УДК 519.68; 620.179.15; 681.3

**М. В. Синьков, Я. А. Калиновский,**
**Ю. Е. Бояринова, А. В. Федоренко**
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

# О дифференциальных уравнениях, определяющих некоторые функции гиперкомплексного переменного

*Рассмотрен один метод упрощения решения дифференциального уравнения, определяющего такие нелинейные функции от гиперкомплексного переменного как гиперболические и тригонометрические.*

***Ключевые слова:*** *дифференциальное уравнение, гиперкомплексные числа, нелинейная функция.*

Гиперкомплексные числовые системы [1] находят все более широкое применение в науке и технике, что требует разработки методов эффективной обработки информации, представленной в гиперкомплексной форме. В настоящее время разработаны методы проведения арифметических и алгебраических операций над гиперкомплексными числами построения нелинейностей [2], рассмотрены аналитические методы решения некоторых дифференциальных уравнений от гиперкомплексного переменного и с гиперкомплексными коэффициентами [3–8]. Построение представления таких нелинейностей как гиперболические и тригонометрические функции требует решения системы линейных дифференциальных уравнений высокого порядка, что вызывает известные трудности. Поэтому очень важным является снижение размерности таких систем.

Дифференциальные уравнения, определяющие тригонометрические и гиперболические функции от гиперкомплексного переменного, имеют вид:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \pm M^2 X, \tag{1}$$

где $X$ и $M$ — гиперкомплексные величины.

Если проделать все операции в правой части уравнения (1) в соответствии с законом композиции гиперкомплексной числовой системы, то она может быть представлена в виде:

© М. В. Синьков, Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. В. Федоренко

$$M^2X = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) e_i , \tag{2}$$

а уравнение (1) можно представить в виде системы :

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j , \quad i = 1,...,n. \tag{3}$$

При этом знаки в правой части (1) учтены знаками при $a_{ij}$.

Система (3) линейных дифференциальных уравнений второй степени превращается в систему уравнений первой степени путем введения фиктивных переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = y_i , \quad i = 1,...n, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j . \end{cases} \tag{4}$$

Однако при таком преобразовании размерность системы увеличивается вдвое и равна $2n$.

Для решения (4) необходимо составить характеристическую матрицу правой части. Она будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Для вычисления определителя этой матрицы каждую $k$-ю строку ($1 \le k \le n$) умножим на $\lambda$ и добавим к ($k + n$)-й строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_{11}-\lambda^2 & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda^2 & \ldots & a_{2n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Раскрытием этого определителя по последним $n$ столбцам можно придти к определителю:

$$\Delta = (-1)^N \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda^2 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda^2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda^2 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Если ввести обозначение:

$$\lambda^2 = \mu,$$

то уравнение

$$\Delta = 0 \tag{8}$$

будет иметь степень $n$ и его решение гораздо проще, чем решение уравнения (6).

Работа выполнена благодаря поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины.

1. *Синьков М.В., Губарени Н.М.* Непозиционные представления в многомерных числовых системах. — К.: Наук. думка., 1979. — 138 с.

2. *Синьков М.В., Калиновский Я.А, Роенко Н.В.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 178–181.

3. *Калиновский Я.А.* Разработка алгоритмов решения однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка от гиперкомплексного переменного // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 1. — С. 22–29.

4. *Patrick Reany.* Complex Clifford Algebra and Nth-Order Linear Differential Equations // Applied Clifford Algebras. — 1993. — **3**, N 2. — P. 121–127. On line: www.ajnpx.com/pdf/math/Clifford/CAA&LIN_DIFF.pdf.

5. *Kähler U.* Die Anwendung der Hyperkomplexen Funktionentheorie auf Die Losung Partieller Differentialgleichungen. — 1998. On line: www.tu-chemnitz.de/mathematik/prom_habil/promint.pdf.

6. *Kähler U.* Clifford Analysis and the Navier-Stokes Equations over Unbounded Domains // Applied Clifford Algebras. — 2001. — **11** (S2). — Special issue «Clifford analysis». — P. 305–318. On line: www.mat.ua.pt/uwek/publications.html.

7. *Gibbon J.D.* A Quaternionic Structure in the Three-Dimensional Euler and Ideal MHD Equations. On line: www.ma.ic.ac.uk/~jdg/quat2.pdf. 2001.

8. *S. De Leo, Ducati C.C.* Solving Simple Quaternionic Differential Equations // J. Math. Physic. — 2003. — **44**. — P. 2224-2233.

Поступила в редакцию 04.09.2006