

УДК 532.543:530.145.6:517

ПРОФІЛЬ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ ХВИЛЕПОДІБНИХ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ ТА СОЛІТОННІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. А. РЯБЕНКО

Рівненський державний технічний університет, Рівне

Получено 10.09.99 ◊ Пересмотрено 11.10.99

Побудована математична модель хвилеподібних білякритичних течій. Виведено узагальнене диференціальне рівняння кривої вільної поверхні, знайдено його загальний і солітонний розв'язки, виражені через параметри потоку в початковому перерізі розглядуваних течій. Показано, що відомі рівняння Кортвега-де Фріса, Серра та запропоноване зводяться до одного виразу. Уточнені умови існування самотньої і кноїдальних хвиль. Теоретичний профіль співставлено з експериментальними даними. На основі проведених теоретичних і експериментальних досліджень дана класифікація усталених і перманентних білякритичних течій з гладкою хвилеподібною поверхнею.

Построена математическая модель волнообразных околоскритических течений. Выведено обобщенное дифференциальное уравнение кривой свободной поверхности, найдены его общее и солитонное решения, выраженные через параметры потока в начальном сечении рассматриваемых течений. Показано, что известные уравнения Korteweg-de Vries, of Serre and the one suggested are reduced to one expression. Conditions of existence of solitary and cnoidal waves had been explained. The theoretical profile is compared with experimental data. On basis of conducting theoretical and experimental research the classification of stable and permanent near-critical flows with smooth wavelike surface had been given.

A mathematical model of wavelike near-critical flows has been built. A generalised differential equation for the free surface curve has been derived, general and solitary solutions for it have been found which are expressed through flow parameters in the initial section of flows considered. It has been shown that the known equations of Korteweg-de Vries, of Serre and the one suggested are reduced to one expression. Conditions of existence of solitary and cnoidal waves had been explained. The theoretical profile is compared with experimental data. On basis of conducting theoretical and experimental research the classification of stable and permanent near-critical flows with smooth wavelike surface had been given.

ВСТУП

Білякритичними течіями називаються безнапірні потоки рідини, усталені з різко змінним рухом і глибинами, близькими до критичної, а також неусталені потоки (хвилі переміщення) з швидко змінним рухом і швидкостями, близькими до критичної [1]. Критичні глибину h_k і швидкість c_k для умов плоскої задачі визначають відповідно такими відомими залежностями:

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}, \quad (1)$$

$$c_k = \sqrt{gh_1}, \quad (2)$$

де α – коефіцієнт Коріоліса; q – питома витрата; g – прискорення вільного падіння; h – глибина незбуреного потоку.

Білякритичні течії мають ряд характерних особливостей, які істотно відрізняють ці течії від звичайних спокійних та бурхливих потоків з плавним або повільно змінним рухом [1–3]. Досить часто вільна поверхня білякритичних течій має хвилеподібний характер, причому висота таких хвиль

іноді більш, ніж на 80 % перевищує їх середню висоту [4]. Внаслідок цього при проектуванні різних типів гідротехнічних споруд, працюючих в умовах утворення білякритичних течій, одним з центральних є питання про розрахунок профілю вільної поверхні потоку, бо без знання такого профілю не можна визначити інші характеристики таких течій [5–7].

Питання про розрахунки білякритичних хвиль набуло особливого значення в 60–70-ті роки нинішнього століття, коли виявилось, що рівняння Кортвега-де Фріса (КдФ), що описує такі хвилі, має універсальний характер в природі й крім довгих хвиль на мілкій воді, саме для яких воно було виведено, описує ще й магнітогідродинамічні та іоннозвуківі хвилі в плазмі, хвилі тиску в газорідних системах, нелінійні взаємодії атомів в решітці, поздовжні хвилі в пружних стержнях, цунами та ін. [8–12]. Саме через ці явища, які описуються рівнянням КдФ та подібними йому, стали предметом вивчення таких галузей науки як гідравліка, гідромеханіка, гідротехнічні споруди, математика, фізика, солітоніка та ін. Кожна з цих галузей науки досягла вагомих результатів при вивченні своїх специфічних питань, пов'язаних з рівнянням КдФ. Проте ці результати далеко не

завжди узгоджуються між собою. Так, гідравлічні умови існування самотньої хвилі (гідравлічного солітону) та кноїдальних хвиль не повністю відповідають аналогічним умовам, отриманим в інших галузях науки (див. нижче).

В той же час гідравліка накопичила величезний фактичний матеріал, який може бути використаний не тільки для вирішення конкретних гідравлічних задач, а й в якості об'єктивного критерію при оцінці достовірності результатів різноманітних теоретичних досліджень, проведених в інших галузях науки. Крім того, експериментальний гідравлічний спосіб вивчення білякритичних хвиль на воді дає простий, доступний і наочний метод вивчення явищ, описуваних рівнянням КдФ, шляхом фізичного моделювання цих явищ на гідравлічній моделі з використанням нерухомих та рухомих хвиль на воді. До сказаного треба додати, що рівняння КдФ взагалі вважається модельним рівнянням при вивченні нелінійних хвиль в середовищах з дисперсією, описуваних різними нелінійними рівняннями в частинних похідних [11].

Мета даної роботи полягає в наступному:

1) розглянути з єдиних позицій отримані в різних галузях науки результати по вивченню різноманітних явищ, описуваних рівнянням КдФ та іншими, стосовно випадку усталених і перманентних білякритичних хвиль на воді;

2) дати аналіз існуючих диференціальних рівнянь профілю вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій та використовуваних розв'язків цих рівнянь;

3) вивести диференціальне рівняння профілю вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій та знайти його відповідні розв'язки, в яких би вільна поверхня визначалася в явному вигляді параметрами потоку в початковому перерізі розглядуваних течій;

4) на основі виведеного диференціального рівняння та його розв'язків уточнити гідравлічні умови існування самотньої і кноїдальних хвиль;

5) вдосконалити методику експериментальних гідравлічних досліджень нерухомих хвилеподібних білякритичних течій, описуваних рівнянням КдФ, яка б дала можливість перевірити результати проведених теоретичних досліджень, а також отримати необхідний фактичний матеріал для наступного можливого використання при розгляді інших фізичних явищ, описуваних тим же рівнянням КдФ.

В даній роботі розглядаються білякритичні течії у вигляді лише усталених потоків та перманентних хвиль переміщення на гладкому плоскому дні (без донних перешкод) з невеликим поз-

довжнім похилом стосовно умов плоскої задачі. Як відомо [3, 11, 13], перманентними (стаціонарними, квазіусталеними) називаються хвилі переміщення, що рухаються з постійною швидкістю і незмінним профілем, внаслідок чого в системі координат, яка рухається з тією ж швидкістю і в тому ж напрямку, що і лоб хвилі переміщення, такі хвилі виглядають усталеними.

1. АНАЛІЗ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ ХВИЛЕПОДІБНИХ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ ТА РОЗВ'ЯЗКІВ ЦИХ РІВНЯНЬ

Для описання профілю вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій стосовно умов плоскої задачі використовують ряд диференціальних рівнянь, виведених на основі різних вихідних схем. До числа таких рівнянь можна віднести наступні:

а) Кортвега–де Фріса [14]

$$\frac{\partial h}{\partial t} - K_1 h \frac{\partial h}{\partial x} - K_2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0, \quad (3)$$

б) Серра [15], виражене через питому енергію потоку E ,

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{6g}{q^2} \left(-\frac{h^3}{2} + Eh^2 + C_1 h + \frac{q^2}{2g}\right), \quad (4)$$

в) Серра [15], виражене через функцію імпульсу M ,

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3g}{q^2} \left(-\frac{h^3}{2} + C_2 h^2 - Mh + \frac{q^2}{2g}\right), \quad (5)$$

г) Сміслова [16]

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3g}{q^2} \left(-\frac{2}{3}h^3 + Eh^2 - \frac{q^2}{g} \ln h + C_3\right), \quad (6)$$

де h – глибина; x – поздовжня координата; t – час; q – питома витрата; g – прискорення вільного падіння; K_1, K_2 – деякі коефіцієнти; C_1, C_2, C_3 – постійні інтегрування.

В даній роботі ми не наводимо більш загальне диференціальне рівняння Буссінеска [17], яке описує розповсюдження хвиль не в одному, а в двох напрямках одночасно (як вправо, так і вліво від джерела збурення), і яке для відповідних умов можна звести до рівняння КдФ, а також узагальнене диференціальне рівняння Селезова [18], з якого для відповідних умов можна вивести диференціальні рівняння Буссінеска, КдФ, Перегріна та ін. Розгляд цих рівнянь виходить за рамки даної статті.

Рівняння КдФ (3), яке відноситься до рівнянь еволюційного типу і описує розглядуване явище в розвитку, для випадків усталеного та перманентного рухів, так само, як і рівняння (4)–(6), можна виразити за допомогою кубічного поліному [10]:

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{1}{3\delta} (-h^3 + 3Ch^2 + 6Ah + 6B), \quad (7)$$

де δ, A, B, C – деякі коефіцієнти, значення яких будуть визначені нижче.

Рівняння Серра (4) і Смилова (6) виведені практично для одних і тих же вихідних умов, причому залежність (6) отримана на три роки раніше, ніж залежність (4) [16]. Але внаслідок близькості отримуваних результатів і певних переваг рівняння (4) над рівнянням (6) (врахування нахилу елементарних струминок, більш висока точність, відсутність члена з логарифмом) ми, так само, як і В.В. Смилов [16], з двох порівнюваних формул перевагу віддаємо залежності (4), а наступний аналіз будемо вести тільки для рівнянь (4), (5), (7).

Не дивлячись на те, що диференціальні рівняння (3)–(5) отримані різними авторами на основі різних вихідних схем, як не дивно, їх кінцеві розв'язки для випадків усталеного та перманентного рухів мають однаковий вигляд і зводяться до відомих формул профілю самотньої та кноїдальних хвиль [8–15]. Для прийнятого положення координатних осей профіль кноїдальних хвиль (рис. 1, а) описується залежністю

$$h = h_1 + (h_b - h_1)cn^2\left(\frac{x}{\Delta}, k\right), \quad (8)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{4h_b h_1 p}{3(h_b - p)}}, \quad k^2 = \frac{h_b - h_1}{h_b - p}, \quad p = \frac{c_c^2 h_c^2}{gh_b h_1}, \quad (9)$$

(тут c_c і h_c – відповідно середні швидкість та глибина), а профіль самотньої хвилі (рис. 1, б) – такою залежністю:

$$h = h_1 + (h_b - h_1) \operatorname{sch}^2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{\frac{3g}{q^2} (h_b - h_1)} \right]. \quad (10)$$

Білякритичні течії часто характеризують числом Фруда в їх початковому перерізі, яке відповідно для усталених потоків і перманентних хвиль переміщення записують таким чином:

$$\operatorname{Fr}_1 = \frac{V_1^2}{gh_1}, \quad (11)$$

$$\operatorname{Fr}_1 = \frac{c^2}{gh_1}, \quad (12)$$

де V_1 – швидкість потоку у вказаному перерізі; c – швидкість руху лобу хвилі переміщення.

Для випадку самотньої хвилі, в початковому перерізі якої спостерігається гідростатичний закон розподілу тиску по глибині, а число Фруда $\operatorname{Fr}_1 > 1$, формулу (10) можна дещо перетворити за допомогою формули Рассела – Буссінеска:

$$\frac{h_b}{h_1} = \operatorname{Fr}_1 \quad (13)$$

і записати таким чином:

$$h = h_1 + h_1 (\operatorname{Fr}_1 - 1) \operatorname{sch}^2 \left[\frac{x}{2h_1} \sqrt{\frac{3(\operatorname{Fr}_1 - 1)}{\operatorname{Fr}_1}} \right]. \quad (14)$$

На підставі проведеного аналізу можна зформулювати такі недоліки диференціальних рівнянь профілю вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій (4)–(7) та їх відповідних розв'язків (8), (10), (14):

1. В залежності (4)–(7) входить ряд величин ($E, M, C_1, C_2, C_3, A, B, C$), які для криволінійного в вертикальній площині потоку визначати досить непросто. Через це деякі із вказаних величин знаходять для умовного перерізу, яке розміщується на нескінченності, а рух в якому є паралельноструминним, внаслідок чого похідні dh/dx та d^2h/dx^2 дорівнюють нулю. Але для тих типів нерухомих білякритичних хвиль, в початковому перерізі яких спостерігається негідростатичний закон розподілу тиску по глибині, такого перерізу з паралельноструминним рухом в дійсності взагалі не існує, внаслідок чого знайдені величини є нереальними і їх не можна ні визначити, ні перевірити в умовах фізичного експерименту.

2. Розв'язки диференціальних рівнянь (4), (5), (7) у вигляді залежностей (8) і (10) не можна визнати повними і доведеними до кінця, тому що профіль вільної поверхні в них виражено через корені відповідних кубічних поліномів h_b, h_1, p , серед яких лише початкова глибина може вважатися заданою, а два інші корені h_b та p – невідомі. Тут необхідно підкреслити, що сказане не відноситься до формули (14).

3. Відомості про умови існування кноїдальних хвиль, описуваних залежністю (8), досить суперечливі. Деякі автори [3, 19, 20] вважають, що такі хвилі можуть утворюватись лише в спокійних потоках, тобто при виконанні умови

$$\operatorname{Fr}_1 < 1. \quad (15)$$

Інші приходять до висновку, що кноїдальні хвилі можуть утворюватись як у спокійних ($\operatorname{Fr}_1 < 1$),

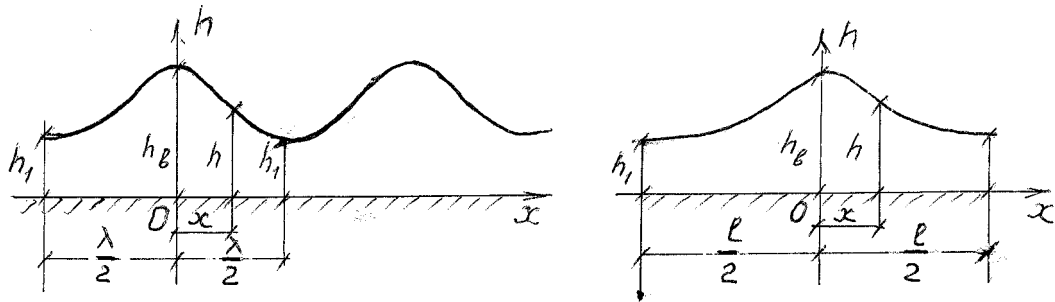


Рис. 1. Теоретичні профілі білякритичних течій:
а – кноїдальних хвиль, б – самотньої хвилі

так і в бурхливих ($Fr_1 > 1$) потоках, тобто для існування таких хвиль умова (15) не обов'язкова [21, 22]. В роботі [23] показано, що умови існування кноїдальних хвиль, крім числа Fr_1 , залежать ще й від ступеня викривлення потоку в початковому перерізі, тобто ступеня відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску по глибині у вказаному перерізі.

4. Накопичена інформація про умови існування самотньої хвилі також дуже суперечлива. Загальноприйнятою вважається точка зору, що самотня хвиля утворюється лише в бурхливих потоках [3, 13, 19, 20], тобто при виконанні умови

$$Fr_1 > 1. \quad (16)$$

Але до цих пір не встановлено, чи є ця умова не тільки необхідною, але й достатньою. Справа у тому, що багато вчених вважають, що самотня хвиля – це граничний випадок кноїдальної хвилі, довжина якої прямує до нескінченності [9, 12, 24]. Значить при виконанні певних умов формула (10) повинна виводитись з залежності (8). Але при виконанні тільки однієї умови (16) перетворити вираз (8) в формулу (10) не вдається.

Крім того, проведені автором експерименти (див. нижче) свідчать про існування в природі, при наявності відповідних умов, кількох явищ у вигляді одиночної хвилі на воді, які якісно відрізняються між собою (число Фруда Fr_1 може бути меншим, рівним та більшим одиниці; в початковому перерізі може бути як гідростатичний, так і негідростатичний розподіл тиску по глибині). Які (чи яке) з цих явищ можна класифікувати як солітон? Чи достатньо знання лише тільки одного числа Фруда Fr_1 для оцінки умов існування самотньої хвилі?

До сказаного додамо, що в роботі [25] показано, що на умови існування нерухомої одиночної хвилі істотно впливає ступінь викривлення потоку в її початковому перерізі.

5. Не розкрито причина, чому зовсім різні диференціальні рівняння Кортвега–де Фріса (3) та Серра (4) і (5) для випадків нерухомих хвиль та перманентних хвиль переміщення мають одні й ті самі розв'язки (8) і (10). Також неясно, чому умови існування одних і тих же розв'язків (8) і (10) у різних авторів принципово відрізняються між собою. Чи причиною такої невідповідності є різні вихідні диференціальні рівняння, чи вона є наслідком різних способів математичного розв'язування даної задачі?

6. В залежностях (3)–(10) не фігурує якийсь-небудь параметр, який би в явному вигляді враховував ступінь викривлення потоку в початковому перерізі білякритичних течій (тобто ступінь відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску по глибині), хоча таке викривлення досить часто спостерігається у багатьох типів усталених білякритичних течій, причому деякі з них можуть існувати в природі лише у випадку, коли в їх початковому перерізі потік є вигнутим.

2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ХВИЛЕПОДІБНИХ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ

Побудова достовірної математичної моделі хвильового руху рідини – надзвичайно складна проблема. В даний час існує не менше 12 прийнятих моделей такого роду, які наближено описують певний клас хвиль [26]. Досліджувані білякритичні течії мають свої специфічні особливості [1], які необхід-

но враховувати при розгляді даного питання.

Для побудови математичної моделі хвилеподібних біякритичних течій, за допомогою якої можна було б усунути вищевказані недоліки згаданих диференціальних рівнянь та їх розв'язків, в якості вихідних використаємо відомі залежності Серра [15] для питомої енергії перерізу E та функції імпульсу (стрижкової функції) M , виведені з диференціального рівняння руху рідини Ейлера, в яких враховується як нахил, так і викривлення потоку в вертикальній площині (див. перші формули в системах рівнянь (17) і (18)). Розрахункові перерізи біякритичних течій виберемо таким чином: 0-0 – на нескінченності, де рух є паралельноструминним, 1-1 – в початковому перерізі розглядуваних явищ, тобто в перерізі з першою спряженою глибиною, 2-2 – в перерізі з другою спряженою глибиною [27], 3-3 – по вершині першої хвилі (рис. 2).

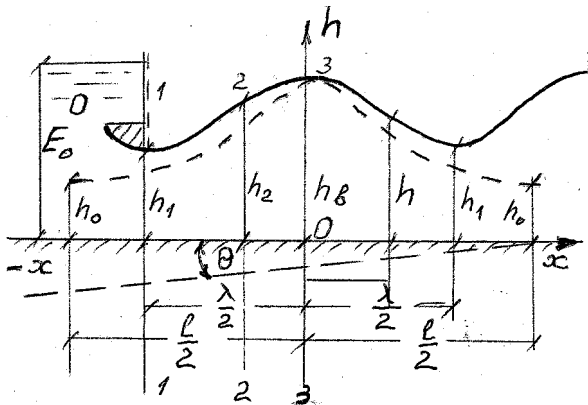


Рис. 2. Розрахункова схема хвилеподібних біякритичних течій

Математична постановка задачі може бути сформульована або через питому енергію E :

$$\left. \begin{aligned} E &= h + \frac{q^2}{2gh^2} + \frac{q^2}{3gh} \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{q^2}{6gh^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2, \\ \frac{dE}{dx} &= i - \frac{q^2}{C^2 h^3}, \\ \frac{dq}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} (17)$$

або через функцію імпульсу M :

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{h^2}{2} + \frac{q^2}{gh} + \frac{q^2}{3g} \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{q^2}{3gh} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2, \\ \frac{dM}{dx} &= ih - \frac{q^2}{C^2 h^2}, \\ \frac{dq}{dx} &= 0, \end{aligned} \right\} (18)$$

де C – коефіцієнт Шезі; $i = \sin \theta$ – похил дна [15, 28, 29].

Граничні умови для вибраної схеми досліджуваних явищ і вказаного на рис. 1 і 2 положення координатних осей визначаються таким чином:

$$\left. \begin{aligned} a) x = 0, h = h_b, \frac{dh}{dx} = 0, \\ \frac{d^2h}{dx^2} < 0, E = E_b, M = M_b; \\ б) x = \frac{\lambda}{2}, h = h_1, \frac{dh}{dx} = 0, \\ \frac{d^2h}{dx^2} > 0, E = E_1, M = M_1; \\ в) x = \infty, h = h_0, \frac{dh}{dx} = 0, \\ \frac{d^2h}{dx^2} = 0, E = E_0, M = M_0. \end{aligned} \right\} (19)$$

Індекси "0", "1", "b" тут і далі означають, що використані величини взяті відповідно для перерізів 0-0, 1-1, 3-3.

3. ВИВЕДЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ УСТАЛЕНИХ І ПЕРМАНЕНТНИХ ХВИЛЕПОДІБНИХ БІЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ

Виведення шуканого диференціального рівняння спочатку здійснимо з системи (17), складеної на основі питомої енергії E . Складність питання полягає в тому, що виконувати необхідні математичні перетворення з використаним виразом $E(h)$, який має і першу, і другу похідні, досить непросто. Але в даному випадку вдасться позбавитися члена з другою похідною за допомогою наступного прийому [15, 16, 28].

Перепишемо перше рівняння системи (17) таким чином:

$$\frac{q^2}{6g} \left[\frac{2}{h} \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{1}{h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] = E - h - \frac{q^2}{2gh^2}. \quad (20)$$

Вираз у квадратних дужках цієї залежності можна записати так:

$$\left[\frac{2}{h} \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{1}{h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] = \frac{d}{dh} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]. \quad (21)$$

І дійсно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] &= \frac{dx}{dh} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{dx}{dh} \left[-\frac{1}{h^2} \frac{dh}{dx} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{1}{h} 2 \frac{dh}{dx} \frac{d^2h}{dx^2} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{1}{h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2.$$

З врахуванням рівності (21) залежність (20) можна записати так:

$$\frac{q^2}{6g} \frac{d}{dh} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] = E - h - \frac{q^2}{2gh^2}. \quad (22)$$

Проінтегрувавши цей вираз, вважаючи $E = \text{const}$, $i = 0$, отримаємо вже відоме диференціальне рівняння Серра (4).

Для вибраної схеми розглядуваних явищ (див. рис. 2) значення довільної сталої інтегрування та питомої енергії визначимо для початкового перерізу 1–1, де в загальному випадку потік є криволінійним, а згідно з визначенням першої спряженої глибини [27] похідна $dh/dx = 0$. В такому випадку з виразу (4) отримуємо

$$C_1 = -Eh_1 + \frac{h_1^2}{2} - \frac{q^2}{2gh_1}. \quad (23)$$

У відповідності з [30] для потоку, викривленого у вертикальній площині, можна записати

$$E = E_1 = \beta_1 h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2}, \quad (24)$$

де β – коефіцієнт потенціальної енергії, який являє собою відношення питомої потенціальної енергії потоку відносно дна до глибини в даному перерізі.

Підставивши отримані значення C_1 і E в залежність (4) і зробивши необхідні перетворення, отримаємо узагальнене диференціальне рівняння профілю вільної поверхні усталених і перманентних хвилеподібних білякритичних течій:

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{3g}{q^2} \left\{ -h^3 + \left(2\beta_1 h_1 + \frac{q^2}{gh_1^2} \right) h^2 - \left[\left(2\beta_1 - 1 \right) h_1^2 + \frac{2q^2}{gh_1} \right] h + \frac{q^2}{g} \right\}. \quad (25)$$

Домноживши і поділивши праву частину рівняння (25) на h_1^3 , отримаємо його запис у безрозмірній формі:

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{3}{Fr_1} \left[- \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 + (2\beta_1 + Fr_1) \left(\frac{h}{h_1} \right)^2 - (2\beta_1 - 1 + 2Fr_1) \frac{h}{h_1} + Fr_1 \right]. \quad (26)$$

Аналогічним чином рівняння (25) можна вивести також із системи (18) при $M = \text{const}$, $i = 0$,

визначивши відповідні значення сталої інтегрування C_2 та функції імпульсу M для перерізу 1–1:

$$C_2 = \frac{M}{h_1} + \frac{h_1}{2} - \frac{q^2}{2gh_1^2}, \quad (27)$$

$$M = M_1 = k_1 \frac{h_1^2}{2} + \frac{q^2}{gh_1}, \quad (28)$$

де k_1 – коефіцієнт гідродинамічного тиску, який являє собою відношення площі епюри тиску потоку, викривленого у вертикальній площині, до площі епюри гідростатичного тиску в даному перерізі [27]. Зауважимо, що коефіцієнти β_1 і k_1 зв'язані між собою таким співвідношенням:

$$\beta_1 = \frac{1 + k_1}{2}. \quad (29)$$

Коефіцієнти β_1 і k_1 зручно знаходити через коефіцієнт негідростатичності за допомогою наступних формул, справедливих для параболічного закону розподілу тиску по глибині [27]:

$$\beta_1 = \frac{1 + 2s_1}{3}, \quad (30)$$

$$k_1 = \frac{4s_1 - 1}{3}. \quad (31)$$

Коефіцієнт негідростатичності s_1 являє собою відношення тиску на дні, вираженого у висоті водного стовпа, до глибини потоку в вибраному перерізі й цей коефіцієнт досить легко визначити експериментальним шляхом. Слід пам'ятати, що для гідростатичного закону розподілу тиску коефіцієнти β_1 , h_1 , s_1 дорівнюють одиниці.

4. ІНТЕГРУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ УСТАЛЕНИХ І ПЕРМАНЕНТНИХ ХВИЛЕПОДІБНИХ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ

Загального розв'язку для диференціальних рівнянь типу (25) поки що не отримано [31, 32], але в даному випадку задачу можна дещо спростити, тому що вдається знайти корені h_b , h_1 , h_o кубічного поліному в фігурних дужках залежності (25) і записати це рівняння в наступному вигляді:

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{3g}{q^2} (h_b - h) (h - h_1) (h - h_o). \quad (32)$$

При цьому згадані корені зв'язані між собою такими залежностями:

$$h_b = \frac{h_1}{2} \left[k_1 + Fr_1 + \sqrt{(k_1 + Fr_1)^2 - 4Fr_1} \right], \quad (33)$$

$$h_0 = \frac{h_1}{2} \left[k_1 + Fr_1 - \sqrt{(k_1 + Fr_1)^2 - 4Fr_1} \right], \quad (34)$$

$$h_b h_1 h_0 = \frac{q^2}{g}. \quad (35)$$

Для інтегрування рівняння (32) використаємо, подібно [28, 33], наступну підстановку:

$$h = h_b \cos^2 \chi + h_1 \sin^2 \chi, \quad (36)$$

за допомогою якої ліву частину залежності (32) перетворимо таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= \frac{dh}{d\chi} \frac{d\chi}{dx} = (-h_b 2 \cos \chi \sin \chi + \\ &+ h_1 2 \sin \chi \cos \chi) \frac{d\chi}{dx} = (h_1 - h_b) \sin 2\chi \frac{d\chi}{dx} \end{aligned} \quad (37)$$

або

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = (h_1 - h_b)^2 \sin^2 2\chi \frac{d\chi}{dx}. \quad (38)$$

Відповідно праву частину рівняння (32) перетворимо так:

$$\begin{aligned} &\frac{3g}{q^2} (h_1 - h_b) \sin^2 \chi (h_1 - h_b) \cos^2 \chi \times \\ &\times \left[h_b (1 - \sin^2 \chi) + h_1 \sin^2 \chi - \frac{q^2}{gh_1 h_b} \right] = \\ &= \frac{3g}{4q^2} (h_1 - h_b)^2 \sin^2 2\chi \left(h_b - \frac{q^2}{gh_1 h_b} \right) \times \\ &\times \left(1 - \frac{h_b - h_1}{h_b - \frac{q^2}{gh_1 h_b}} \sin^2 \chi \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Прирівнявши вирази (38) і (39), отримаємо

$$\begin{aligned} dx &= \frac{d\chi}{\frac{\sqrt{3g}}{2q} \sqrt{h_b - \frac{q^2}{gh_1 h_b}}} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h_b - h_1}{h_b - \frac{q^2}{gh_1 h_b}} \sin^2 \chi}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Позначивши

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2q}{\sqrt{3g \left(h_b - \frac{q^2}{gh_1 h_b} \right)}}, \\ k^2 &= \frac{h_b - h_1}{h_b - \frac{q^2}{gh_1 h_b}}, \end{aligned} \quad (41)$$

в результаті інтегрування для вибраного положення системи координат приходимо до виразу

$$x = \Delta \int_0^\chi \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}} = \Delta F(\chi, k), \quad (42)$$

де $F(\xi, k)$ – нормальний еліптичний інтеграл Лежандра першого роду, який визначають за допомогою еліптичних функцій Якобі [31, 32]

$$\operatorname{sn}\{am[F(\chi, k)]\} = \operatorname{sn}\left(\frac{x}{\Delta}, k\right) = \sin \chi, \quad (43)$$

$$\operatorname{cn}\{am[F(\chi, k)]\} = \operatorname{cn}\left(\frac{x}{\Delta}, k\right) = \cos \chi. \quad (44)$$

Підставивши вирази (43) і (44) в залежність (36) та позначивши $h_b = h_b/h_1$, після необхідних перетворень отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (25) у вигляді наступної системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} h &= h_1 \left[1 + (\eta_b - 1) \operatorname{cn}^2 \left(\frac{x}{\Delta}, k \right) \right], \\ \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{2h_1} \sqrt{\frac{3(\eta_b^2 - Fr_1)}{\eta_b Fr_1}}, \\ k &= \sqrt{\frac{\eta_b(\eta_b - 1)}{\eta_b^2 - Fr_1}}, \\ \eta_b &= \frac{1}{2} \left[\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 + \right. \\ &\left. + \sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 \right)^2 - 4Fr_1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Розглянемо, який вигляд матимуть диференціальні рівняння (25) та (26) і їх загальний розв'язок (45) для дуже важливого в теоретичному і практичному відношенні частинного випадку наявності гідростатичного розподілу тиску в початковому перерізі хвилеподібних білякритичних течій, тобто коли

$$s_1 = 1. \quad (46)$$

Тут необхідно спеціально зупинитись на такому питанні. На перший погляд, досить проста умова (46) в гідравлічному відношенні виявляється зовсім не простою. Щоб розібратися в цьому питанні, скористаємось формулою (47) спряжених глибин білякритичних течій [27]:

$$\begin{aligned} \frac{h_2}{h_1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4s_1 - 1}{3} + 2\alpha_{01} Fr_1 - T} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{3} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{3\sqrt{3}\alpha_{02} Fr_1}{\sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + 2\alpha_{01} Fr_1 - T \right)^3}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

де α_{o1} і α_{o2} – коефіцієнти кількості руху відповідно в перерізах з першою і другою спряженими глибинами; T – безрозмірна сила тертя по дну. Аналіз цієї залежності показує (особливо наочно це видно з рис. 3, а цитованої роботи, побудованого при $\alpha_{o1} = \alpha_{o2} = 1.0$ і $T = 0$), що умова (46) для зазначеного випадку автоматично вимагає ще й додаткової умови

$$\text{Fr}_1 > 1, \quad (48)$$

без якої фізично неможлива реалізація умови (46).

При виконанні умов (46) та (48) рівняння (25) і (26) приймають відповідно такий вигляд:

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3g}{q^2} \left[-h^3 + \left(2h_1 + \frac{q^2}{2h_1^2}\right)h^2 - \left(h_1^2 + \frac{2q^2}{gh_1}\right)h + \frac{q^2}{g} \right], \quad (49)$$

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3}{\text{Fr}_1} \left[-\left(\frac{h}{h_1}\right)^3 + (2 + \text{Fr}_1)\left(\frac{h}{h_1}\right)^2 - (1 + 2\text{Fr}_1)\frac{h}{h_1} + \text{Fr}_1 \right], \quad (50)$$

а їх загальний розв'язок – система (45) істотно спрощується. Для зазначеного випадку складові рівняння системи (45) набувають наступний вигляд:

$$\eta_b = \text{Fr}_1, \quad (51)$$

$$k = 1, \quad (52)$$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2h_1} \sqrt{\frac{3(\text{Fr}_1 - 1)}{\text{Fr}_1}}. \quad (53)$$

Крім того, при модулі $k = 1$ еліптичний косинус вироджується в гіперболічний секанс [31, 32]:

$$\text{cn}\left(\frac{x}{\Delta}, 1\right) = \text{sch}\frac{x}{\Delta}, \quad (54)$$

внаслідок чого система (45) зводиться до однієї-єдиної залежності:

$$h = h_1 \left[1 + (\text{Fr}_1 - 1) \text{sch}^2 \frac{x}{2h_1} \sqrt{\frac{3(\text{Fr}_1 - 1)}{\text{Fr}_1}} \right]. \quad (55)$$

Це і є знаменитий солітонний розв'язок рівняння Кортевега–де Фріса (3), використовуваний в багатьох галузях науки і техніки для описання різноманітних явищ, в тому числі й самотньої хвилі на воді.

Виведене диференціальне рівняння (25) є загальним для всіх типів усталених та перманентних

білякритичних течій з гладкою хвилеподібною поверхнею (див. [1]), причому в їх початковому перерізі може бути як негідростатичний ($s_1 > 1$), так і гідростатичний ($s_1 = 1$) розподіл тиску по глибині. Крім того, як це буде показано в наступному розділі, для вказаних типів явищ при зазначених граничних умовах до рівняння (25) зводяться також диференціальні рівняння КдФ (3) та Серра (4) і (5). Враховуючи ці обставини, диференціальне рівняння (25) можна назвати узагальненим.

Рівняння (25) та його загальний (45) і солітонний (55) розв'язки позбавлені недоліків, указаних в першому розділі. В них немає невизначених величин, а профіль вільної поверхні однозначно визначається параметрами потоку в початковому перерізі розглядуваних явищ – h_1, s_1, Fr_1 .

Необхідно підкреслити, що самотня хвиля (гідралічний солітон), описувана формулою (55), це також кноїдальна хвиля (хоч і її частинний випадок), бо відповідає загальному розв'язку (45). Через це не можна протиставляти ці хвилі одну одній так, як це роблять деякі автори [34], зображуючи кноїдальні хвилі в якості хвиль коливального типу, а самотню хвилю – як приклад хвиль переміщення.

5. ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ УСТАЛЕНИХ І ПЕРМАНЕНТНИХ ХВИЛЕПОДІБНИХ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ

Отримані в третьому розділі результати, а також дані інших авторів [19, 28] свідчать про те, що диференціальні рівняння Серра (4) і (5), виведені для різних вихідних схем, приводять до одних і тих же результатів. В цьому немає нічого дивного, адже сам Ф. Серр показав, що його диференціальні рівняння (4) і (5) по суті описують одну і ту ж закономірність і є двома формами запису цієї закономірності [15]. При цьому питома енергія E та функція імпульсу M , виражені першими рівняннями систем (17) і (18), зв'язані між собою співвідношенням

$$\frac{dM}{dx} = h \frac{dE}{dx}. \quad (56)$$

Виведене диференціальне рівняння (25) безпосередньо ґрунтується на рівняннях Серра (4) і (5), через що їх взаємозв'язок очевидний, а для одних і тих же граничних умов самі рівняння (4), (5) і (25) та їхні відповідні розв'язки є тотожними.

Співставимо тепер рівняння (25) з диференціальним рівнянням КдФ для усталеного і перманентного рухів в формі (7). Значення коефіцієнтів можна виразити через корені α, β, γ поліному в дужках правої частини рівняння (7) таким чином [10]:

$$A = -\frac{1}{6}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha), \quad (57)$$

$$B = \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma, \quad (58)$$

$$C = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma), \quad (59)$$

причому в загальному випадку дійсне співвідношення

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma. \quad (60)$$

Внаслідок однаковості структури порівнюваних диференціальних рівнянь (7) і (25) для доказу їх тотожності потрібно довести тотожність відповідних пар коефіцієнтів. Вважаючи $\alpha = h_b, \beta = h_1, \gamma = h_o$ і підставивши вирази (33) і (34) в залежність (57)–(59), отримаємо:

$$6A = -\left[(2\beta_1 - 1)h_1^2 + \frac{2q^2}{gh_1}\right], \quad (61)$$

$$6B = \frac{q^2}{g}, \quad (62)$$

$$3C = 2\beta_1 h_1 + \frac{q^2}{gh_1^2}. \quad (63)$$

Для визначення значення коефіцієнта $1/3\delta$ в правій частині рівняння (7) запишемо це рівняння в формі, використаній Г. Ламбом [33]:

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3g}{c_c^2 h_c^2} (h_b - h)(h - h_1)(h - p). \quad (64)$$

де c_c і h_c – відповідно середні швидкість і глибина. Приймаючи для усталеного руху і умов плоскої задачі $c_c = q/h_c$, отримаємо

$$\frac{1}{3\delta} = \frac{3g}{q^2}. \quad (65)$$

На основі доведених рівностей (61) – (63), (65) можна зробити висновок, що порівнювані диференціальні рівняння (7) і (25) тотожні.

Таким чином, диференціальні рівняння Кортвега – де Фріса (3) та Серра (4) і (5) для усталеного і перманентного рухів і вибраних граничних умов зводяться до узагальненого рівняння (25), тобто є тотожними.

6. УМОВИ ІСНУВАННЯ САМОТНОЇ ТА КНОЇДАЛЬНИХ ХВИЛЬ

Із доведеного в попередньому розділі положення про тотожність для зазначеного випадку диференціальних рівнянь КдФ (3), Серра (4), (5) та узагальненого (25) впливає надзвичайно важливий в теоретичному і практичному відношенні висновок про те, що розв'язки усіх перерахованих рівнянь, а також умови існування цих розв'язків для вказаного випадку повинні бути однаковими незалежно від способу розв'язку даної задачі. Проте, як це вже згадувалось в першому розділі, отримані різними авторами відомості про умови існування самотньої та кноїдальних хвиль досить суперечливі. Розглянемо це питання більш докладно з урахуванням результатів, отриманих в даній статті.

Звичайно вважається, що гідравлічні умови існування самотньої та кноїдальних хвиль на воді однозначно виражаються числом Фруда, яке найчастіше знаходять для початкового перерізу розглядуваних явищ, хоча нерідко для вказаної мети використовують це число, записане і для інших характерних перерізів [3, 28, 35]. Досить детально існуючі погляди в цьому питанні висвітлені в роботах [23, 25], в яких, крім того, показано, що ні умови існування, ні основні характеристики вказаних явищ не можна однозначно виразити тільки одним числом Фруда Fr_1 , а крім нього необхідно враховувати ще й ступінь викривлення та розходження елементарних струминок, яку зручно оцінювати за допомогою коефіцієнта негідростатичності s_1 .

Досить показовими в цьому відношенні є дослідження з кноїдальними хвилями, показані на рис. 3 роботи [23], в яких на одній і тій же установці при одних і тих же значеннях витрати Q , початкової глибини h_1 та числа Фруда Fr_1 внаслідок різного ступеня викривлення потоку (тобто при різних значеннях коефіцієнта s_1) геометричні характеристики досліджуваних явищ, а іноді навіть і їх тип, були різними.

З математичної точки зору умови існування самотньої та кноїдальних хвиль знаходяться як певні математичні обмеження, що виникають при виведенні та інтегруванні відповідних диференціальних рівнянь. Отримане диференціальне рівняння (25) та його загальний розв'язок (45), в яких профіль вільної поверхні однозначно виражається параметрами потоку в початковому перерізі розглядуваних явищ з урахуванням можливого відхилення від гідростатичного розподілу тиску по глибині в зазначеному перерізі, дають прекрасну можливість розглянути це питання з нових позицій і визначити умови існування самотньої та

кноїдальних хвиль в залежності не тільки від числа Фруда, а ще й з урахуванням ступеню відхилення від гідростатичного розподілу тиску в їх початковому перерізі.

Математичні умови існування кноїдальних хвиль як загального розв'язку (45) диференціального рівняння (25), визначаються межами існування модуля еліптичних функцій Якобі:

$$k = 0 \dots - 1. \quad (66)$$

Тут необхідно підкреслити, що для хвиль на воді модуль k для загального випадку, як це впливає з системи рівнянь (45), можна однозначно виразити через параметри потоку в початковому перерізі 1-1 розглядуваних явищ – число Фруда Fr_1 та коефіцієнт негідростатичності s_1 , тобто

$$k = f(Fr_1, s_1). \quad (67)$$

Підставивши нижнє значення модуля $k = 0$ в формулу (41), отримаємо таку умову:

$$k = \frac{h_b - h_1}{h_b - \frac{q^2}{gh_1 h_b}} = \frac{\eta_b (\eta_b - 1)}{\eta_b^2 - Fr_1} \geq 0. \quad (68)$$

Так як чисельник цього виразу не може бути від'ємним, то і знаменник також не може бути від'ємним, тобто

$$\eta_b^2 - Fr_1 \geq 0, \quad (69)$$

звідки впливає наступна умова:

$$Fr_1 \leq \eta_b^2. \quad (70)$$

Підставивши в залежність (69) значення η_b , отримане з формули (33), знайдемо

$$\sqrt{Fr_1} \leq \frac{1}{2} \left[k_1 + Fr_1 + \sqrt{(k_1 + Fr_1)^2 - 4Fr_1} \right]. \quad (71)$$

Після нескладних перетворень отримаємо таку умову, виражену через коефіцієнт гідродинамічного тиску в перерізі 1-1:

$$k_1 \geq (2 - \sqrt{Fr_1}) \sqrt{Fr_1}. \quad (72)$$

Враховуючи, що в початковому перерізі досліджуваних явищ коефіцієнт гідродинамічного тиску $k_1 \geq 1$, на основі елементарних підрахунків можна встановити, що умова (72) виконується для всіх значень числа Фруда Fr_1 в області існування білякритичних течій, яку можна охарактеризувати таким чином [1]:

$$Fr_1 = 0.3 - 4.0. \quad (73)$$

Підставивши верхнє значення модуля $k = 1$ в залежність (41), отримаємо таку умову:

$$k = \frac{h_b - h_1}{h_b - \frac{q^2}{gh_1 h_b}} = \frac{\eta_b (\eta_b - 1)}{\eta_b^2 - Fr_1} \leq 1, \quad (74)$$

переписавши яку у вигляді

$$\eta_b^2 - \eta_b \leq \eta_b^2 - Fr_1, \quad (75)$$

знайдемо наступну умову

$$Fr_1 \leq \eta_b. \quad (76)$$

Тепер підставимо в залежність (76) значення η_b , визначене за формулою (33):

$$Fr_1 \leq \frac{1}{2} \left[k_1 + Fr_1 + \sqrt{(k_1 + Fr_1)^2 - 4Fr_1} \right], \quad (77)$$

звідки після нескладних перетворень отримаємо таку надзвичайно важливу умову існування кноїдальних хвиль, виражену через коефіцієнт гідродинамічного тиску в початковому перерізі 1-1:

$$k_1 \geq 1, \quad (78)$$

або через коефіцієнт негідростатичності в тому ж перерізі:

$$s_1 \geq 1. \quad (79)$$

З гідравлічної точки зору ця умова означає, що в початковому перерізі досліджуваних явищ потік може бути або вігнутим ($s_1 > 1$), або паралельно-струминним ($s_1 = 1$).

З умови (79) впливає ще один надзвичайно важливий висновок. Як видно з проведених перетворень, умова (74) для модуля $k = f(Fr_1, s_1)$ звелася до виразу (79), в якому не фігурує число Фруда Fr_1 . Це означає, що умови існування загального розв'язку (45) диференціального рівняння (25) не залежать від числа Фруда, тобто кноїдальні хвилі, описувані системою рівнянь (45), можуть існувати при числах Фруда Fr_1 менших, рівних і більших одиниці:

$$Fr_1 \leq \leq 1. \quad (80)$$

Таким чином, для існування кноїдальних хвиль, описуваних системою рівнянь (45), необхідно виконання такої умови:

$$\left. \begin{array}{l} s_1 \geq 1, \\ Fr_1 \leq \leq 1. \end{array} \right\} \quad (81)$$

Тут необхідно зазначити, що загальна умова (81) має певні особливості залежно від стану потоку. Як це впливає із структури формули (47)

(особливо наочно це видно з рис. 3, а роботи [27]), у випадку спокійного та критичного стану умова (81) має вигляд

$$\left. \begin{array}{l} s_1 > 1, \\ Fr_1 \leq 1, \end{array} \right\} \quad (82)$$

а у випадку бурхливого стану – такий вигляд:

$$\left. \begin{array}{l} s_1 \geq 1, \\ Fr_1 > 1. \end{array} \right\} \quad (83)$$

Умова існування самотньої хвилі виявляється в процесі отримання солітонного розв'язку (55) (див. розділ 4) і її можна виразити через модуль еліптичних функцій Якобі (52):

$$k = 1 \quad (84)$$

або через гідравлічні параметри потоку в перерізі 1 – 1

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = 1, \\ Fr_1 > 1 \end{array} \right\}. \quad (85)$$

Особливо велике практичне значення умова (85) має для нерухомих біякритичних течій, в початковому перерізі яких може бути як гідростатичний, так і негідростатичний розподіл тиску по глибині. В даному випадку умову (85) можна розглядати в якості критерію, який відрізняє нерухомий гідравлічний солітон від інших типів одиночних хвиль на воді.

Зазначимо, що математичні умови існування розв'язків кноїдальних хвиль (74) і самотньої хвилі (52), виражені через модуль k еліптичних функцій Якобі, повністю співпадають з відповідними умовами, що витікають при розгляді рівняння Кортевега–де Фріса [8–12] та еліптичних функцій Якобі [31, 32].

Разом з цим в ряді робіт [19, 20, 29] при інтегруванні диференціальних рівнянь Серра (4) і (5) отримано наступні умови існування досліджуваних явищ: для кноїдальних хвиль – співвідношення (15), а для самотньої хвилі – залежність (16), що суперечить відповідним умовам (81) і (85).

Проведений нами аналіз показав, що, як це не парадоксально на перший погляд, протиріччя закладені в порівнянні відповідних пар умов (15) і (81), (16) і (85), полягає не в неправильності якихось з цих умов, а лише в неправильності їх трактування. Виявляється, що самі умови (15) і (16) з математичної точки зору правильні, але їх не можна трактувати як загальні умови існування отриманих розв'язків.

Автор вищезгаданих робіт [19, 20, 29] В.Г. Вереземський отримав розв'язок (8) для кноїдальних

хвиль лише для $Fr_1 < 1$, а питання про можливість існування цього розв'язку при $Fr_1 \geq 1$ він взагалі не розглядав, внаслідок чого співвідношення (15) ні в якому разі не можна трактувати як загальну умову існування кноїдальних хвиль. Умова (16) існування самотньої хвилі також не протирічить більш повній умові (85). В даному випадку умову (16) потрібно вважати лише як необхідну, а умову (85) – як необхідну і достатню.

Необхідно підкреслити, що загальна умова (83) існування кноїдальних хвиль в бурхливих потоках має свої особливості. Умова $s_1 = 1$ відповідає випадку утворення самотньої хвилі чи її модифікації (в певній мірі це відноситься і до хвилястого стрибка), а умова $s_1 > 1$ відповідає випадку утворення групових періодичних кноїдальних хвиль.

Слід зауважити, що наведені відомості про умови існування кноїдальних та самотньої хвиль в значній мірі можуть вважатися лише якісними. Кількісна оцінка таких умов дана в [1, 23, 25]. Отримані в даному розділі умови існування розглядуваних явищ, виражені через параметри потоку в початковому перерізі з врахуванням можливого відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску по глибині, вимагають глибокого переосмислення і відповідного перегляду існуючих поглядів на класифікацію біякритичних течій, описуваних системою рівнянь (45), та якісних критеріїв, що відрізняють різні типи цих течій між собою.

7. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА ОТРИМАНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Експериментальне вивчення профілю вільної поверхні хвилеподібних біякритичних течій здійснювалось в лабораторії кафедри гідротехнічних споруд Рівненського державного технічного університету. Досліди проводились з нерухомими хвилями в умовах плоскої задачі в великому дзеркальному лотку довжиною 39 м, шириною 1 м і висотою на переважній довжині 1 м. Основна частина лотка, довжиною 23,3 м, має нерухоме горизонтальне дно, а кінцева частина, довжиною 15,7 м, розміщена на металевій фермі, за допомогою якої похил цієї частини можна змінювати. Досліджувані явища утворювалися на нерухомій частині лотка при витіканні води з-під плоского вертикального затвора.

При постановці лабораторних досліджень велика увага приділялася питанню розробки надійної методики експериментів з біякритичними течіями, які досить непросто отримувати на установці в бажаному діапазоні основних характеристик

досліджуваних явищ. Внаслідок того, що білякритичні течії та досить велика кількість інших явищ навіть різної фізичної природи описуються одним і тим же диференціальним рівнянням КдФ (3), досконала методика проведення експериментів з білякритичними хвилями на воді дає унікальну можливість вивчення згаданих явищ шляхом їх моделювання на гідравлічному аналозі.

Надзвичайно важливим питанням в проведенні експериментів з білякритичними течіями є здатність установки відтворити необхідні граничні умови, які б відповідали вихідній теоретичній схемі, чого для потоків з числами Фруда, близькими до одиниці, досягти вдається не завжди. Задані граничні умови в початковому перерізі досліджуваних явищ досягалися шляхом підбору витрати і висоти підняття затвора, а також за допомогою спеціальних приставок до затвора, які завдяки своїй конфігурації ліквідують вертикальне стиснення потоку при витіканні з-під затвора.

Граничні умови в кінцевому перерізі білякритичних течій змінювалися за допомогою клапанного затвора, розміщеного в кінці установки, та шляхом зміни похилу дна рухомої частини лотка. Крім того, для досягнення вказаної мети в досліджах змінювалася довжина робочої частини установки (тобто відстань від затвора до точки перелому дна), що досягалося перестановкою затвора на нерухомій частині лотка. В проведених експериментах було використано шість положень затвора, причому для проведення дослідів з числами Фруда $Fr_1 = 0.9 - 1.1$ прийшлося зменшити довжину робочої частини установки до 1–2 м. В останньому випадку, по суті, досліджуване явище формувалося за схемою водозливу з широким порогом, але з фіксацією початкової глибини за допомогою затвора.

Положення кривої вільної поверхні потоку визначалося шпичен-масштабом, причому вимірвальні точки розміщувалися з інтервалом 5 см. Відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску по глибині у вибраних перерізах визначалося за допомогою донних п'езометрів. З цією метою на нерухомій частині лотка було встановлено дві групи п'езометрів загальною кількістю 95 шт.

Витрата на установці визначалася тарованим трикутним вимірвальним водозливом і змінювалася в таких межах: $Q = 40.5 - 454.8$ л/с, а параметри потоку в початковому перерізі досліджуваних явищ були такими: глибина $h_1 = 3.4 - 26$ см, число Фруда $Fr_1 = 0.46 - 5.19$, коефіцієнт негідростатичності $s_1 = 1.00 - 1.12$.

Аналіз результатів проведених експериментів та описаних в шостому розділі теоретичних до-

сліджень показав, що загальний розв'язок диференціального рівняння (25) у вигляді системи (45) описує не якийсь один-єдиний тип хвиль, а ряд типів, які за певними ознаками якісно відрізняються між собою.

На основі проведених досліджень можна дати наступну класифікацію усталених та перманентних білякритичних течій з гладкою хвилеподібною поверхнею, описуваних системою рівнянь (45), та визначити їх характерні ознаки, що відрізняють ці типи між собою (див. рис. 3).

1. Одиночна хвиля в спокійному або критичному потоці – явище нерухоме, $Fr_1 \leq 1, s_1 > 1$, кількість хвиль $n_{xb} = 1$, глибина в кінці хвилі $h_{кн}$ дорівнює початковій глибині $h_{пч} = h_1$, тобто $h_{кн} = h_1$.

2. Одиночна хвиля в бурхливому потоці – явище нерухоме, $Fr_1 > 1, s_1 > 1, n_{xb} = 1, h_{кн} = h_{пч}$.

3. Нерухома самотня хвиля (нерухомий гідравлічний солітон) $Fr_1 > 1, s_1 = 1, n_{xb} = 1, h_{кн} = h_{пч}$.

4. Одиночна чи нерухома самотня хвиля з хвостом – це різновиди кожного з трьох попередніх типів, в яких за основною хвилею, описаною в попередніх пунктах, утворюється хвіст у вигляді хвилі набагато меншої висоти ($h'_b < h_b$).

5. Кноїдальні хвилі в спокійному або критичному потоці – явище нерухоме $Fr_1 \leq 1, s_1 > 1, n_{xb} > 1$, хвилі періодичні, $h_{кн} = h_{пч}$.

6. Кноїдальні хвилі в бурхливому потоці – явище нерухоме, $Fr_1 > 1, s_1 > 1, n_{xb} > 1$, хвилі періодичні, $h_{кн} = h_{пч}$.

7. Хвилястий стрибок з гладкою поверхнею – явище нерухоме, $Fr_1 > 1, s_1 \geq 1, n_{xb} > 1$, перша хвиля асиметрична і глибина в її кінці $h_{кн} > h_k > h_{пч}$; використання розв'язку (45) для опису вільної поверхні потоку має певні особливості (див. нижче).

8. Рухома самотня хвиля (рухомий гідравлічний солітон) – $Fr_1 > 1, s_1 = 1, n_{xb} = 1, h_{кн} = h_{пч}$.

9. Рухома самотня хвиля з хвостом – це різновид попереднього типу, в якому за основною хвилею утворюється хвіст у вигляді затухаючих хвиль набагато меншої висоти ($h'_b < h_b$) [36].

10. Рухома самотня хвиля з відірваним хвостом – це також різновид рухомої самотньої хвилі, в якому хвіст відірвався від основної хвилі й рухається за нею із меншою швидкістю ($c' < c$) [36].

11. Група хвиль переміщення з гладкою поверхнею – $Fr_1 > 1, s_1 = 1, n_{xb} > 1$, перша хвиля асиметрична і глибина в її кінці $h_{кн} > h_{пч}$; використання розв'язку (45) для опису вільної поверхні потоку має певні особливості (див. нижче).

Всі ці явища, за винятком хвилястого стриб-

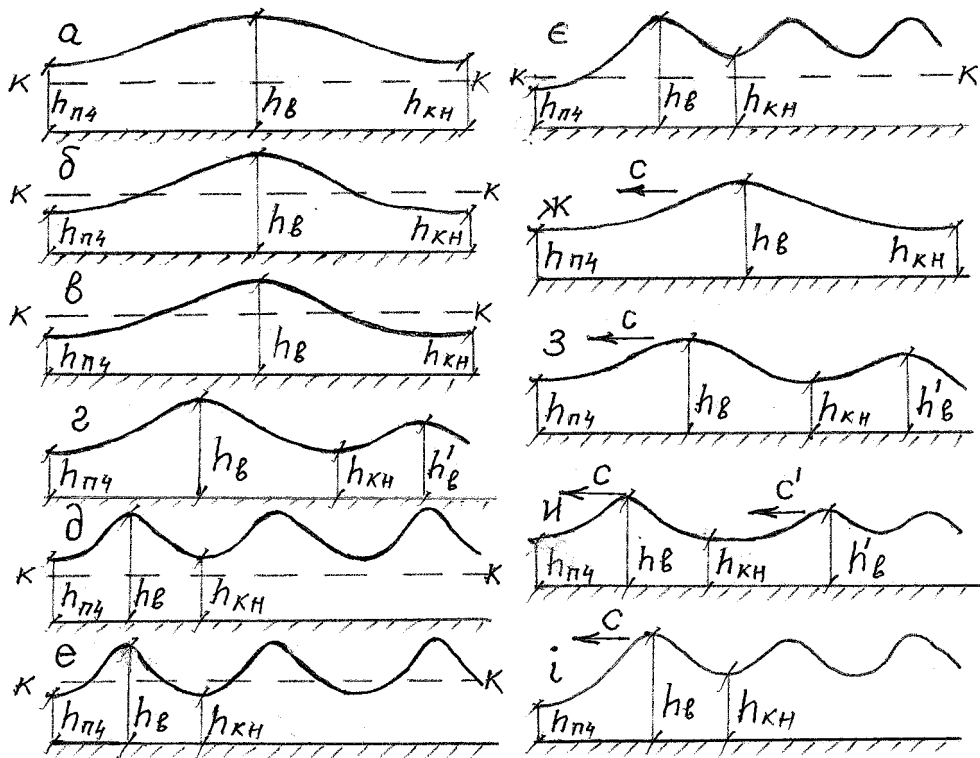


Рис. 3. Типи біякритичних течій з гладкою хвилеподібною поверхнею:
 а - одиночна хвиля в спокійному або критичному потоці, б - одиночна хвиля в бурхливому потоці,
 в - нерухома самотня хвиля, г - одиночна чи нерухома самотня хвиля з хвостом,
 д - кноїдальні хвилі в спокійному або критичному потоці, е - кноїдальні хвилі в бурхливому потоці,
 е - хвилястий стрибок з гладкою поверхнею, ж - рухома самотня хвиля,
 з - рухома самотня хвиля з хвостом, и - рухома самотня хвиля з відірваним хвостом,
 і - група хвиль переміщення з гладкою поверхнею

ка і групи хвиль переміщення, опис вільної поверхні яких має свої особливості, можна називати кноїдальними хвилями, бо всі вони повністю (про хвіст хвиль ми тут мови не ведемо) описуються еліптичною функцією Якобі амплітуди косинуса $\text{sn}(x/\Delta, k)$. Звичайно, це не виключає можливості використання у відповідних випадках терміну "самотня хвиля" як частинного випадку кноїдальних хвиль. Підкреслимо також, що теоретичний профіль хвиль симетричний відносно вертикалей, що проходять через вершини хвиль.

Зауважимо, що профіль вільної поверхні хвилястого стрибка і групи хвиль переміщення з вальцями на перших гребенях, як різновиди відповідних явищ без таких вальців, з певними обмеженнями також можуть бути описані системою рівнянь (45), причому теоретичні значення в області перших гребенів будуть дещо завищеними, що дає в розрахунках певний запас.

Необхідно звернути увагу також на те, що в

наведеній класифікації відсутні рухомі кноїдальні хвилі, тоді як в більшості теоретичних досліджень кноїдальні хвилі розглядаються саме у вигляді рухомого явища. В цьому випадку суть справи полягає ось в чому. Аналіз результатів теоретичних досліджень, висвітлених в попередньому розділі, показує, що для формування рухомих кноїдальних хвиль повинні бути виконані такі умови:

$$Fr_1 > 1, \quad (86)$$

$$s_1 > 1. \quad (87)$$

Але в дійсності у всіх перерізах незбуреного потоку перед хвилею переміщення коефіцієнт негідростатичності $s_1 = 1$ (в даній роботі не розглядається випадок розповсюдження хвиль переміщення в потоках з хвилеподібною поверхнею). Внаслідок того, що умова (87) в даному випадку не виконується, можна зробити висновок, що рухомі кноїдальні хвилі на воді самостійно існувати

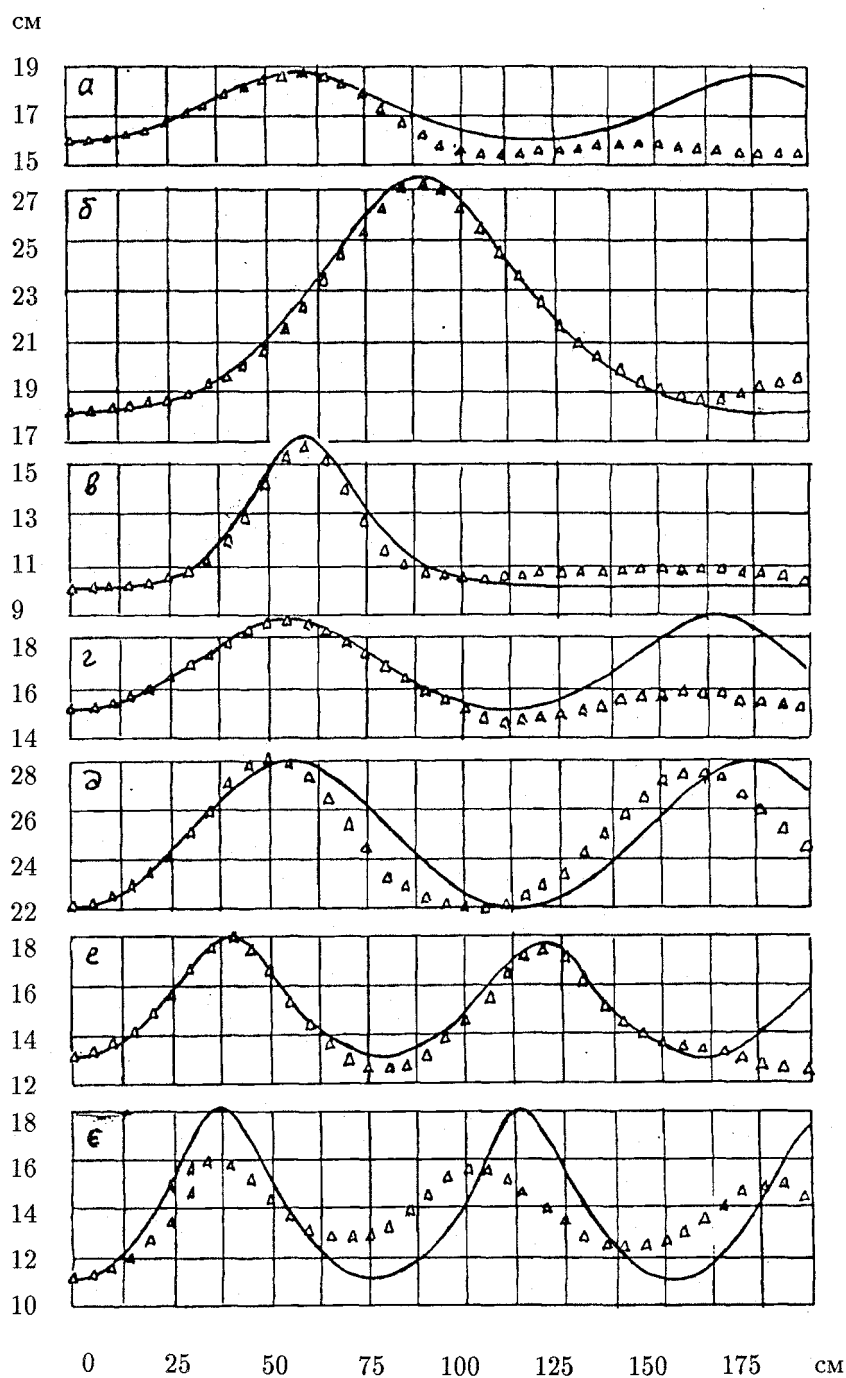


Рис. 4. Зіставлення теоретичного профілю хвильоподібних білякритичних течій з експериментальними даними:

- а - одиночна хвиля в спокійному потоці, $Q = 196.4 \text{ л/с}$, $h_1 = 16.0 \text{ см}$, $s_1 = 1.02$, $Fr_1 = 0.97$,
- б - одиночна хвиля в бурхливому потоці, $Q = 286.0 \text{ л/с}$, $h_1 = 18.0 \text{ см}$, $s_1 = 1.02$, $Fr_1 = 1.45$,
- в - нерухома самотня хвиля, $Q = 124.9 \text{ л/с}$, $h_1 = 10.0 \text{ см}$, $s_1 = 1.00$, $Fr_1 = 1.61$,
- г - одиночна хвиля з хвостом, $Q = 185.5 \text{ л/с}$, $h_1 = 15.0 \text{ см}$, $s_1 = 1.03$, $Fr_1 = 1.05$,
- д - кноїдальні хвилі в спокійному потоці, $Q = 302.6 \text{ л/с}$, $h_1 = 22.0 \text{ см}$, $s_1 = 1.06$, $Fr_1 = 0.89$,
- е - кноїдальні хвилі в бурхливому потоці, $Q = 150.6 \text{ л/с}$, $h_1 = 13.0 \text{ см}$, $s_1 = 1.06$, $Fr_1 = 1.06$,
- з - хвильастий стрибок, $Q = 133.8 \text{ л/с}$, $h_1 = 11.0 \text{ см}$, $s_1 = 1.07$, $Fr_1 = 1.40$,

не можуть. В реальних умовах в якості рухомих кноїдальних хвиль можна розглядати лише ту частину хвиль переміщення, яка розташовується після першої асиметричної хвилі, причому в перерізі потоку по першій підшві число Фруда

$$Fr_{\text{під}} = \frac{c^2}{gh_{\text{під}}} < 1, \quad (88)$$

а коефіцієнт негідростатичності

$$s_{\text{під}} > 1. \quad (89)$$

Зіставлення теоретичного профілю вільної поверхні нерухомих хвилеподібних біякритичних течій з експериментальними даними ряду дослідів (рис. 4) показує, що експериментальні дані добре узгоджуються з теоретичним профілем для всіх досліджуваних явищ за винятком хвилястого стрибка.

Причиною такої невідповідності в останньому випадку є те, що реальний профіль першої хвилі хвилястого стрибка завжди асиметричний, а теоретичний профіль розглядуваних явищ у відповідності з залежностями (45) і (55) – симетричний. Саме по цій причині сучасні методики побудови профілю вільної поверхні хвилястого стрибка і групи хвиль переміщення ґрунтуються на математичній моделі, яка зображує вказані явища у вигляді сукупності самотньої і кноїдальної хвилі в спокійному потоці [3, 5, 7, 37].

ВИСНОВКИ

1. Отримане узагальнене диференціальне рівняння (25) профілю вільної поверхні біякритичних течій з гладкою хвилеподібною поверхнею та його розв'язки (45) і (55) усувають недоліки, вказані в першому розділі.

2. Диференціальні рівняння Кортевега–де Фріса (3), Серра (4), (5) та пропонуване (25) для випадків усталеного і перманентного рухів є тотожними, внаслідок чого для одних і тих самих граничних умов ці рівняння повинні мати ідентичні як самі розв'язки, так і умови існування цих розв'язків.

3. Загальний розв'язок диференціального рівняння (25) у вигляді системи (45) має закінчений вигляд і описує профіль вільної поверхні хвилеподібних біякритичних течій не через наперед невідому їх максимальну глибину h_b , а через характеристики потоку в їх початковому перерізі.

4. Загальний розв'язок (45) диференціального рівняння (25) описує не якийсь один єдиний тип хвиль, а ряд типів одиночних та групових

хвиль, які можуть утворюватися при наявності відповідних граничних умов у спокійних, критичних і бурхливих потоках. Класифікація таких типів хвиль дана у сьомому розділі.

5. Загальною умовою існування кноїдальних хвиль, описуваних системою рівнянь (45), є співвідношення (81), причому у випадку спокійного та критичного стану потоку ця умова зводиться до виразу (82), а у випадку бурхливого стану – до виразу (83).

6. Самотня хвиля (гідравлічний солітон), описувана залежністю (55), є частинним випадком кноїдальних хвиль. Причому необхідною і достатньою умовою існування самотньої хвилі, записаною через модуль еліптичних функцій Якобі, є рівність (52), а через гідравлічні параметри потоку в початковому перерізі 1–1 – співвідношення (85).

7. Проведені експериментальні дослідження добре підтверджують теоретичні розв'язки (45) і (55) для всіх досліджених типів хвилеподібних біякритичних течій за винятком хвилястого стрибка, профіль вільної поверхні якого можна побудувати шляхом склеювання розв'язків самотньої і кноїдальних хвиль в спокійних потоках.

1. Рябенко А.А. Типы, особенности и условия существования околоскритических течений // Гидротехническое строительство.– 1992.– 5.– С. 9–13.
2. Смыслов В.В. Исследование околоскритических течений жидкости в открытых руслах // Известия вузов.– Энергетика.– 1967.– С. №1.97–103
3. Турсунов А.А. Околоскритическое состояние безнапорных потоков воды // Известия ВНИИГ.– 1969.– Т.90.– С. 201–224.
4. Favre H. Etude theorique et experimentale des ondes de translation dans les canaux decouvertes.– Dunod: Paris, 1935.– 76 p.
5. Гидравлические расчеты конструкций, управляющих бурными потоками / Под общ. ред. Ф.Г. Гунько.– Л.: Энергия, 1974.– 110 с.
6. Слисский С.М. Гидравлические расчёты высоконапорных гидротехнических сооружений.– М.: Энергоатомиздат, 1986.– 304 с.
7. Гидравлические расчеты водосбросных гидротехнических сооружений. Справочное пособие.– М.: Энергоатомиздат, 1988.– 624 с.
8. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи.– М.: Наука, 1980.– 320 с.
9. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта.– М.: Мир, 1981.– 312 с.
10. Bhatnagar P.L. Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems.– London: Clarendon Press, 1979.– 136 p.
11. Нелинейные волны / Под ред. С. Лейбовича и А. Сиббса.– М.: Мир, 1977.– 320 с.
12. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике.– М.: Мир, 1977.– 320 с.

13. Friedrichs K.O., Hayers D.H. The existence of solitary waves // *Comm. Pure Appl. Math.*– 1954.– **7**.– P. 517–550.
14. Korteweg D.J., de Vries G. On the Change of Form of Long Waves // *Philosophical Magazine and Journal of Science.*– 1895.– **39**, **Series 5**.– P. 422–443.
15. Serre F. Contribution a l'etude des ecoulements permanents et variables dans les anaux // *La Houille Blanche.*– 1953.– **3**.– P. 374–388.
16. Смыслов В.В. К решению задачи о незатопленном водосливе с широким порогом // *Гидравлика и гидротехника.*– 1968.– **7**.– С. 26–32.
17. Boussinesq J. Theorie des ondes et de long d'un canal rectangulaire horizontale, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond // *Journ. Math. Pures Appl.*– 1872.– **S.2. 17**.– P. 55–108.
18. Селезов И.Т. Распространение нелинейных неустойчившихся поверхностных гравитационных волн над неровным дном // *Прикладна гідромеханіка.*– 1999.– **Т.1(73)**.– С. 102–109.
19. Вереземский В.Г. О гидравлическом прыжке // *Труды Гидропроекта.*– 1968.– **Сб. 15**.– С. 38–41.
20. Вереземский В.Г. О прыжке и сужении бурного потока // *Автореферат канд. диссертации.*– М., 1967.– С. 14.
21. Littman W. On the existence of periods waves near critical speed // *Comm.Pure Appl. Math.*– 1957.– **10**.– P. 241–269.
22. Wiegel R.L. A presentation of cnoidal wave theory fon practical applicition // *Journ. of Fluid Mechanics.*– 1960.– **7**, **Part 2**.– P. 273–286.
23. Рябенко А.А. Условия существования кноидальных волн // *Гидравлика и гидротехника.*– 1991.– **В. 53**.– С. 3–9.
24. Лаврентьев М.О. До теорії довгих хвиль // *Зб. праць Інституту математики АН УРСР.*– 1947.– **8**.– С. 13–69.
25. Рябенко А.А. Условия существования уединённой волны // *Гидравлика и гидротехника.*– 1989.– **В. 49**.– С. 35–41.
26. Селезов В.Т., Сидорчук В.Н., Яковлев В.В. Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа.– К.: *Наук. думка*, 1983.– 208 с.
27. Рябенко А.А. О сопряженных глубинах околоритических течений // *Гидравлика и гидротехника.*– 1977.– **В. 24**.– С. 26–34.
28. Iwasa Y. Analytical Considerations on cnoidal and Solitary Waves // *Memoirs of the Faculty of Engineering Kyoto University.*– 1955.– **XVII, III**.– P. 264–276.
29. Вереземский В.Г. Об уравнениях быстро изменяющегося течения в открытом русле // *Труды Гидропроекта.*– 1968.– **Сб. 15**.– С. 30–37.
30. Смыслов В.В. Теория водослива с широким порогом.– К.: *Из-тво АН УССР*, 1956.– 184 с.
31. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике.*– М.: *Наука*, 1973.– 832 с.
32. Фильчаков П.Ф. *Справочник по высшей математике.*– К.: *Наук. думка*, 1972.– 744 с.
33. Ламб Г. *Гидродинамика.*– М.–Л.: *ОГИЗ Гостехиздат*, 1947.– 928 с.
34. Ле Меоте Б. *Введение в гидродинамику и теорию волн на воде.*– Л.: *Гидрометеоиздат*, 1974.– 368 с.
35. Моисеев Н.Н., Тер-Крикоров А.М. Исследование движения тяжелой жидкости при скоростях близких к критической // *Труды МФТИ.*– 1959.– **Вып.3**.– С. 25–59.
36. Ko K. Kuehl H.H. Energy loss of a Korteweg-de Vries solitary wave in a slowly varying medium // *The Physics of Fluids.*– 1980.– **V.23, 4**.– P. 834–836.
37. Рябенко А.А. О представлении волнистого прыжка и группы волн перемещения как совокупности уединённой и кноидальных волн // *Гидротехническое строительство.*– 1998.– **5**.– С. 9–14.