Дрєєв О.М., Філєр З.Ю. **УДК 519.2**

АНАЛІЗ ТА ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ КВАЗІПЕРІОДИЧНИХ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

1. Постановка задачі

Об’єктом дослідження є дискретне представлення в часі майже періодичного сигналу $f(t_i)$, t_i – відліки часу, а $f(t)$ має вигляд:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(A_k + \psi_k(t)\right) \sin(\omega_k t + \varphi_k + \xi_k(t)),$$

де A_k, ω_k, φ_k – деякі константи; $\psi_k(t)$, $\xi_k(t)$ – випадкові функції від часу з нульовим математичним сподіванням та обмеженою дисперсією δ_k; k – індекс сумування.

Метою дослідження є екстраполяція $f(t_i)$ шляхом визначення A_k, ω_k, φ_k та оцінка похибки прогнозування.

Результати прогнозування можуть використовуватися поточного та стратегічного планування економічних керівних заходів на рівні підприємств та держави. На основі аналізу та прогнозу можна передбачати кризові явища та розробляти заходи запобігання чи пом’якшення їх наслідків.

2. Огляд існуючих методик

Для апроксимацій сигналів тригонометричними поліномами пошук коефіцієнтів A_k, φ_k не викликає труднощів. Для пошуку ж основних власних *частот* задача не є тривіальною і всі існуючі методики не є універсальними, мають свої недоліки та переваги. Прикладом таких систем є механічні системи з неідеальним двигуном [1].

2.1. Гармонічний аналіз, перетворення Фур’є. Перетворення Фур’є для пошуку основних частот сигналу, який досліджується придатний умовно, бо методика не дає змоги розрізнити близькі за частотою складові коливання; не відображає адекватно частотне наповнення для періодів більших за час спостереження. Розклад в ряд Фур’є має ті ж недоліки, але зокрема враховує лише частоти, період яких кратний часу спостереження.

2.2. Вейвлет перетворення з метою частотного аналізу сигналу. Для частотно-амплітудного аналізу сигналу використовують і вейвлет перетворення. В процесі перетворення також відображається зміна в часі й амплітуд гармонічних складових сигналу. Це входить в протиріччя з постановою задачі і вимагає додаткових досліджень на усереднення періодів складових коливань [3].

2.3. Автокореляційний аналіз також є досить поширеним в пошуках основних частот раціонально кратних часом спостереження. Тут шукають кореляцію сигналу з його копією зі зсувом в часі на h. Відповідно, у випадку наявності періоду $T=h$, матимемо локальний максимум кореляції.

2.4. Авторегресія. Для заданого набору функцій $g_k(t)$, шукають наближення $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k g_k(t) + Y(t)$, де k – індекс сумування, a_k – шукані коефіцієнти, N+1 – кількість заданих функцій базису, $Y(t)$ – випадковий шум, що не підлягає апроксимації. Головним недоліком методики є залежність якості наближення від заданого базису $g_k(t)$. Відповідно $g_k(t)$ повинно бути як можна повним та не містити лінійно (майже) залежні функції. При наявності майже лінійно залежних функцій у базисі наближення, алгоритм не застосовний.

2.5. Генетичні алгоритми самовпорядкування за подобою авторегресії вимагають наявності базових функцій $g_k(t)$, але до апроксимаційного поліному входять лише деякі з них, що пройшли через "штучний відбір".

Перевагою алгоритму є побудова більш простих апроксимаційних поліномів, що дає можливість значно розширити початковий (базисний) набір $g_k(t)$. Генетичні алгоритми також більш стійкі до використання майже лінійно залежних функцій в якості базисних. Можливе виділення коливних складових з періодом, що значно перевищує час спостереження сигналу.

До недоліків можна віднести залежність якості апроксимації від початкового набору функцій $g_k(t)$ та, завдяки відкиданням з базису деяких функцій, у більшості отримання не найкращого апроксимаційного наближення в заданому базисі. Недоліки методу компенсуються значним заощадженням часу розрахунків.

2.6. Послідовне вилучення трендів за допомогою методу найменших квадратів. Автори пропонують використати метод послідовного вилучення тригонометричних трендів. У основі методики лежить визначення функції $g(t) = A + B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t)$, що має найменше середнє квадратичне відхилення від заданої вимірами $f(t)$. Сам метод найменших квадратів [4] не дає можливості точно знайти ω, але дає однозначну відповідність коефіцієнтів A, B, C від значення ω, це дозволяє будувати функцію мінімального середнього квадратичного відхилення [2, 7]: $s(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_i) - g(t_i))^2$.

Пошук мінімуму $s(\omega)$ проводиться чисельно [4], але для запобігання впливу паразитних мінімумів, які відображають частоти ортогонального базису Фур’є, початкове розбиття повинно мати крок не більший за

$\frac{2\pi}{3(t_n - t_0)}$ (чотири точки на півперіод). Для функції 1-2sin(3t)+sin(3.1t)+cos(0.1t) залежність середнього квадратичного відхилення від частоти матиме вигляд рис.1.

Після виділення основного наближення-тренду, будується різниця $f(t_i) - g(t_i)$, до якої шукають наступний тренд. Результатом є наближення: [illegible]. Характерною рисою методу є виділення значного компонента малої частоти. Великою перевагою методу є також можливість використання **нерівномірних в часі** вимірювань сигналу.

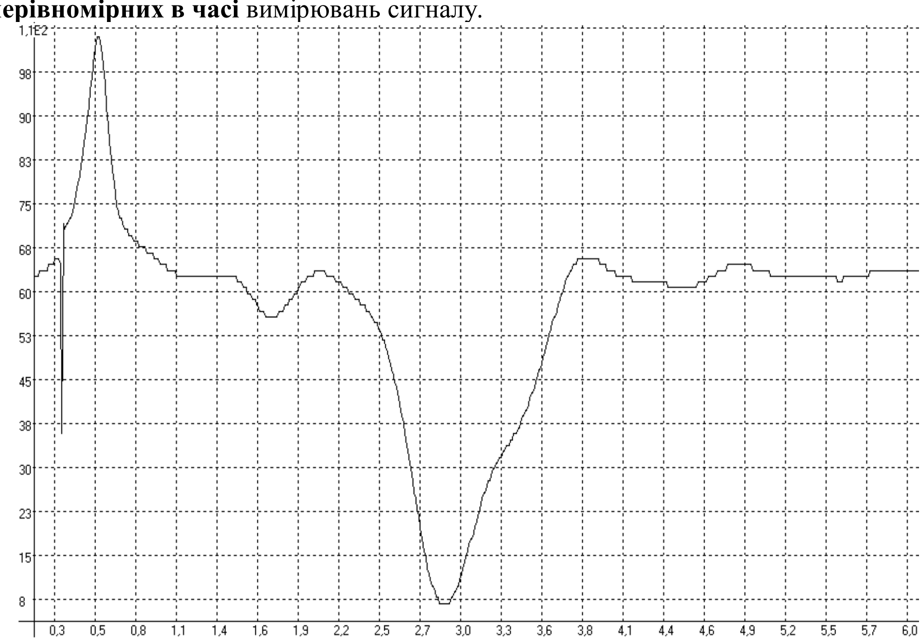

Рис. 1. Середнє квадратичне відхилення апроксимації функції 1-2sin(3t)+sin(3.1t)+cos(0.1t) синусоїдою заданої частоти

На рис. 1 показано знайдену залежність середньоквадратичного відхилення від циклічної частоти складової гармоніки: $s(\omega)$. Мінімальні значення відповідають наявним частотам близьких до $\omega \approx 3$; також є мінімум, який відповідає довгоперіодичному коливанню $\omega \approx 0{,}3$. Інші методи не показують наявність коливань з таким довгим періодом.

3. Оцінка похибок екстраполяції

Будь яке прогнозування не є абсолютно точним, бо з часом об’єкт дослідження змінює свої параметри; впливають похибки вимірювань та завади. Тому важливою частиною процесу прогнозування є оцінювання похибки прогнозу, що дає змогу для систем керування підготувати меншу кількість запобіжних заходів.

3.1. Імовірнісна оцінка похибки прогнозування. Якщо процес є ергодичним, то для нього справедливе співвідношення:

$$\tau_p = \frac{1}{R_y(0)} \int_0^\infty |R_y(s)| ds \cdot$$

Тут τ_p – порядок часу, на який має сенс прогнозування процесу, а

[illegible]

є кореляційною функцією досліджуваного сигналу.

При проведені пошуку рівняння регресії у вигляді тригонометричного многочлену дістанемо середнє квадратичне відхилення $s(\omega_k)$ і, також, таблицю функції відхилень наближення від еталонних значень $f_{k+1}(t_i)$. Якщо прийняти відхилення $f_{k+1}(t_i)$ за випадкову величину, яка підпорядкована нормальному закону розподілу з нульовим математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням $s(\omega_k)$, то можна оцінити час надійного прогнозування. Нехай допустима норма відхилення реального сигналу від прогнозу є b, а ймовірність того, що ця норма не буде перевищена є $P_н$, тоді ймовірність отримання прогнозу в межах допустимих значень буде

$$P_H \le \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot s(\omega_k)}} \int_{-b}^{b} \exp(-l^2 / (2s(\omega_k)) dl \right)^n,$$

де n – кількість кроків прогнозу; l – змінна інтегрування. У цьому випадку час прогнозування $t_H = hn,$ з ймовірністю $P_н$ є надійним для $[-b; b]$.

Така оцінка похибки не є гарантованою і у більшості випадків є сильно завищена.

3.2. Оцінка похибки апроксимації та екстраполяції за допомогою узагальненої формули Тейлора [5, 7]:

$$f(t)=f(t_0)v_0(t-t_0)+f'(t_0)v_1(t-t_0)+...+f^n(t_0)v_n(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}F(\tau)v_n(t-\tau)d\tau,$$

де f(t) – функція яку наближають, $v_i(t-t_0)$ – розв'язки деякого лінійного диференціального рівняння **D**[v]=0 порядку N з початковими умовами $v_i^{(k)}(t-t_0)=\delta_{i,k}$. Тут $\delta_{i,k}=1$ при i=k, інакше $\delta_{i,k}=0$. *F(t)* – результат дії диференціального оператору **D[]** на *f(t)*.

Нехай функція *f(t)* представлена вибіркою в часі f_i повністю, тоді існує наближення лінійно незалежними функціями $f(t)\approx\sum_{k=1}^{N}a_k g_k(t)$, де кожній функції $g_k(t)$ відповідає диференціальний оператор $\mathbf{D}_k$[] мінімального порядку. Оператор **D**[] має характеристичний многочлен, що є добутком всіх характеристичних многочленів операторів $\mathbf{D}_k$[]. Тому існує еквівалентне наближення за узагальненням формули Тейлора, і $v_i(t-t_0)$ є лінійною комбінацією $v(t-t_0)=\sum_{k=1}^{N}a_k^* g_k(t)$. Результат є

$$f(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k g_k(t)+\int_{t_0}^{t}F(\tau)v_N(t-\tau)d\tau,$$

де $v_N(t-t_0)$ шукається як розв'язок задачі Коші **D**[v]=0, v(0)=0, v'(0)=0, ..., $v^{(N)}$(0)=1. Залишається питання про вибір t_0, але за властивостями інтегралу можна його розкласти на складові:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k g_k(t)+\int_{t_0}^{t_n}F(\tau)v_N(t-\tau)d\tau+\int_{t_n}^{t}F(\tau)v_N(t-\tau)d\tau.$$

Значення інтегралу в межах [t_0;t_n] знаходиться як різниця між виміряним значенням та наближенням; позначимо її Δ_n. За теоремою про середнє, існує таке c, що

$$f(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k g_k(t)+\Delta_n+F(c)\int_{t_n}^{t}v_N(t-\tau)d\tau.$$

Оцінкою похибки прогнозування *R(t)* є:

$$|R(t)|\le|\Delta_n|+\max(|F(t)|)\cdot\left|\int_{t_n}^{t}v_N(t-\tau)d\tau\right|,$$

при припущенні подальшого обмеження *F(t)* на час прогнозування, що цілком істотно для майже стаціонарних сигналів.

Нехай функція є $v_N(t)=A_0+\sum_{k=1}^{N}\left(B_k\sin(\omega_k t)+C_k\cos(\omega_k t)\right)$. З урахуванням початкових умов, можна прирівняти відповідні похідні до нуля та похідну порядку N - до одиниці, та визначити невідомі коефіцієнти A, B, C:

$$A_0+\sum_{k=1}^{N}C_k=0;\ \sum_{k=1}^{N}\omega_k B_k=0;\ \sum_{k=1}^{N}\omega_k^2 C_k=0;\cdots\ \sum_{k=1}^{N}\left(B_k\sin^{(2N+1)}(\omega_k t)+C_k\cos^{(2N+1)}(\omega_k t)\right)=1\cdot$$

Це дає можливість визначити обмеження $|v_N(t)|\le|A_0|+\sum_{k=1}^{N}\left(\sqrt{B_k^2+C_k^2}\right)$. Тоді більш грубою оцінкою похибки прогнозування є

$$|R(t)|\le|\Delta_n|+\max(|F(t)|)\cdot\left(|A_0|+\sum_{k=1}^{N}\sqrt{B_k^2+C_k^2}\right)t\cdot$$

4. Використання результатів

Наведена методика регресії тригонометричним многочленом надає можливість будувати математичні моделі на основі проведених спостережень, для яких невідомі моделі побудовані на основі відомих законів залежностей.

Рис. 2. Приклад прогнозування індексів Доу Джонса

Для прикладу ефективності використання програмного продукту наведемо «прогноз» вже відомих значень індексу Доу Джонса (IDJA), рис. 2. За базові значення взято показники з 1967 по 2006 роки включно [9]. Побудовано екстраполяцію, яка передбачає значну кризу з середини 2008 року. Базовий проміжок для побудови прогнозів обирається за якістю «прогнозування» в минуле. Динаміка зміни IDJ добре прогнозується на 2-3 роки. Моніторинг прогнозованих значень дозволить постійно мати інформацію про зміни економічної ситуації на найближчі роки.

У результаті проведення екстраполяції було отримано основні складові гармоніки, які наближають зміни IDJA. Список перших гармонік та їх тлумачення надано в таблиці.

Завдяки наявності сонячних циклів багато науковців доводять існування впливу, та шукають механізм впливу змін сонячної активності на соціально-економічні процеси [6]. У більшості випадках пряма залежність з економічними процесами спостерігається не з самою величиною чисел Вольфа, які є характеристикою сонячної активності за кількістю та купністю плям на Сонці, а зі *швидкістю* їх зміни, що приводить до виникнення змінних магнітних полів які індукують струми в різних сферах Землі.

Таблиця 1. Основні гармоніки процесу зміни IDJA, відсортовано по потужності

№	Період гармоніки IDJA (роки)	Період гармоніки сонячної активності (роки)	Тлумачення
1	48,8	-	Довгі хвилі М. Кондратьєва
2	25,7	-	2-га гармоніка хвилі М. Кондратьєва
3	8,77	8,64 (відх. 1,5%)	Сонячний цикл
4	11,2	11,6 (відх. 3,2%)	Сонячний цикл
5	7,35	7,91 (відх. 7,6%)	Сонячний цикл
6	48,63	-	Довгі хвилі М. Кондратьєва

Висновки

1. Пропонується побудова тригонометричного тренду шуканих частот з послідовним вилученням складових до досягнення мінімального рівня середнього квадратичного відхилення з метою побудови прогнозу.
2. Як приклад, показано аналіз індексу Доу Джонса IDJA та його прогнозу на кризисні 2008 – 2009 роки.
3. Зіставлені частоти індексу IDJA з частотним спектром сонячної активності. Цим самим показано наявність впливу сонячної активності на розвиток економіки.
4. Розвиток програмного забезпечення передбачає введення автоматизації пошуку оптимального базового проміжку для побудови надійного прогнозу.

Джерела та література:

1. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением / В. О. Кононенко – М. : Наука, 1964. – 232 с.
2. Дрєєв О. М. Спектральний аналіз майже періодичних сигналів / О. М. Дрєєв, З. Ю. Філер // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. праць. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – Вип. 4. – Т. 3. – С. 64-68.
3. Блатер К. Вейвлет-анализ. Основы теории / К. Блатер – М. : Техносфера, 2004. – 274 с.
4. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1989. – 608 с.

5. Филер З. Е. Обобщение формулы Тейлора, Ньютона и Лагранжа и их применение к решению дифференциальных и разностных уравнений / З. Е. Филер // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. – Куйбышев : Куйбышевский гос. ун-т, 1982. – С. 147-157.
6. Кононович Э. В. Частотно-временной анализ рядов солнечной активности : [Электронный ресурс] / Э. В. Кононович, И. В. Миронова, В. А. Батурин // Исследовано в России : электронный научный журнал. – Режим доступа : http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2006/182.pdf.
7. Дрєєв О. М. Апроксимація та прогноз майже періодичних процесів / О. М. Дрєєв, З. Ю. Філер // Наукові записки. – Кіровоград : РВВ КДПУ ім. Винниченка, 2006. – Вип. 65. – С. 50-56. – (Математичні науки).
8. Філер З. Ю. Пошук не ортогонального функціонального базису для апроксимації та екстраполяції стаціонарних та перехідних випадкових процесів / З. Ю. Філер, О. М. Дрєєв // Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування : тези доповідей. – Ужгород : Ін-т математики НАН України, 2006. – С. 118.
9. База даних індексу Доу-Джонса з 1928 року : [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://finance.yahoo.com/q/hp?s=^DJI&a=09&b=1&c=1928&d=06&e=17&f=2011&g=d

Illichevskyy S. **УДК 330.46(075.8)**

THE MODEL OF THE FINITE TIME RUIN PROBABILITIES FOR INSURANCE COMPANY WITH INVESTMENT ACTIVITIES

МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ВРЕМЕНИ БАНКРОТСТВА ДЛЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С ИНВЕСТИЦИОННОЙ АКТИВНОСТЬЮ

Данная статья посвящена исследованию и разработке актуарной модели расчета времени наступления банкротства для страховой компании. Новизна статьи заключается в том, что анализируется страховая компания, которая осуществляет инвестиционную активность, что в свою очередь выступает в качестве дополнительной статьи ее дохода.

The problem statement. Today it is impossible to imagine a market economy without risks. They are involved almost in every economic activity. There is a great need in measuring, predicting and minimizing risks. Insurance services are one of the industries, which permanently experience risks of bankruptcy. That is why calculating the ruin probabilities for insurance companies are one of the problems that need well-developed mathematical models [1, p. 179]. Nowadays Ukrainian insurance companies are searching for new ways of profitability and competitiveness. Western European insurance companies has an option of investing their fund for additional profit. That is way there is a great necessity of creation and development of the actuarial models for Ukrainian insurance to provide them the possibility of investing their fund for additional profit.

The analysis of main researches and publications. One of the first studies in this area was conducted in the beginning of the twentieth century. Since then, the mathematical methods of ruin probability calculation developed and accumulated a great variety of models and approaches. While the permanent growing of economic needs, insurance services increase steadily in the economies of all developed countries. Insurance services are one of the youngest industries any economy, which experience a stage of active development. In global practice of developed countries, well organized insurance services are involved in many economic sectors like investment activity of insurance companies. This article studies how the actuarial mathematical tools can positively affect the theoretical and practical development of insurance. The development of theoretical, methodological, organizational and legal bases of insurance market have been contributed by many economists, such as: Alexandrova M., Alexandrova T., ArtyukhT., Bazylevych V., Baranovsky A. , Osadets S, Zaruba A., Kolomin E., Klapkiv M., Shah E., Reytman L., Slusarenko E, Yakovlev T., Facil M. and others.

Unsolved issues: one of the main problems at present for actuarial analysis of the Ukrainian insurance market is the lack of large statistical base, which is necessary for any econometric modeling. That is way there is a great necessity of actuarial models that involve fewer statistical information. We analyze methods of calculation of ruin probabilities for insurance company in presents of its investing activity. We consider an insurance company in the case when the premium rate is a bounded by some nonnegative random function and the capital of the insurance company is invested in a risky asset whose price follows a geometric Brownian.

The goals and tasks of the article: the goal of the article is creation new types of actuarial models of the analysis of ruin probabilities that can be helpful for Ukrainian insurance companies under presence of their investment activities. There are different methods for approximating the distribution of aggregate claims and their corresponding stop-loss premium by means of a discrete compound Poisson distribution and its corresponding stop-loss premium. This discretization is an important step in the numerical evaluation of the distribution of aggregate claims, because recent results on recurrence relations for probabilities only apply to discrete distributions. The discretization technique is efficient in a certain sense, because a properly chosen discretization gives raise to numerical upper and lower bounds on the stop-loss premium, giving the possibility of calculating the numerically estimates for the error on the final numerical results.