27)$$

В матричной форме выражения (25) и (26) имеют вид:

$$\{\theta\} = \{\xi\}^T \{\psi_\theta\}, \quad (28)$$

$$\{\xi\} = [F_\theta^{s'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (29)$$

Подставляя соотношения (24) и (28) в (3), получим

$$\delta W = \iiint_V \delta \{e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\} 2\mu g^{ik} g^{jl} \{e_{kl}\}^T \{\psi_{kl}\} dV + \iiint_V \lambda \{\xi\}^T \{\psi_\theta\} \delta \{\xi\} \{\psi_\theta\}^T dV \quad (30)$$

Вводя замену

$$[H^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\mu g^{ik} g^{jl} \{\psi_{ij}\} \{\psi_{kl}\}^T \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (31)$$

$$[H^\theta] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda \{\psi_\theta\} \{\psi_\theta\}^T \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (32)$$

получаем новое выражение для вариации упругой энергии деформации

$$\delta W = \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] \{\omega_{t'}\} + \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_\theta^{s'}]^T [H^\theta] [F_\theta^{t'}] \{\omega_{t'}\}. \quad (33)$$

Перейдём от коэффициентов разложения  $\{\omega_{k'}\}$  в (33) к коэффициентам разложения для перемещений через интерполяционный полином Эрмита. Для этого сопоставим (1) и (4), записанные в матричном виде:

$$u_{k'} = \{\omega_{k'}\}^T \{\psi\}, \quad (34)$$

$$u_{k'} = \{u_i\}^T \{N\},$$

где  $\{u_i\}$  – вектор узловых значений перемещений и производных.

Замечаем, что в этом случае связь между коэффициентами разложения  $\{\omega_{k'}\}$  и  $\{u_i\}$  имеет вид

$$\{\omega_{k'}\} = [A] \{u_i\} \quad (35)$$

либо

$$\{N\} = [A]^T \{\psi\}, \quad (36)$$

где  $[A]$  – матрица преобразования, а  $\{N\}$  – функции формы.

С учётом (33) запишем новое выражение для вариации энергии деформации:

$$\begin{aligned} \delta W = & \delta \{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{ij}^{s'}] [K^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] \{u_{t'}\} + \\ & + \delta \{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{\theta}^{s'}] [K^{\theta}] [F_{\theta}^{t'}] [A] \{u_{t'}\} \end{aligned} \quad (37)$$

либо

$$\delta W = \delta \{u_{s'}\}^T [K^{s't'}] \{u_{t'}\}, \quad (38)$$

где  $[K^{s't'}]$  – матрица жёсткости конечного элемента:

$$[K^{s't'}] = [A]^T [F_{ij}^{s'}] [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] + [A]^T [F_{\theta}^{s'}] [H^{\theta}] [F_{\theta}^{t'}] [A]. \quad (39)$$

Для субпараметрического конечного элемента порядок полинома, используемого для описания геометрии ниже порядка полинома, аппроксимирующего искомую функцию (перемещения). Отображение между координатами локальной  $x_i$  и глобальной  $z_i$  системы координат имеет вид

$$\begin{aligned} z_1(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=0}^M N_i(x_1, x_2, x_3) \cdot z_i^1; \\ z_2(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=0}^M N_i(x_1, x_2, x_3) \cdot z_i^2; \\ z_3(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=0}^M N_i(x_1, x_2, x_3) \cdot z_i^3, \end{aligned} \quad (40)$$

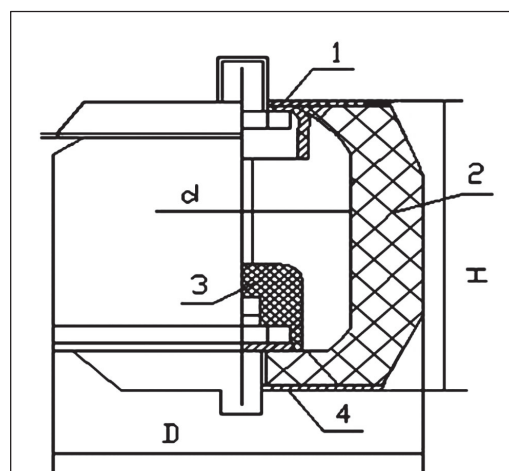
где  $M$  – количество узловых точек конечного элемента.

Таким образом, были получены коэффициенты матриц, которые необходимы для построения матрицы жёсткости конечного элемента:  $[A]$ ,  $[F_{ij}^{s'}]$  и  $[F_{\theta}^{s'}]$ . Глобальная матрица рассчитываемой конструкции строится путём суммирования соответствующих коэффициентов матриц жёсткости конечных элементов по формуле.

Проведём расчёт напряженно-деформированного состояния эластомерных элементов инженерных конструкций. В качестве объекта исследования выберем эластомерный виброизолятор ВР201.

Эластомерный виброизолятор типа ВР-201 (рис. 1) используется для виброизоляции и защиты от ударных воздействий вентиляторов, работающих во взрывоопасных условиях. Особенностью таких элементов является малая поперечная жёсткость, что весьма существенно при бесфундаментной установке оборудования. Марка резины – 2959, модуль сдвига  $G_0 = 1,76 \times 10^6$  Па,  $\nu = 0,4999$ .

Схема и размеры виброизолятора представлены на рис. 2.



1 – верхняя чашка; 2 – упругий элемент; 3 – колпачок; 4 – нижняя чашка  
Рис. 1 – Виброизолирующая взрывозащищённая опора

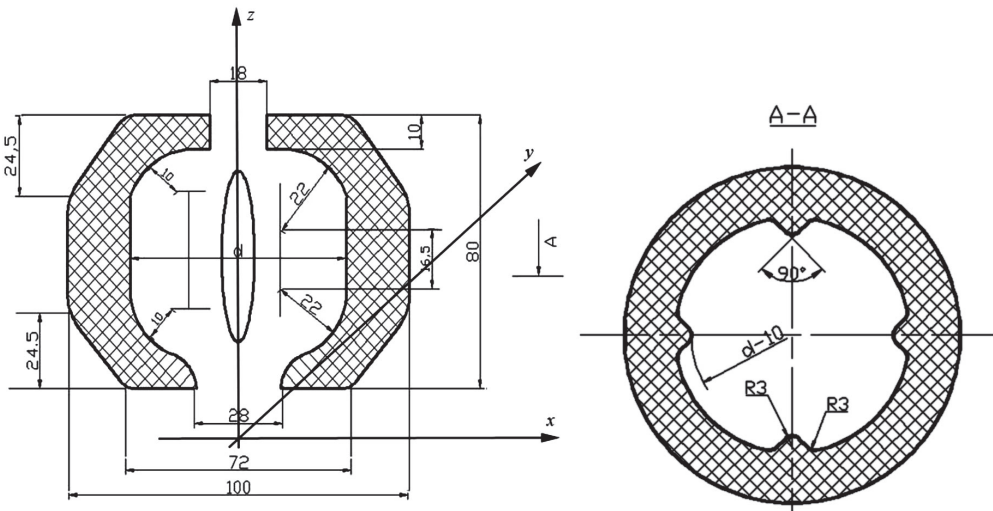


Рис. 2 – Схема виброизолятора ВР-201

Эластомерный виброизолятор в процессе эксплуатации подвергается осевому сжатию. Результаты расчёта величины осадки виброизолятора при различных значениях величины нагрузки приведены на рис. 3.

Исследование сжимающих напряжений показано на рис. 4, рис. 5.

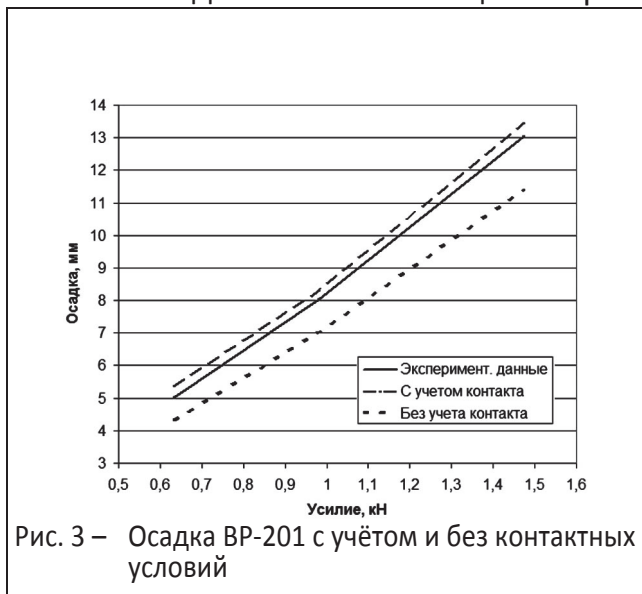
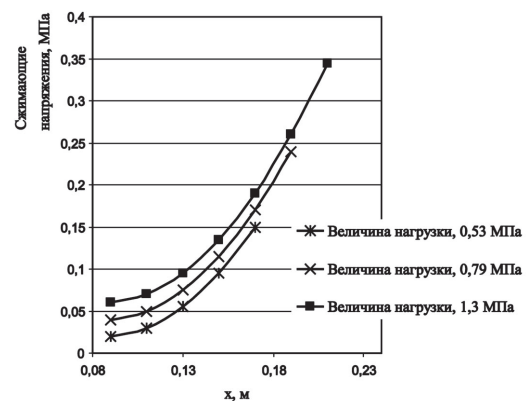
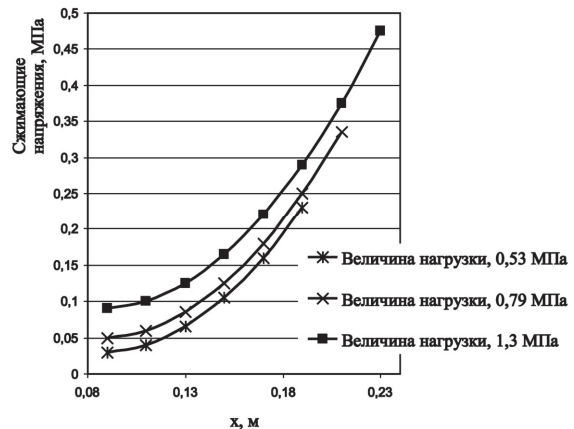


Рис. 3 – Осадка ВР-201 с учётом и без контактных условий

Рис. 4 – Характер распределения нормальных напряжений в виброизоляторе ВР-201 при  $z = 80$  (толщина стенок амортизатора 0,09 м)

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булат А.Ф., Дырда В.И., Звягильский Е.Л., Кобец А.С. Прикладная механика упруго-наследственных сред. В 3-х томах. – К.: Наук. думка, 2011. – Т. 1. Механика деформирования и разрушения эластомеров. – 2011. – 463 с.
2. Булат А.Ф., Дырда В.И., Звягильский Е.Л., Кобец А.С. Прикладная механика упруго-наследственных сред. В 3-х томах. – К.: Наук. думка, 2012. – Т. 2. Методы расчёта эластомерных деталей. – 2012. – 535 с.
3. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. – К.: Наук. думка, 2002. – 655 с.
4. Гребенюк С.Н., Мизерная Е.Л., Решевская Е.С., Тархова В.М. Специальные конечные элементы в программном комплексе «МИРЕЛА+»// Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2010. – Вып. 3(39). – С. 132-136.

Рис. 5 – Характер распределения нормальных напряжений в виброизоляторе ВР-201 при  $z = 80$  (толщина стенок амортизатора 0,07 м)

## **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УСЛОВИЙ НАГРУЖЕНИЯ ПРОТЕКТОРА ПОВРЕЖДЕННОЙ ШИНЫ ПРИ КАЧЕНИИ КОЛЕСНОГО ДВИЖИТЕЛЯ С АВАРИЙНОЙ ОПОРОЙ**

Дослідження колісного рушія рекомендовано робити не тільки при рекомендованому рівні внутрішнього тиску у внутрішній порожнині шини, але й при його відсутності, попередньо прогнозуючи швидкість кочення в аварійному режимі відповідно до запропонованого підходу.

### **THE PREDICTION OF DAMAGED TIRE TREAD LOAD ROLLING OF WHEEL BEARING ENGINE WITH EMERGENCY SUPPORT**

The investigation of wheel bearing engine is recommended to produce not only at the recommended level of the internal pressure inside the tire, but also in its absence previously predicting the rolling velocity in an emergency, in accordance with the proposed approach.

Целесообразность проведения исследований традиционного колёсного движителя в соответствии со скоростными, тормозными, ресурсными и многими другими методиками не подлежит сомнению, однако, по мнению автора, получаемые при этом результаты приемлемы лишь для сравнительной оценки обрабатываемых технико-экономических решений. Основанием для возникновения данного мнения служит анализ условий эксплуатации транспортного средства, исходя из которого, в виду организационно-технических сложностей, далеко не всегда имеет место условие соблюдения рекомендуемого уровня внутреннего давления во внутренней полости пневматической шины традиционного колёсного движителя.

Эксплуатационная ситуация предопределяет в пневматической шине колёсного движителя уровень внутреннего давления, который относительно рекомендуемого может быть как большим, так и меньшим. Любое из отклонений чревато повреждением пневматической шины с постепенной или внезапной потерей внутреннего давления до нуля, что обуславливает переход колёсного движителя из состояния режима качения, соответственно, из стационарного к аварийному. Однако существующие исследования колёсного движителя, производимые при обеспечении рекомендуемого уровня внутреннего давления, не отражают реального изменения эксплуатационных свойств. Как следствие, свыше трети дорожно-транспортных происшествий, которые, увы, сопряжены с потерей здоровья и жизни людей, обусловлены непрогнозируемым изменением при аварийном качении свойств колёсного движителя с повреждённой шиной.

Ранее рассматривались уникальные возможности электронных средств контроля и корректировки состояния колёсного движителя транспортных средств [1, 2], которые, к настоящему времени, получили настолько широкое распространение, что в большинстве случаев являются неотъемлемой составляющей базовой комплектации. Тем самым, решая вопрос обеспечения безопасного движения транспортного средства даже в случае существенного отклонения от рекомендуемого уровня внутреннего давления в полости пневматической шины. Однако, как и у любой системы, применимость данных средств ограничена обязательным к соблюдению условием – сохранение функциональной целостности колёсного движителя. Это, на данном этапе технического развития, определяется наличием во внутренней полости пневматической шины, вне зависимости от её повреждённого или неповреждённого состояния, минимально необходимым уровнем внутреннего давления, исключающим осевое и окружное смещение системы «обод-шина».