

УДК 519.816

С. В. Каденко

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Визначення відносної вагомості критеріїв на основі ординальних оцінок

Викладено метод визначення коефіцієнтів відносної вагомості критеріїв на основі ординальних оцінок альтернатив. Метод є ітераційним і працює аналогічно алгоритмам навчання нейронних мереж. Запропоновано опис покрокової роботи алгоритму та результатів його тестування. Наведено ілюстративні приклади та таблиці, що пояснюють роботу описаного методу.

Ключові слова: прийняття рішень, ординальні оцінки, ранжирування, коефіцієнт відносної вагомості, алгоритми навчання, епоха навчання.

Вступ

На сучасному етапі експертне оцінювання застосовується в найрізноманітніших галузях економіки, науки та освітньо-культурної сфери. Особливе місце в експертному оцінюванні та підтримці прийняття рішень займають ординальні оцінки, або ранжирування. Ординальне оцінювання має місце у випадках, коли важко, або неможливо визначити точні абсолютні або відносні значення характеристик об'єктів (альтернатив). У таких ситуаціях експертам пропонується побудувати ранжирування альтернатив, тобто розташувати їх у порядку зростання або спадання ступеня виразності заданої характеристики. На практиці ординальне оцінювання застосовується при відборі кандидатів на вакантні посади, складанні виборчих списків, оцінці результатів тестів, спортивних змагань, конкурсів, порівнянні проектів, що конкурують між собою, тощо.

Під час побудови групових та багатокритеріальних оцінок відповідно слід враховувати відносну компетентність експертів та вагомість критеріїв оцінки альтернатив. Групове ранжирування будується на основі зваженої суми індивідуальних ранжирувань, причому в ролі ваг виступають показники відносної компетентності експертів. При побудові багатокритеріальних оцінок підсумкове ранжирування (або ранжирування за глобальним критерієм) також визначається на базі зважених сум однокритеріальних рангів, але у ролі ваг у цьому випадку виступають коефіцієнти відносної важливості критеріїв.

© С. В. Каденко

Раніше вже розглядалася задача визначення прогнозованих ординальних оцінок з урахуванням досвіду особи, що приймає рішення [1] (метою було визначення місця нової альтернативи у наявному ранжируванні), а також — проблема побудови підсумкового ранжирування з урахуванням відносної компетентності експертів та коефіцієнтів важливості критеріїв (яка фактично вирішується за допомогою модифікованих методів Борда та Кондорсе [2]). Задача визначення коефіцієнтів вагомості критеріїв на основі однокритеріальних ранжирувань та підсумкового ранжирування, яке мусить зберігатися, — дещо складніша, і знаходження розв'язку (якщо такий взагалі існує) потребує більш значних зусиль. Далі наводиться строга постановка задачі, а також розглядаються можливості та шляхи її розв'язання.

Постановка задачі

Дано:

- 1) $\{A_i\}, i = 1, \dots, m$ — множина альтернатив;
- 2) $\{K_j\}, j = 1, \dots, n$ — множина критеріїв оцінки альтернатив;
- 3) ранжирування альтернатив за кожним з критеріїв $\{r_{ij}\}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n; r_{ij}$ — оцінка (ранг) i -ї альтернативи за j -м критерієм;
- 4) підсумкове ранжирування (ранжирування альтернатив за глобальним критерієм) $\{g_i\}, i = 1, \dots, m$.

Треба знайти нормовані коефіцієнти відносної вагомості критеріїв оцінки альтернатив $\{w_j\}, j = 1, \dots, n, w_1 + \dots + w_n = 1$.

Особливості постановки задачі

Одразу слід зазначити, що через утрату інформації точний розв'язок задачі знайти неможливо. Проілюструємо це на простому прикладі. Припустимо, на основі ординальних оцінок п'яти альтернатив за трьома критеріями будується підсумкове ранжирування за глобальним критерієм (табл. 1). При цьому коефіцієнти відносної вагомості критеріїв дорівнюють відповідно 0,14, 0,28 та 0,58.

Таблиця 1

Вагомість	$W_1 = 0,14$	$W_2 = 0,28$	$W_3 = 0,58$	Зважені суми рангів	Підсумкове ранжирування $\{g\}$
Критерії	K_1	K_2	K_3		
A_1	3	1	1	$3 \cdot 0,14 + 1 \cdot 0,28 + 1 \cdot 0,58 = 1$	1
A_2	4	3	5	4,30	5
A_3	2	2	4	3,16	3
A_4	5	4	3	3,56	4
A_5	1	5	2	2,70	2

Якщо у постановці задачі, що наведена вище, у якості підсумкового ранжирування виступатиме вектор зважених сум рангів (нецілих чисел), то для її розв'язання можна застосовувати будь-який із методів лінійного програмування (метод найменших квадратів, метод багатовимірної лінійної екстраполяції, метод

групового врахування аргументів, метод мінімізації нев'язок [1]), або алгоритм навчання одношарового перцептрона Розенблата [3].

У дійсності, якщо невідома вагомість критеріїв, то невідомі і зважені суми рангів. У термінах наведеної постановки задачі нам невідомий четвертий стовпчик матриці. Підсумкове ранжирування $\{g\}$ несе інформацію не про реальні значення зважених сум, а лише про їх співвідношення, тобто, про порядок розташування альтернатив за глобальним критерієм. Отже, як бачимо, під час переходу до підсумкового ранжирування відбувається втрата інформації. Тому розв'язання задачі ґрунтуватиметься на наступних принципах:

- 1) інформацію слід видобувати не з абсолютних значень глобальних рангів, а із співвідношення між ними;
- 2) знаходження коефіцієнтів вагомості критеріїв здійснюється з урахуванням структури елемента ієрархії критеріїв, або експертної групи (рис. 1);
- 3) умові задачі відповідає область простору розмірності n , і кожне значення з цієї області можна вважати розв'язком. Якщо область порожня, то розв'язків не існує.

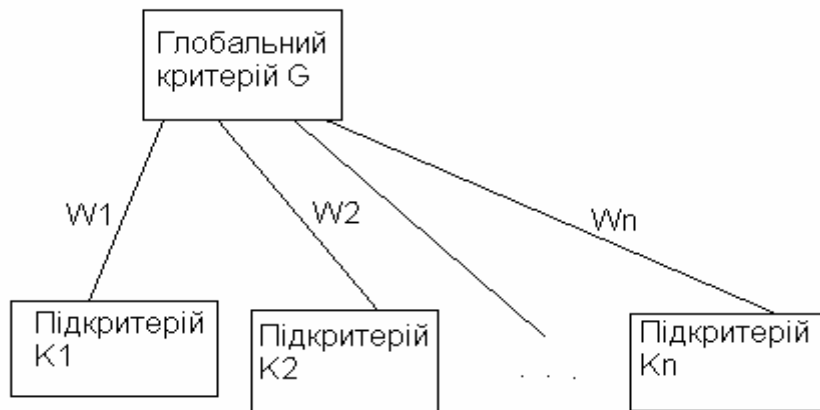


Рис. 1

Відсутності розв'язків можна зіставити реальну ситуацію, коли оцінки за критерієм, що обраний в якості глобального, не залежать від оцінок за підкритеріями.

Розглянемо приклад: нехай у ролі альтернатив виступають політичні партії, що беруть участь у виборах, в якості оцінок за глобальним критерієм обрано їхні рейтинги, а підкритеріями є різні пункти передвиборчих програм. Припустимо, метод не дає результатів: вагомість різних пунктів програм партій не стабілізується в ході розв'язання задачі: область розв'язків порожня. Таку ситуацію можна витлумачити наступним чином: успіх партії на виборах залежить не від пріоритетних напрямків її програми, а від інших підкритеріїв, наприклад, від обсягу коштів, яку вона вклала в передвиборчу кампанію.

Покроковий алгоритм розв'язання

Алгоритм є ітераційним і працює аналогічно алгоритмам навчання нейронних мереж [4]. Спочатку задаються довільні значення ваг, які у подальшому корегуються («настроюються») на основі обмежень.

Крок 1. Розташовуємо альтернативи у порядку зменшення підсумкових рангів альтернатив. Сортування зумовлено тим, що для опису впорядкованої таким чином множини альтернатив знадобиться мінімальна кількість нерівностей (див. крок 2). Вигляд результату сортування для прикладу з табл. 1 наведений у табл. 2.

Таблиця 2

Критерії	K_1	K_2	K_3	Підсумкове ранжирування $\{g\}$
A_2	4	3	5	5
A_4	5	4	3	4
A_3	2	2	4	3
A_5	1	5	2	2
A_1	3	1	1	1

Крок 2. Будуємо матрицю обмежень $\{a_{ij}\}$: $i = 1, \dots, m - 1$; $j = 1, \dots, n$; $a_{ij} = r_{i+1,j} - r_{ij}$.

У табл. 3 наведено матрицю обмежень, що відповідає даним табл. 2.

Таблиця 3

$-1 = 4 - 5$	$-1 = 3 - 4$	$2 = 5 - 3$
$3 = 5 - 2$	$2 = 4 - 2$	$-1 = 3 - 4$
1	-3	2
-2	4	1

На основі матриці можемо побудувати систему нерівностей, яка визначає область допустимих значень коефіцієнтів вагомості критеріїв (або компетентності експертів):

$$\begin{aligned} -w_1 - w_2 + 2 w_3 &> 0, \\ 3 w_1 + 2 w_2 - w_3 &> 0, \\ w_1 - 3 w_2 + 2 w_3 &> 0, \\ -2 w_1 + 4 w_2 + w_3 &> 0. \end{aligned}$$

У геометричній інтерпретації кожній нерівності відповідає гіперплощина, що проходить через початок координат (рис. 2). Коефіцієнти нерівності відповідають координатам нормалі до гіперплощини. Область розв'язків — це частина простору розмірності n , обмежена гранями одиничного гіперкуба та двома гіперплощинами, що відповідають парі нерівностей, які «сильніші» за решту, а відтак, утворюють найменший кут. Дві вершини гіперкуба мають відповідно координати $(0, \dots, 0)$ та $(1, \dots, 1)$, а решта — лежать на осях координат, оскільки коефіцієнт вагомості кожного критерію належить проміжку $(0, 1)$.

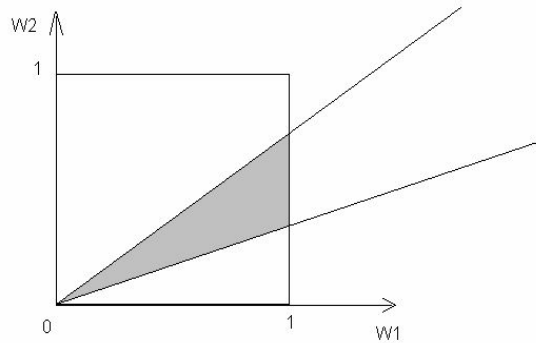


Рис. 2

Крок 3. Перевіряємо систему нерівностей на сумісність. Якщо система несумісна, то область розв'язків — порожня, а відтак, шукати ваги недоцільно. Для перевірки системи на сумісність можна скористатися методом Монте-Карло (згенерувати велику кількість точок всередині вищезгаданого n -мірного одиничного гіперкуба: якщо жодна з них не задовольнить усієї системи, вважати, що область розв'язків — порожня), або попарно перевірити взаємне розташування гіперплощин, що відповідають нерівностям (якщо довільна точка, що лежить у куті між гіперплощинами, не задовольняє відповідним нерівностям, то вони — несумісні, а, отже, система не має розв'язків). На рис. 3 показано точку, яка задовольняє обмеженням.

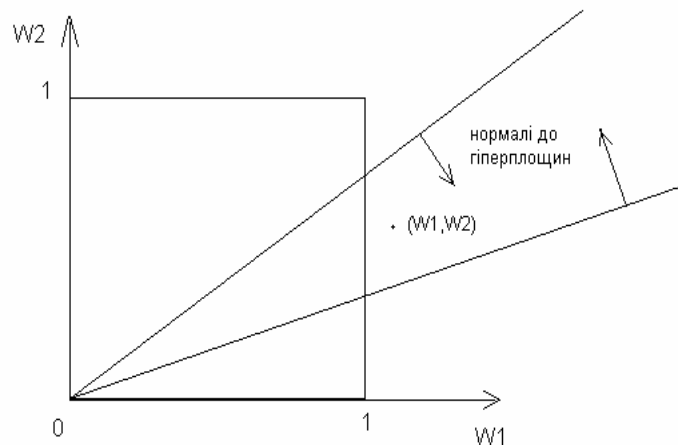


Рис. 3

Утім, для випадків, на які розрахований алгоритм, вважається що розв'язок існує, тобто залежність підсумкового ранжирування від локальних ранжирувань і ваги не змінюються із часом, і відображають вплив підкритеріїв на глобальний критерій.

Крок 4. Обираємо початкові значення ваг $w_j(t = 0)$, $j = 1, \dots, n$, та темп навчання η . Якщо про співвідношення ваг немає ніякої додаткової інформації, пропонується задавати всі ваги рівними: $w_j = 1/n$. Порядок темпу навчання мусить бути меншим, ніж порядок ваг. Тому доцільно задати мінімальне можливе значення

вагомості окремого критерію. Ієрархії критеріїв, з якими доводиться мати справу експертам, повинні відповідати психофізичним обмеженням людини: не слід будувати структури, де число підкритеріїв одного глобального критерію перевищує 7 ± 2 . Саме цими міркуваннями можна керуватися при визначенні мінімального допустимого значення коефіцієнта вагомості.

Крок 5. Перевіряємо, чи виконується перша нерівність системи

$$a_{11} * w_1 + \dots + a_{1n} * w_n > 0$$

для початкових значень ваг. Якщо виконується, переходимо до наступної нерівності. Якщо не виконується, змінюємо ваги наступним чином:

$$w_j(t + 1) = w_j(t) + \eta * a_{ij}, j = 1, \dots, n$$

(для нерівності з номером i) поки нерівність не виконається.

Геометрично даній процедурі відповідає зсув точки початку навчання вздовж нормалі до гіперплощини, що задана лівою частиною нерівності (рис. 4). Відповідно кожна j -а складова швидкості цього зсуву дорівнює $\eta * a_{ij}$, $j = 1, \dots, n$ (j — номер координати, i — номер нерівності, тобто, гіперплощини).

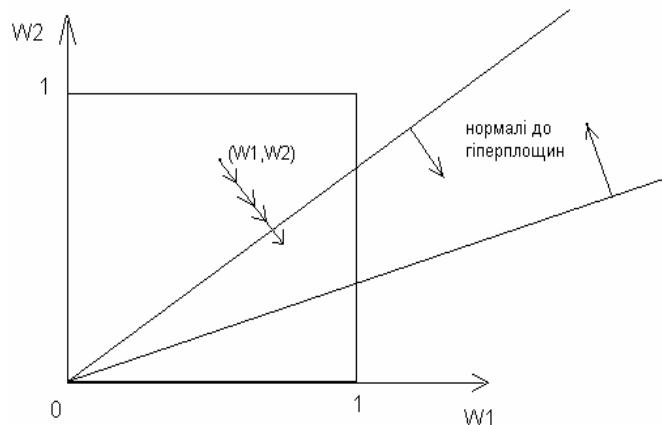


Рис. 4

Крок 6. Нормуємо ваги за сумою модулів:

$$w_j \text{ нормоване} = w_j / (|w_1| + \dots + |w_n|); j = 1, \dots, n.$$

Якщо на етапі постановки задачі сформульовано вимогу невід'ємності ваг, то:

$$w_j \text{ нормоване} = w_j / (w_1 + \dots + w_n); j = 1, \dots, n.$$

Геометрично процедурі нормування відповідає проекція знайденої точки W на симплекс (фігуру, яка задається умовою $w_1 + \dots + w_n = 1$) вздовж променя OW (рис. 5).

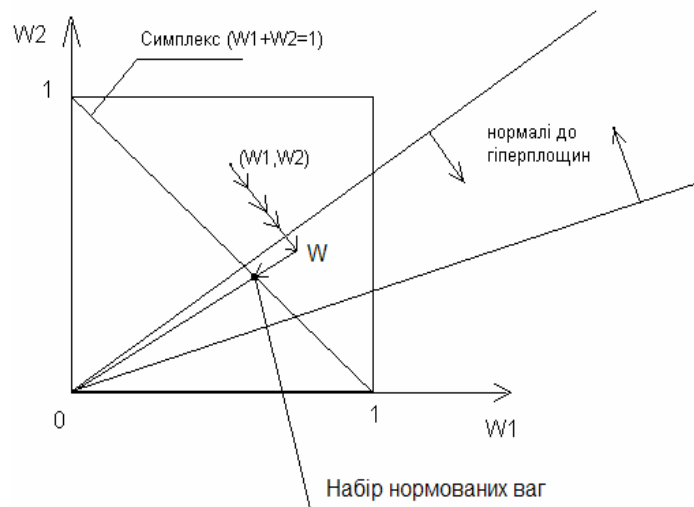


Рис. 5

Крок 7. Коли досягнуто останньої нерівності (закінчено одну епоху навчання), переходимо знов до першої і повертаємось до 5-го кроку алгоритму. Якщо протягом епохи ваги не змінилися, тобто дві епохи навчання поспіль дають один результат, то алгоритм закінчив роботу.

Якщо кількість епох велика, а ваги не стабілізуються, то вважаємо, що область допустимих значень — порожня (її розміри менше порядку темпу навчання, який може бути скільки завгодно малим), а відтак, набору ваг, який задовольняв би умові задачі, не існує. Втім, якщо на 3-му кроці перевірка системи нерівностей на сумісність дала позитивний результат, або апріорі відомо, що вхідні дані узгоджені між собою, тобто розв'язок існує, то його буде знайдено.

Результати тестування алгоритму

Як уже зазначалося, для визначення точності роботи алгоритму на вхід по чергово подавалися тестові приклади, сформовані на основі незмінних точних значень коефіцієнтів вагомості критеріїв. У якості показника точності було обрано математичне сподівання модуля відносної помилки обчислення ваг:

$$M = (1/n) * \left(\sum_{j=1}^n |w_{j \text{ знайдене}} - w_{j \text{ точне}}| / w_{j \text{ точне}} \right) * 100 \%,$$

де n — кількість підкритеріїв.

Побудова тестового прикладу відбувалася наступним чином:

- 1) довільно задавалася сукупність (матриця) однокритеріальних ранжирувань r_{ij} : $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$;
- 2) задавалися еталонні значення ваг $w_j, j = 1, \dots, n$;
- 3) за однокритеріальними (локальними) ранжируваннями будувалося підсумкове ранжирування з урахуванням відносної вагомості критеріїв.

Для проведення експерименту були задані наступні значення параметрів: $m = 10$, $n = 3$, $\eta = 0,001$, $w_1 = 0,14$, $w_2 = 0,28$, $w_3 = 0,58$, $k = 500$, де k — кількість прикладів в одній серії. На кожному прикладі на вхід алгоритму подавалися значення ваг, отримані під час навчання на попередньому прикладі. Ще раз зазначимо, що в загальному випадку помилка не обов'язково буде монотонно спадати, оскільки алгоритм не має пам'яті, тобто не зберігає відомостей про обмеження, заданими попередніми прикладами. Для пояснення розглянемо приклад, що показаний на рис. 6.

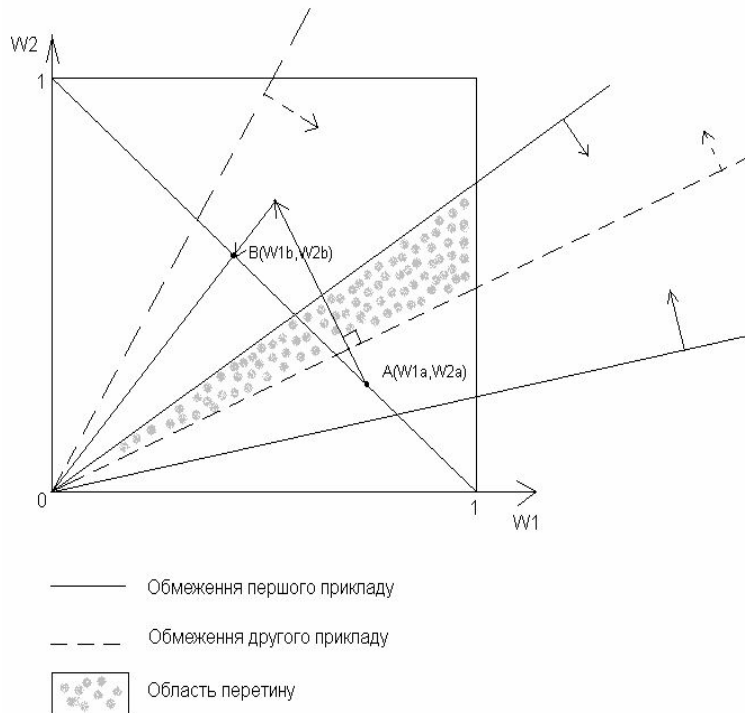


Рис. 6

Як бачимо, під час настроювання ваг ми потрапляємо з точки A , яка відповідає лише обмеженням з першого прикладу, в точку B , що задовольняє лише обмеження другого прикладу. У разі, коли область перетину досить «вузька», подібна ситуація цілком можлива. Можна використовувати для навчання одразу всі обмеження, що відповідають сукупності наявних прикладів. Тоді розв'язок гарантовано потрапить до області перетину.

При заданих параметрах $m = 10$, $n = 3$, $\eta = 0,001$, $w_1 = 0,14$, $w_2 = 0,28$, $w_3 = 0,58$, $k = 500$, де k — кількість прикладів в одній серії, мінімальне значення математичного сподівання модуля відносної помилки на одинадцяти серіях тестових прикладів дорівнювало 0,18 %. Зазначимо, що, якщо помилка менша за порядок темпу навчання, це може вважатися цілком задовільним результатом. У вказаному випадку порядок темпу навчання дорівнює:

$$((\eta / w_1 \text{ точне}) + (\eta / w_2 \text{ точне}) + (\eta / w_3 \text{ точне})) * 100 \% = 0,41 \%$$

У табл. 4 наведені результати тестування для різних значень m , η та k при $n = 3$, $w_1 = 0,14$, $w_2 = 0,28$, $w_3 = 0,58$.

Таблиця 4

m	η	k	Номер серії	Номер прикладу, на якому досягається дане значення помилки	Математичне сподівання помилки M , %	Монотонне спадання помилки
10	0,001	500	1	300	0,59	–
			2	14	0,42	+
			3	131	0,28	–
			4	41	0,36	+
			5	177	0,54	–
			6	495	0,64	–
			7	79	0,61	+
			8	230	0,23	–
			9	358	0,65	–
			10	299	0,32	–
			11	136	0,18	–
10	0,0001	2000	1	127	1,74	–
			2	219	1,67	–
			3	33	1,62	–
			4	332	0,83	+
			5	927	0,72	+
			6	510	1,58	–
			7	1045	0,64	+
			8	169	0,73	+
			9	135	1,71	–
			10	207	1,37	–
10	0,001	1000	1	5	0,51	–
			2	9	0,47	+
			3	42	0,64	+
			4	4	0,30	+
			5	8	0,51	–
			6	7	0,53	+
			7	40	0,64	+
			8	11	0,37	+
			9	8	0,51	+
			10	12	0,31	–
6	1000	0,001	1	58	3,32	+
			2	789	2,50	+
			3	290	3,10	+
			4	255	2,89	+

Продовження табл. 4

			5	39	2,87	+
			6	9	1,74	+
			7	16	1,79	+
			8	264	4,01	+
			9	20	4,24	+
			10	108	2,07	+
			11	1	1,85	+
4	1000	0,001	1	95	9,64	+
			2	3	1,85	+
			3	2	2,51	+
			4	55	9,39	+
			5	37	9,88	+
			6	17	7,84	+
			7	57	9,39	+
			8	131	9,32	+
			9	84	9,25	+
			10	68	9,46	+
			11	1	1,85	+

Якщо існує набір ваг, що задовольняє умовам задачі, то кількість епох, які потрібні для збіжності методу, як правило, не перевищує 100. У табл. 5 наведені результати відповідних тестів.

Таблиця 5

m	n	Кількість запусків методу	Середня кількість епох, які потрібні для стабілізації ваг
10	3	50	2,18
20	3	50	2,64
5	3	30	1,69
20	10	20	12,85

Дані, наведені в таблиці, вказують на те, що, якщо ваги не стабілізуються за досить велику кількість епох (порядку декількох тисяч), то область їхніх значень можна вважати порожньою.

Висновки: реальні можливості застосування методу

У дійсності реальне співвідношення між ранжируваннями альтернатив за підкритеріями та за глобальним критерієм, а також показники їхньої відносної вагомості критеріїв, визначені за допомогою методу, відбиватимуть характер їхнього впливу. Якщо глобальний критерій справді залежить від підкритеріїв, то метод даватиме позитивні результати. У протилежному випадку (коли глобальний критерій не залежить від підкритеріїв, і оцінки за ним не будуть пов'язані з однокри-

теріальними ранжируваннями), метод, відповідно, не буде збігатися до жодного значення.

Якщо залежність глобального критерію від локальних не змінюється з часом, то на різних вихідних даних результати роботи метода будуть приблизно однако-вими і вихідне підсумкове ранжирування зберігатиметься на усіх навчальних приладах.

Отже, за умови узгодженості локальних та глобальних ранжирувань, а також взаємної сумісності навчальних прикладів метод може успішно використовувати-ся для визначення коефіцієнтів вагомості критеріїв.

1. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. — К.: Наукова думка, 2002. — 382 с.

2. Тоценко В.Г. Методы определения групповых многокритериальных ординальных оценок с учетом компетентности экспертов // Проблемы управления и информатики. — 2005. — № 5. — С. 84–89 (Method of Determination of Group Multicriteria Ordinal Estimates with Account of Expert Competence // Journal of Automation and Information Sciences. — 2005. — Vol. 37).

3. Терехов С.А. Лекции по теории и приложениям искусственных нейронных сетей». — Эле-ктронная версия // Лаборатория Искусственных Нейронных Сетей НТО-2. — Снежинск: ВНИИТФ, 1998. — Глава 4.

4. Стелак Г. Интеллектуальные системы поддержки принятия решений. — К., 2004. — С. 75–83.

Поступила в редакцию 31.05.2006