УДК 681.3(075)

И. Н. Коваленко[1], **А. Н. Буточнов**[2]
[1]Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины
пр. Академика Глушкова, 40, 03680, ГСП, Киев-187, Украина
[2]Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Оценка надежности высоконадежных систем с учетом ЗИП

Предложены приближенные верхние и нижние оценки коэффициента готовности высоконадежной восстанавливаемой системы со структурной избыточностью. Полученные расчетные соотношения могут использоваться для оценки надежности высоконадежных систем с учетом различных стратегий пополнения ЗИП.

Ключевые слова: *высоконадежные системы, стратегии пополнения запасов, показатели надежности, оптимизация технического обслуживания, асимптотические методы*

При построении систем обработки информации реального времени [27], к надежности функционирования которых предъявляются достаточно высокие требования, необходимо решать целый ряд оптимизационных задач, таких как оптимизация структуры, распределение требований по надежности между показателями отдельных составляющих надежности (например, безотказности и ремонтопригодности), введение различных видов избыточности (структурной, функциональной, временной), расчет комплектов ЗИП, оптимизация систем технического обслуживания и ремонта и др. Решение такого рода задач не представляется возможным без построения математической модели функционирования системы и получения достаточно простых расчетных соотношений для определения основных показателей надежности (вероятность отказа, коэффициент готовности и др.).

Математическая теория надежности представляет собой прикладную дисциплину, использующую как логико-алгоритмические, так и вероятностно-статистические методы. Не ставя перед собой цель сколь-либо полного обзора, приведем некоторые основные монографии, связанные с логико-вероятностным анализом надежности сложных систем.

Если говорить о надежности систем на уровне событий, то основополагающей является монография [1]. Основы логико-вероятностного анализа структурно-сложных систем изложены в книгах [2, 3].

Для определения основных показателей надежности, связанных с функционированием системы во времени, традиционно используются марковские, полумарковские и регенерирующие процессы. Так, в монографиях [4–6] дается необходимый теоретический аппарат; в [7, 8] рассмотрен целый ряд моделей надежности (главным образом восстанавливаемых систем, описываемых указанными классами случайных процессов). Особо следует упомянуть монографии [9, 10], где исследованы широкие классы моделей теории надежности и, в частности, предложены обобщенные схемы классификации резервированных систем с необходимым математическим аппаратом.

По поводу выбора вероятностной модели той или иной системы отметим такой (впрочем, широко известный) факт. В большинстве случаев гипотеза экспоненциальности распределения наработки элемента на отказ не приводит к большой погрешности. Однако, случайные процессы восстановления элементов системы после отказов имеют законы распределения, отличные от экспоненциальных, что приводит к неадекватности используемых моделей реальным случайным процессам.

Использование моделей полумарковских процессов и законов распределения времени пребывания системы в состояниях работоспособности, отличных от экспоненциальных, существенно затрудняет получение практически полезных расчетных соотношений для показателей надежности. Это в особенности относится к решению оптимизационных задач, связанных с выбором структуры системы и правил ее технического обслуживания. Здесь уместно упомянуть некоторые известные монографии [11–13], посвященные оптимизации технического обслуживания. Монография [14] трактует полумарковские модели технического обслуживания, в основном связанные с временным резервированием. Отметим также два фундаментальных обзора [15, 16]. В частности, статья [16] — это обзор работ по оптимизации технического обслуживания многокомпонентных систем. В упомянутых выше работах [9, 10], а также монографии [17], отдельные главы посвящены вопросам оптимизации.

Совершенствование техники и увеличение надежности элементов привело к созданию нового направления в теории надежности — асимптотических методов, применимых для получения приближенных формул в случае, когда точный анализ является делом безнадежным. Асимптотический анализ показателей надежности начался в середине XX столетия. Вначале задача рассматривалась в схеме «малого параметра», в которой характеристики надежности раскладывались в ряд по степеням интенсивностей отказа элементов системы. Затем Б.В. Гнеденко [18], А.Д. Соловьев [19, 20] и многие их ученики использовали более общий подход, так называемую треугольную схему предельных теорем. Дальнейшее развитие метода, включая алгоритмы ускоренного моделирования редких событий, представлено в [21–23]. Общий метод разложения функционала случайного потока однородных событий по степеням интенсивности потока Пуассона описан в [24]. Среди последних работ в этом направлении отметим работы [25, 26], в которых предложена новая идея асимптотической нечувствительности при малой загрузке системы (light-traffic insensitivity). Характеристики системы обслуживания могут зависеть от вида функции распределения времени обслуживания, однако при малой загрузке такая зависимость исчезает. Такой подход имеет хорошие перспективы использования для расчета надежности немарковских систем.

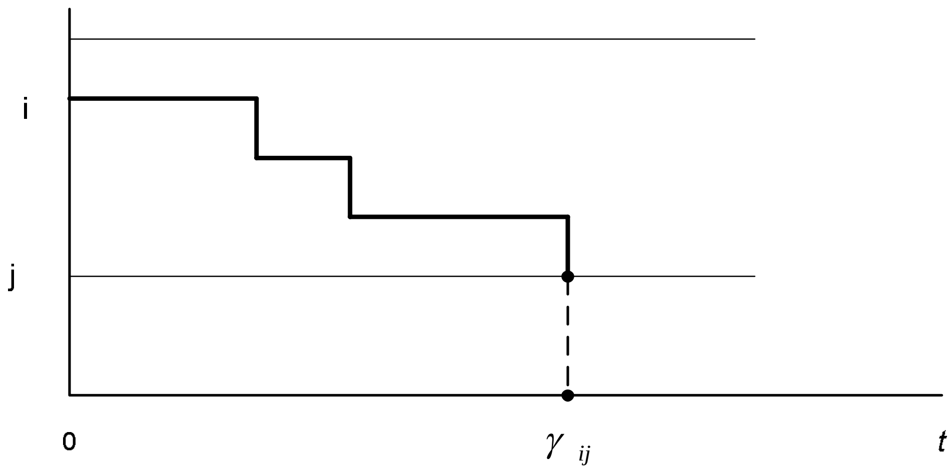
Таким образом, решение оптимизационных задач для высоконадежных систем, в которых показатели надежности выступают в роли целевых функций, представляет достаточно сложную задачу, так что простота математического аппарата оценки надежности существенно упрощает ее решение.

Одним из удачных подходов к решению этой задачи является приближенное представление показателя надежности системы в виде полинома от времени и интенсивностей отказа элементов. Целью данной статьи является вывод именно таких формул для некоторых схем надежности высоконадежных систем с пополнением запасов. При выборе таких схем надежности мы ориентировались на фундаментальную монографию [12].

Некоторые вспомогательные оценки. Рассмотрим марковскую невосстанавливаемую систему с состояниями 0,1,2,…, описываемую процессом гибели $X(t)$. Интенсивность гибели:

$$\Lambda_k = \frac{1}{dt} \mathrm{P}\left\{ X(t+dt) = k-1 \,\middle|\, X(t) = k \right\}.$$

Состояние $X(t)$ интерпретируется как число исправных элементов системы в момент t. Обозначим через γ_{ij} (см. рис.) время перехода процесса $X(t)$ из состояния i в j, $f_{ij}(t)\,dt = \mathrm{P}\{\gamma_{ij} \in dt\}$.



Процесс гибели $X(t)$

Легко видеть, что

$$f_{ij}(t) = \Lambda_i \ldots \Lambda_{j+1}\, \Theta_{ij}(t; \Lambda_i, \ldots, \Lambda_{j+1}), \tag{1}$$

где

$$\Theta_{ij}(t; \Lambda_i, \ldots, \Lambda_{j+1}) = \int\limits_{x_i + x_{i-1} + \ldots + x_{j+1} = t} \!\!\ldots\!\! \int \exp\left\{ -[\Lambda_i\, x_i + \ldots + \Lambda_{j+1}\, x_{j+1}] \right\} dS\,. \tag{2}$$

В этой формуле dS обозначает элемент гиперплощади на симплексе

$$(x_i > 0, \ldots, x_{j+1} > 0,\ x_i + \ldots + x_{j+1} = t).$$

Здесь и далее произведение $\Lambda_i \ldots \Lambda_{j+1}$ обозначает $\prod_{k=j+1}^{i} \Lambda_k$.

Верхняя оценка. Заменяя $\exp\{\ldots\}$ на 1, из формул (1), (2) получим верхнюю оценку:

$$\Theta_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) \le \frac{t^{i-j-1}}{(i-j-1)!} = \overline{\Theta}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}).$$

Точное значение выписывается при $\Lambda_i = \ldots = \Lambda_{j+1} = \lambda$:

$$\Theta_{ij}(t;\lambda,\ldots,\lambda) = \frac{t^{i-j-1}}{(i-j-1)!}\, e^{-\lambda t}. \tag{3}$$

Нижняя оценка. Из (2) очевидно, что частные производные $\frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial \Lambda_k}$ монотонно возрастают по $\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}$ в области $(\Lambda_i \ge 0,\ldots,\Lambda_{j+1} \ge 0)$ и достигают минимума при $\Lambda_i = \ldots = \Lambda_{j+1} = 0$. Следовательно,

$$\Theta_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) \ge \Theta_{ij}(t;0,\ldots,0) + \sum_{k=j+1}^{i} \Lambda_k \left.\frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial \Lambda_k}\right|_0 =$$

$$= \frac{t^{i-j-1}}{(i-j-1)!} - \sum_{k=j+1}^{i} \Lambda_k \int\limits_{x_i+\ldots+x_{j+1}=t} \!\!\ldots\!\! \int t_k\, dS. \tag{4}$$

Из (2) очевидно, что все $\left.\frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial \Lambda_k}\right|_0$ $(j+1 \le k \le i)$ равны между собой; из (3) находим, что их сумма составляет

$$-\frac{t^{i-j}}{(i-j-1)!}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{x_i+\ldots+x_{j+1}=t} \!\!\ldots\!\! \int t_k\, dS = \frac{t^{i-j}}{(i-j)!}, \quad j+1 \le k \le i. \tag{5}$$

Подстановка (5) в (4) дает нижнюю оценку

$$\Theta_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) \ge \frac{t^{i-j-1}}{(i-j-1)!}\left(1 - \frac{\Lambda_i + \ldots + \Lambda_{j+1}}{i-j}\, t\right) = \underline{\Theta}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}).$$

В результате получаем оценки для плотности случайной величины γ_{ij}:

$$\underline{f}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) \le f_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) \le \overline{f}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}), \tag{6}$$

где

$$\overline{f}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) = \Lambda_i \ldots \Lambda_{j+1} \frac{t^{i-j-1}}{(i-j-1)!}, \tag{7}$$

$$\underline{f}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) = \overline{f}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) \left(1-\frac{t}{i-j}\sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k\right). \tag{8}$$

Обозначим

$$\varepsilon = \frac{t}{i-j}\sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k .$$

Тогда, согласно (7), (8), величина ε будет мерой относительного отклонения нижней оценки от верхней:

$$1-\varepsilon \le \frac{\underline{f}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1})}{\overline{f}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1})} \le 1.$$

Оценки функции распределения (ф.р.) случайной величины γ_{ij}. Для сокращения записи, опустим $\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}$ в обозначении $F_{ij}(t)$ и ее оценок. Не оговаривая особо, опустим подобные символы и в некоторых других характеристиках. Интегрированием (7) и (8) получаем двустороннюю оценку ф.р. $F_{ij}(t)$ случайной величины γ_{ij}:

$$\underline{F}_{ij}(t) \le F_{ij}(t) \le \overline{F}_{ij}(t),$$

где

$$\overline{F}_{ij}(t) = \Lambda_i \ldots \Lambda_{j+1} \frac{t^{i-j}}{(i-j)!}, \tag{9}$$

$$\underline{F}_{ij}(t) = \overline{F}_{ij}(t)\left(1-\frac{\Lambda_i+\ldots+\Lambda_{j+1}}{i-j+1}\,t\right). \tag{10}$$

Мера относительного отклонения

$$1-\varepsilon_1 \le \frac{\underline{F}_{ij}(t)}{\overline{F}_{ij}(t)} \le 1,$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\Lambda_i + \ldots + \Lambda_{j+1}}{i-j+1}\, t = \frac{i-j}{i-j+1}\, \varepsilon .$$

Оценки для момента достижения уровня $j-1$. Пусть

$$Q_{ij}(t) = \mathrm{P}\{X(t) < j \mid X(0) = i\}.$$

Целью исследования является получение оценок

$$\underline{Q}_{ij}(t) \le Q_{ij}(t) \le \overline{Q}_{ij}(t).$$

Заметим, что $Q_{ij}(t) = \mathrm{P}\{\gamma_{i,j-1} < t\} = F_{i,j-1}(t)$, т.е. в оценках (9) и (10) нужно только заменить j на $j-1$. Таким образом, нового здесь ничего нет. Тем не менее, так как $Q_{ij}(t)$ используется для вывода важных формул для надежности резервированных систем, мы выпишем для них оценки. Имеем:

— для плотности вероятности $f_{i,j-1}(t)$ случайной величины γ_{ij} (момента первого попадания процесса $X(t)$ в состояние $j-1$ при начальном состоянии i) справедливы неравенства:

$$\underline{f}_{i,j-1}(t) \le f_{i,j-1}(t) \le \overline{f}_{i,j-1}(t),$$

где

$$\overline{f}_{i,j-1}(t) = \Lambda_i \ldots \Lambda_j \frac{t^{i-j}}{(i-j)!},$$

$$\underline{f}_{i,j-1}(t) \ge \overline{f}_{i,j-1}(t)\left(1 - \frac{\Lambda_i + \ldots + \Lambda_j}{i-j+1}\, t\right);$$

— для $Q_{ij}(t)$ выполняются неравенства:

$$\underline{Q}_{ij}(t) \le Q_{ij}(t) \le \overline{Q}_{ij}(t), \tag{11}$$

где

$$\overline{Q}_{ij}(t) = \Lambda_i \ldots \Lambda_j \frac{t^{i-j+1}}{(i-j+1)!}, \tag{12}$$

$$\underline{Q}_{i,j}(t) = \overline{Q}_{i,j}(t)\left(1 - \frac{\Lambda_i + \ldots + \Lambda_j}{i-j+2}\, t\right). \tag{13}$$

Отметим также оценки для среднего по времени

$$Q_{ij}^T = \frac{1}{T}\int_0^T Q_{ij}(t)\,dt\,,$$

а именно,

$$\underline{Q}_{ij}^T \le Q_{ij}^T \le \overline{Q}_{ij}^T\,,$$

где

$$\overline{Q}_{ij}^T = \Lambda_i \,\ldots\, \Lambda_j \,\frac{T^{i+j+1}}{(i-j+2)!}, \tag{14}$$

$$\underline{Q}_{ij}^T = \overline{Q}_{ij}^T \left(1 - \frac{\Lambda_i + \ldots + \Lambda_j}{i-j+3}\,T\right). \tag{15}$$

Наконец, отметим формулу для среднего и дисперсии времени до достижения процессом $X(t)$ уровня j из уровня i:

$$\mathrm{E}\gamma_{ij} = \frac{1}{\Lambda_i} + \cdots + \frac{1}{\Lambda_{j+1}}\,,$$

$$\sigma^2[\gamma_{ij}] = \frac{1}{\Lambda_i^2} + \ldots + \frac{1}{\Lambda_{j+1}^2}\,.$$

В частности,

$$\mathrm{E}\gamma_{i,j-1} = \frac{1}{\Lambda_i} + \ldots + \frac{1}{\Lambda_j}\,,$$

$$\sigma^2\left[\gamma_{i,j-1}\right] = \frac{1}{\Lambda_i^2} + \ldots + \frac{1}{\Lambda_j^2}\,.$$

Приведем *приближенные формулы для расчета $K_Г$ системы с ЗИП.* Рассмотрим несколько моделей системы с ЗИП.

Системы с периодическим пополнением запаса. Обозначим через L объем запасного комплекта, а через T — период пополнения. Отказ системы наступает при исправности менее m элементов. Требуется оценить

$$K_Г = 1 - \frac{1}{T}\int_0^T Q_{Lm}(t)\,dt\,.$$

Из (14) находим нижнюю оценку $K_Г$:

$$\underline{K}_Г = 1 - \frac{1}{(L-m+2)!}\,\Lambda_L\,\Lambda_{L-1}\,\ldots\,\Lambda_m\,T^{L-m+1}\,. \tag{16}$$

Из (15) находим верхнюю оценку $K_Г$:

$$\overline{K}_Г = \underline{K}_Г + (1-\underline{K}_Г)\,\frac{\Lambda_L + \Lambda_{L-1} + \ldots + \Lambda_m}{L-m+3}\,T\,. \tag{17}$$

Удобнее оперировать с величиной $1-K_Г$ — коэффициентом неготовности. Из (16) и (17) имеем:

$$\frac{1}{(L-m+2)!}\Lambda_L\,\Lambda_{L-1}\ldots\Lambda_m\,T^{L-m+1}\left(1-\frac{\Lambda_L+\Lambda_{L-1}+\ldots+\Lambda_m}{L-m+3}\,T\right)\le$$
$$\le 1-K_Г \le \tfrac{1}{(L-m+2)!}\Lambda_L\,\Lambda_{L-1}\ldots\Lambda_m\,T^{L-m+1}.$$

Оценка $1-K_Г$ величиной $1-\underline{K}_Г$ имеет относительную погрешность, не превышающую

$$\varepsilon_1 = \frac{\Lambda_L+\Lambda_{L-1}+\ldots+\Lambda_m}{L-m+3}\,T\,.$$

Системы с пополнением по уровню. В данной системе заказ на пополнение элементов поступает, когда число исправных элементов снижается до уровня l, где $m \le l < L$. Время выполнения заказа равно постоянному T. Обозначим через C среднюю продолжительность цикла (работа до заказа + выполнение заказа). Имеем:

$$C = \frac{1}{\Lambda_L} + \frac{1}{\Lambda_{L-1}} + \ldots + \frac{1}{\Lambda_{l+1}} + T\,. \tag{18}$$

Пусть C_1 — среднее время нахождения системы в состоянии отказа на протяжении цикла. Тогда

$$C_1 = \int_0^T Q_{lm}(t)\,dt\,.$$

Согласно (14) и (15) имеем:

$$C_1 \le 1-\frac{1}{(l-m+2)!}\Lambda_l\,\Lambda_{l-1}\ldots\Lambda_m\,T^{l-m+2} = \overline{C}_1\,, \tag{19}$$

$$C_1 \ge \overline{C}_1\left(1-\frac{\Lambda_l+\Lambda_{l-1}+\ldots+\Lambda_m}{l-m+3}\,T\right) = \underline{C}_1\,. \tag{20}$$

Из (19) и (20) получаем оценку

$$\frac{\underline{C}_1}{C} \le 1-K_Г = \frac{C_1}{C} \le \frac{\overline{C}_1}{C}\,,$$

где C, $\overline{C}_1$ и $\underline{C}_1$ определяются согласно (18)–(20). Относительная погрешность вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Lambda_l + \Lambda_{l-1} + \ldots + \Lambda_m}{l - m + 3} T .$$

Системы с экстренным заказом. В данной системе, если отказ системы не наступает за время T после последнего пополнения, то пополнение происходит именно в этот момент. Допустим, однако, что отказ происходит в момент $t,\ 0 < t < T$. Если при этом $t \ge T - T_1$, то замена происходит в момент T; если же $t < T - T_1$, то в момент t делается заказ, который выполняется в момент $t + T_1$, и в этот момент происходит полное пополнение; следующая плановая замена будет в момент $t + T_1 + T$, и т.д.

Средняя продолжительность цикла определяется следующим образом:

$$C = T\ \mathrm{P}\{\gamma \ge T - T_1\} + \mathrm{E}\{\gamma + T_1;\, \gamma < T - T_1\}, \tag{21}$$

где γ — момент, когда число исправных элементов достигает уровня $m - 1$.

Для плотности $f_\gamma(t)$ случайной величины γ выполняются оценки:

$$f_\gamma(t) \le \frac{\Lambda_L\ \Lambda_{L-1} \ldots \Lambda_m}{(L-m)!} t^{L-m} = \overline{f}_\gamma(t), \tag{22}$$

$$f_\gamma(t) \ge \frac{\Lambda_L\ \Lambda_{L-1} \ldots \Lambda_m}{(L-m)!} t^{L-m} - \frac{\Lambda_L\ \Lambda_{L-1} \ldots \Lambda_m}{(L-m)!} t^{L-m+1} \frac{\Lambda_L + \Lambda_{L-1} + \ldots + \Lambda_m}{L-m+1}. \tag{23}$$

Поскольку

$$\mathrm{P}\{\gamma \ge T - T_1\} = 1 - \int_0^{T-T_1} f_\gamma(t)\, dt ,$$

то из (22) и (23) получаем:

$$\mathrm{P}\{\gamma \ge T - T_1\} \ge 1 - \frac{\Lambda_L\ \Lambda_{L-1} \ldots \Lambda_m}{(L-m+1)!} (T - T_1)^{L-m+1} = \underline{\mathrm{P}}\{\gamma \ge T - T_1\},$$

$$\mathrm{P}\{\gamma \ge T - T_1\} \le \underline{\mathrm{P}}\{\gamma \ge T - T_1\} + \frac{\Lambda_L\ \Lambda_{L-1} \ldots \Lambda_m}{(L-m+1)!} (T - T_1)^{L-m+2} \times$$

$$\times \frac{\Lambda_L + \Lambda_{L-1} + \ldots + \Lambda_m}{L - m + 2} = \overline{\mathrm{P}}\{\gamma \ge T - T_1\} = 1 - \underline{Q}_{Lm}(T - T_1).$$

Для второго слагаемого формулы (21) имеем:

$$\mathrm{E}\{\gamma + T_1;\ \gamma < T - T_1\} = T_1\ Q_{Lm}(T - T_1) + \int_0^{T-T_1} Q_{Lm}(t)\, dt . \tag{24}$$

Использовав неравенства (11)–(13), из (24) найдем границы изменения C, а именно,

$$\underline{C} \le C \le \overline{C}\,.$$

Средняя продолжительность C_1 пребывания системы в неисправном состоянии на цикле вычисляется следующим образом:

$$C_1 = T_1\, Q_{Lm}(T - T_1) + \int\limits_{T-T_1}^{T} f_\gamma(t)\,(T-t)\,dt\,.$$

Подставив найденные выше оценки $Q_{Lm}(t)$ и $f_\gamma(t)$, найдем верхнюю и нижнюю оценки для C_1:

$$\underline{C}_1 \le C_1 \le \overline{C}_1\,.$$

Наконец для K_Γ получаем:

$$1 - \frac{\overline{C}_1}{\underline{C}} \le K_\Gamma \le 1 - \frac{\underline{C}_1}{\overline{\overline{C}}}\,.$$

Уточнение оценок. Из формулы (2) путем разложения экспоненты по степеням ее аргумента и последующего интегрирования можно получить не только оценки (6)–(8), но и оценки любой степени точности. Так, использовав неравенства

$$1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \le e^{-z} \le 1 - z + \frac{z^2}{2}\,,$$

после несложных преобразований получим весьма точную для практических расчетов двустороннюю оценку

$$\underline{\underline{f}}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) \le f_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) \le \overline{\overline{f}}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1})\,, \qquad (25)$$

где

$$\overline{\overline{f}}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) = \Lambda_i \ldots \Lambda_{j+1}\,\frac{t^{i-j-1}}{(i-j-1)!}\left\{1 - \frac{t}{i-j}\sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k + \right.$$

$$\left. + \frac{t^2}{2\,(i-j)\,(i-j+1)}\left[\left(\sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k\right)^2 + \sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^2\right]\right\}, \qquad (26)$$

$$\underline{\underline{f}}_{ij}(t;\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j+1}) = \Lambda_i \ldots \Lambda_{j+1}\,\frac{t^{i-j-1}}{(i-j-1)!}\left\{1 - \frac{t}{i-j}\sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k + \right.$$

$$+\frac{t^2}{2\,(i-j)\,(i-j+1)}\left[\left(\sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k\right)^2+\sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^2\right]-$$

$$-\frac{t^3}{6\,(i-j)\,(i-j+1)\,(i-j+2)}\left[\left(\sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k\right)^3+3\sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^2\sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k+2\sum_{k=j+1}^{i}\Lambda_k^3\right]\Bigg\}. \quad (27)$$

В частном случае $\Lambda_k=\lambda,\; j+1\le k\le i$, имеем:

$$\overline{\overline{f}}_{ij}(t;\lambda)=\frac{\lambda(\lambda t)^{i-j-1}}{(i-j-1)!}\left[1-\lambda t+\frac{1}{2}(\lambda t)^2\right],$$

$$\underline{\underline{f}}_{ij}(t;\lambda)=\frac{\lambda(\lambda t)^{i-j-1}}{(i-j-1)!}\left[1-\lambda t+\frac{1}{2}(\lambda t)^2-\frac{1}{6}(\lambda t)^3\right].$$

Эти оценки можно получить и непосредственно из точного выражения

$$f_{ij}(t;\lambda)=\frac{\lambda(\lambda t)^{i-j-1}}{(i-j-1)!}\,e^{-\lambda t}$$

(действительно, в этом случае $f_{ij}(t;\lambda)$ представляет собой плотность распределения Эрланга порядка $i-j$).

Используя оценки (25)–(27), легко получить уточненные оценки характеристик, рассмотренных выше. Ввиду очевидности, подробности опускаем; заметим лишь, что все полученные оценки представляют собой полиномы по t и Λ_k, что очень удобно при расчете и оптимизации.

1. *Barlow R.E., Proshan F.* Statistical theory of reliability and life testing. — New York: Reinehart and Winston, 1975.

2. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. — С-Пб: Политехника, 2000.

3. *Рябинин И.А., Черкесов Г.Н.* Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. — М.: Радио и связь, 1981. — 264 с.

4. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. — К.: Наук. думка, 1976. — 184 с.

5. *Анисимов В.В., Война А.А.* Марковские и полумарковские процессы. — К.: Киевский государственный университет им. Т.Г.Шевченко, 1986.

6. *Сильвестров Д.С.* Полумарковские системы со счетным пространством состояний. Оценка функциональных и надежностных характеристик стохастических систем. — М.: Сов. Радио, 1980.

7. *Birolini A.* Reliability Engineering. Theory and Practice. — Berlin: Springer, 2004. — 544 p.

8. *Trivedi K.S.* Probability and Statistics with Reliability, Queueing, and Computer Science Applications. — New York: Wiley, 2002. — 830 p.

9. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ. — М.: Наука, 1965. — 524 с.

10. Вопросы математической теории надежности / *Е.Ю. Барзилович, Ю.К. Беляев, В.А. Каштанов и др.*; Под ред. Б.В.Гнеденко. — М.: Радио и связь, 1983. — 376 с.

11. *Барзилович Е.Ю., Каштанов В.А.* Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. — М.: Советское радио, 1971. — 272 с.

12. *Черкесов Г.Н.* Надежность аппаратно-программных комплексов: Учебное пособие. С-Пб: Питер, 2005. — 480 с.

13. *Gertsbakh I.* Reliability Theory with Applications to Preventive Maintenance. — Berlin: Springer, 2000.

14. *Креденцер Б.П.* Прогнозирование надежности систем с временной избыточностью. — К.: Наук. думка, 1978. — 240 с.

15. *Jensen U.* Stochastic Models of Reliability and Maintenance: An Overview. — In the book: Reliability and Maintenance of Complex Systems / S.Özekici (Ed.). — Berlin: Springer, 1996. — P. 3–35.

16. *Van der Duyn Schouten F.* Maintenance Policies for Multicomponent Systems. — In the book: Reliability and maintenance of complex systems / S.Özekici (Ed.). — Berlin: Springer, 1996. — P. 117–136.

17. *Gnedenko B., Ushakov I.* Probabilistic Reliability Engineering. — New York: Wiley, 1995.

18. *Гнеденко Б.В.* О ненагруженном дублировании // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1964. — № 4. — С. 3–12.

19. *Соловьев А.Д.* Резервирование с быстрым восстановлением // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1970. — № 1. — С. 56–71.

20. *Соловьев А.Д.* Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1971. —№ 6. — С. 79–89.

21. *Коваленко И.Н.* Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. — М.: Сов. Радио, 1980. — 208 с.

22. *Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A.* Mathematical Theory of Reliability of Time-Dependent Systems with Practical Applications // J. Wiley & Sons, Chichester, 1997. — 303 p.

23. *Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю.* Методы расчета высоконадежных систем. — М.: Радио и связь, 1988. — 176 с.

24. *Borovkov A.A.* Asymptotic Expansions for Functionals of Dilations of Point Processes. — INRIA, Sophia-Antipolis (Internet), 2002. — P. 1–27.

25. *Kovalenko I.N., Atkinson J.B., Mykhalevych K.V.* Three Cases of Light-Traffic Insensitivity of the Loss Probability in a GI/G/m/0 Loss System to the Shape of the Service Time Distribution // Queueing Systems. — 2003. — **45**. — P. 245–271.

26. *Баум Д., Коваленко І.М.* Оцінка ймовірності втрати в системі обслуговування типу MAP/G/m/0 за умови малого навантаження // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2004. — **71.** — С. 15–21.

27. Технический проект «Системы и ЦОИ»: Отчет / Институт проблем регистрации информации. — К., 2006.

Поступила в редакцию 30.07.2007