УДК 004.942

М. В. Синьков, Я. А. Калиновский,
Ю. Е. Бояринова, А. В. Федоренко
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Построение некоторых функций в гиперкомплексной числовой системе 4-го порядка

Рассмотрены вопросы построения таких обратных функций как логарифм, гиперболические и тригонометрические арксинус и арккосинус. Приведены примеры построения обратных функций для гиперкомплексной числовой системы 4-го порядка.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, обратные функции, логарифм, гиперболические и тригонометрические арксинус и арккосинус.*

Многочисленные работы отечественных и зарубежных ученых показывают, что во многих случаях использование гиперкомплексных числовых систем дает новые возможности в решении различных практических задач. К ним относятся задачи ориентации и навигации подвижных тел [1, 2], задача разделения секрета [3, 4], цифровая фильтрация [5, 6] и др.

Среди различных нелинейностей, встречающихся в моделировании, обратные функции играют всегда важную роль [7]. Суть метода нахождения обратных функций [8] состоит в следующем: для известной прямой функции $F(X)$ от гиперкомплексного аргумента $X=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ можно построить обратную функцию $F^{-1}(Y)$, которая будет определяться соотношением:

$$F^{-1}(Y) = F^{-1}(F(X)) = X\,. \tag{1}$$

Изображения таких нелинейностей как экспонента, гиперболические и тригонометрические функции представляют собой гиперкомплексные функции [9]. Тогда изображение обратной функции имеет вид:

$$F^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,..,x_n)\cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i\,. \tag{2}$$

Таким образом, для получения обратной функции достаточно выполнения того, что аргумент соотношения (2) будет гиперкомплексной переменной:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,..,x_n)\cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot e_i . \tag{3}$$

Соотношение (3) можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1,...,x_n) = y_1, \\ \qquad \dots \\ f_n(x_1,...,x_n) = y_n, \end{cases} \tag{4}$$

которую можно решить относительно переменных $x_1,...,x_n$. Подставив в (2) полученные значения (4), получим изображение обратной функции:

$$F^{-1}(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(y_1,...,y_n)\cdot e_i . \tag{5}$$

Рассмотрим построение некоторых обратных функций для гиперкомплексной числовой системы $R \oplus \Gamma_{31}$, которая соответствует следующей таблице умножения:

	e1	e2	e3	e4
e1	e1	0	0	0
e2	0	e2	e3	e4
e3	0	e3	0	0
e4	0	e4	0	0

В системе гиперкомплексных чисел $R \oplus \Gamma_{31}$ экспонента имеет вид:

$$\mathrm{Exp}\,(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4) = e^{m_1}\cdot e_1 + e^{m_2}e_2 + m_3e^{m_2}e_3 + m_4e^{m_2}e_4 . \tag{6}$$

Построив систему уравнений (4)

$$\begin{cases} e^{m_1} = x_1, \\ e^{m_2} = x_1, \\ m_4e^{m_2} = x_3, \\ m_4e^{m_2} = x_4, \end{cases} \tag{7}$$

получим ее решение:

$$\begin{aligned} m_1 &= \ln x_1, \\ m_2 &= \ln x_2, \\ m_3 &= \frac{x_3}{x_2}, \\ m_4 &= \frac{x_4}{x_2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Необходимо выполнение следующего условия: $x_2 \neq 0$.

Тогда изображение логарифмической функции в системе $R \oplus \Gamma_{31}$ можно записать как:

$$\mathrm{Ln}(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = \ln x_1 \cdot e_1 + \ln x_2 e_2 + \frac{x_3}{x_2}e_3 + \frac{x_4}{x_2}e_4. \tag{9}$$

В системе гиперкомплексных чисел $R \oplus \Gamma_{31}$ синус имеет вид:

$$\begin{gathered} \mathrm{Sin}\,(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4) = \\ = \sin m_1 \cos m_2 e_1 + \cos m_1 \sin m_2 e_2 + \sin m_3 \cos m_4 e_3 + \cos m_3 \sin m_4 e_4. \end{gathered} \tag{10}$$

Строим систему уравнений (4):

$$\begin{cases} \sin m_1 \cos m_2 = x_1, \\ \cos m_1 \sin m_2 = x_2, \\ \sin m_3 \cos m_4 = x_3, \\ \cos m_3 \sin m_4 = x_3. \end{cases} \tag{11}$$

Решением системы (11) являются следующие выражения:

$$\begin{aligned} m_1 &= \pm\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{\alpha + 1 - x_2^2 + x_1^2}}{\sqrt{1 + \alpha + x_2^2 - x_1^2}}, \\ m_2 &= \pm\mathrm{arctg}\,\frac{x_2(-1 + x_2^2 - x_1^2 + \alpha)}{2x_1\sqrt{1 + \alpha + x_2^2 - x_1^2} \cdot \sqrt{\alpha + 1 - x_2^2 + x_1^2}}, \\ m_3 &= \pm\mathrm{arctg}\,\frac{x_3(-1 + x_3^2 - x_4^2 + \beta)}{x_4\sqrt{1 + \beta + x_3^2 - x_4^2} \cdot \sqrt{\beta + 1 - x_3^2 + x_4^2}}, \\ m_4 &= \pm\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1 + \beta - x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{1 - \beta + x_3^2 - x_4^2}}. \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\alpha = \sqrt{x_2^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^2 + x_1^4 - 2x_1^2 + 1}\,,$$
$$\beta = \sqrt{x_3^4 - 2x_4^2x_3^2 - 2x_3^2 + x_4^4 - 2x_4^2 + 1}\,. \qquad (13)$$

В качестве главных возьмем значения со знаком «+». С учетом обозначений (13) арксинус будет иметь вид:

$$\mathrm{Arc}\sin(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4) =$$
$$= \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\alpha + 1 - x_2^2 + x_1^2}}{\sqrt{1 + \alpha + x_2^2 - x_1^2}}e_1 + \mathrm{arctg}\frac{x_2(-1 + x_2^2 - x_1^2 + \alpha)}{2x_1\sqrt{1 + \alpha + x_2^2 - x_1^2}\cdot\sqrt{\alpha + 1 - x_2^2 + x_1^2}}e_2 +$$
$$+ \mathrm{arctg}\frac{x_3(-1 + x_3^2 - x_4^2 + \beta)}{x_4\sqrt{1 + \beta + x_3^2 - x_4^2}\cdot\sqrt{\beta + 1 - x_3^2 + x_4^2}}e_3 + \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1 + \beta - x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{1 - \beta + x_3^2 - x_4^2}}e_4. \qquad (14)$$

В системе гиперкомплексных чисел $R \oplus \varGamma_{31}$ косинус имеет вид:

$$\mathrm{Cos}\,(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4) =$$
$$= \cos m_1 \cos m_2 e_1 - \sin m_1 \sin m_2 e_2 + \cos m_3 \cos m_4 e_3 - \sin m_3 \sin m_4 e_4. \qquad (15)$$

Строим систему уравнений (4):

$$\begin{cases} \cos m_1 \cos m_2 = x_1, \\ -\sin m_1 \sin m_2 = x_2, \\ \cos m_3 \cos m_4 = x_3, \\ -\sin m_3 \sin m_4 = x_3. \end{cases} \qquad (16)$$

Решением системы (16) являются выражения:

$$m_1 = \pm\mathrm{arctg}\frac{x_2\sqrt{\pm\alpha + 1 + x_2^2 - x_1^2}\sqrt{1 \pm \alpha - x_2^2 + x_1^2}}{x_1(-1 - x_2^2 + x_1^2 \pm \alpha)},$$
$$m_2 = \pm\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\pm\alpha + 1 + x_2^2 - x_1^2}}{\sqrt{1 \pm \alpha - x_2^2 + x_1^2}},$$
$$m_3 = \pm\mathrm{arctg}\frac{x_4\sqrt{1 \pm \beta + x_4^2 - x_3^2}\sqrt{1 \pm \beta - x_4^2 + x_3^2}}{x_3(-1 - x_4^2 + x_3^2 \pm \beta)},$$
$$m_4 = \pm\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\pm\beta + 1 + x_4^2 - x_3^2}}{\sqrt{1 \pm \beta - x_4^2 + x_3^2}}. \qquad (17)$$

В качестве главных возьмем значения со знаком «+». С учетом обозначений (13) арккосинус будет иметь вид:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Arc}\cos(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)= \\
=\operatorname{arctg}\frac{x_2\sqrt{\alpha+1+x_2^2-x_1^2}\sqrt{1+\alpha-x_2^2+x_1^2}}{x_1(-1-x_2^2+x_1^2+\alpha)}e_1+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha+1+x_2^2-x_1^2}}{\sqrt{1+\alpha-x_2^2+x_1^2}}e_2+ \\
+\operatorname{arctg}\frac{x_4\sqrt{1+\beta+x_4^2-x_3^2}\sqrt{1+\beta-x_4^2+x_3^2}}{x_3(-1-x_4^2+x_3^2+\beta)}e_3+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+\beta-x_3^2+x_4^2}}{\sqrt{1+\beta+x_3^2-x_4^2}}e_4.
\end{gathered} \tag{18}
$$

В системе гиперкомплексных чисел $R\oplus\Gamma_{31}$ гиперболический синус имеет вид:

$$
\begin{gathered}
Sh(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=sh(m_1)\cos m_2\cdot e_1+ch(m_1)\sin m_2\cdot e_2+ \\
+(m_3ch(m_1)\cos m_2-m_4sh(m_1)\sin m_2)e_3+(m_3ch(m_1)\sin m_2+m_4ch(m_1)\cos m_2)e_4.
\end{gathered} \tag{19}
$$

Аналогично строим систему уравнений (4):

$$
\begin{cases}
sh(m_1)\cos m_2=x_1, \\
ch(m_1)\sin m_2=x_2, \\
m_3ch(m_1)\cos m_2-m_4\sin m_2\cdot sh(m_1)=x_3, \\
m_3ch(m_1)\sin m_2+m_4\cos m_2\cdot ch(m_1)=x_4.
\end{cases} \tag{20}
$$

Решением системы (20) являются:

$$
\begin{gathered}
m_1=\ln(\sqrt{\phi}), \\
m_2=\operatorname{arctg}\frac{x_2(\phi-1)}{x_1(\phi+1)}, \\
m_3=\frac{(\phi-1)(\phi-1)^2x_2x_4+(\phi+1)^2x_1x_3}{(\phi-1)^3x_2^2+(\phi+1^3)x_1^2}, \\
m_4=\frac{(\phi^3+\phi^2-\phi-1)x_1x_4-(\phi^3-\phi^2-\phi+1)x_2x_3}{(\phi-1)^3x_2^2+(\phi+1^3)x_1^2},
\end{gathered} \tag{21}
$$

где введены обозначения:

$$
\chi=\sqrt{x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_2^4+1+2x_1^2-2x_2^2}\,, \tag{22}
$$

$$
\phi=x_1^2+x_2^2+\chi+\sqrt{2x_1^4+4x_1^2x_2^2+2x_1^2\chi+2x_2^4+2x_2^2\chi+2x_1^2-2x_2^2}\,. \tag{23}
$$

Тогда гиперболический арксинус, с учетом обозначений (22), (23) имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathrm{Arc}sh(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\ln(\sqrt{\phi})e_1+\mathrm{arctg}\frac{x_2(\phi-1)}{x_1(\phi+1)}e_2+\\ +\frac{(\phi-1)(\phi-1)^2x_2x_4+(\phi+1)^2x_1x_3}{(\phi-1)^3x_2^2+(\phi+1^3)x_1^2}e_3+\\ +\frac{(\phi^3+\phi^2-\phi-1)x_1x_4-(\phi^3-\phi^2-\phi+1)x_2x_3}{(\phi-1)^3x_2^2+(\phi+1^3)x_1^2}e_4.\end{aligned}\tag{24}$$

В системе гиперкомплексных чисел $R\oplus\Gamma_{31}$ гиперболический косинус имеет вид:

$$\begin{aligned}Ch(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=ch(m_1)\cos m_2\cdot e_1+sh(m_1)\sin m_2\cdot e_2+\\ +(m_3sh(m_1)\cos m_2-m_4ch(m_1)\sin m_2)\cdot e_3+(m_3ch(m_1)\sin m_2+m_4sh(m_1)\cos m_2)\cdot e_4.\end{aligned}\tag{25}$$

Как и в предыдущих случаях строим систему уравнений (4):

$$\begin{cases}ch(m_1)\cos m_2=x_1,\\ sh(m_1)\sin m_2=x_2,\\ m_3sh(m_1)\cos m_2-m_4\sin m_2\cdot ch(m_1)=x_3,\\ m_3ch(m_1)\sin m_2+m_4\cos m_2\cdot sh(m_1)=x_4.\end{cases}\tag{26}$$

Решением системы (26) являются выражения:

$$\begin{aligned}m_1&=\ln(\sqrt{\gamma}),\\ m_2&=\mathrm{arctg}\frac{x_2(\gamma-1)}{x_1(\gamma+1)},\\ m_3&=\frac{A}{B},\\ m_4&=\frac{C}{D},\end{aligned}\tag{27}$$

где

$$\delta=\sqrt{(x_1^2+x_2^2)^2+1-2x_1^2+2x_2^2}\ ;\tag{28}$$

$$\gamma=x_1^2+x_2^2+\delta+\sqrt{2((x_1^2+x_2^2)^2+(x_1^2+x_2^2)\delta-x_1^2+x_2^2)}\ ;\tag{29}$$

$$
\begin{gathered}
A=(-\gamma^3+\gamma^2+3\gamma-1)x_1x_3+x_1^5x_3(-2-12\gamma-16\gamma^3+30\gamma^2)+8\gamma(2\gamma+3+3\gamma^2)x_1^5x_2^2x_3-\\
-3(5\gamma^2-1)x_1^3x_3+8\gamma(3+2\gamma+3\gamma^2)x_1^3x_2^4x_3+(\gamma^2-\gamma-1)\gamma x_1^2x_2x_4+(\gamma^2+1)8\gamma x_1x_2^6x_3-\\
-2(\gamma+1)^2x_1x_2^4x_3x+2(7\gamma-2-4\gamma^2)\gamma x_1^4x_2x_4-4(4\gamma+4\gamma^3+1\gamma^2+1)x_1^3x_2^2x_3+\\
+8\gamma^2(3\gamma-2)x_1^4x_2^3x_4+8\gamma(1+\gamma)^2x_2^7x_4+(\gamma^2-1)x_2^3x_4+\\
+4\gamma(1+2\gamma)x_2^5x_4+2(7\gamma^2-1)x_2^5x_4+\\
+(1+\gamma)^3x_1x_2^2x_3-(1-\gamma)^2 8\gamma(x_1^6x_2x_4-x_1^7x_3)+8\gamma(2\gamma+3)x_1^2x_2^5x_4-4(1+\gamma^2)x_1^2x_2^3x_4+\\
+9\gamma^3x_1^3-4x_1^3x_2^2x_3+x_1^2x_2x_4+24\gamma x_1^4x_2^3x_4-2x_1^4x_2x_4+16\gamma^2x_1x_2^6x_3;
\end{gathered}
\tag{30}
$$

$$
\begin{gathered}
B=(16\gamma^3-28\gamma^2+8\gamma+4)x_1^4+(4\gamma^3+6\gamma^2-2)x_2^4+48\gamma x_1^4x_2^4(1+\gamma^2)+\\
+(2+8\gamma+10\gamma^2+4\gamma^3)x_2^2x_1^2+(-4\gamma^3+6\gamma^2-2)x_1^2+(12\gamma^3+22\gamma^2-2\gamma+8)x_2^6+\\
+(-20\gamma^3+38\gamma^2-16\gamma-2)x_1^6+8\gamma((\gamma+1)^2x_2^8+(\gamma-1)^2x_1^8)+\\
+(-6+4\gamma-14\gamma^2-20\gamma^3)x_1^2x_2^4+(-6-24\gamma+2\gamma^2-28\gamma^3)x_1^4x_2^2+\\
+32\gamma(\gamma^2-\gamma+1)x_1^6x_2^2+32\gamma(\gamma^2+\gamma+1)x_1^2x_2^6;
\end{gathered}
\tag{31}
$$

$$
\begin{gathered}
C=(2\gamma+4\gamma^2+2\gamma^3)(x_2^2x_1x_4-x_2^3x_3)+(2\gamma-4\gamma^2+2\gamma^3)(x_1^3x_4-x_1^2x_2x_3)+\\
+(-1+\gamma+\gamma^2-\gamma^3)(x_1x_4-x_2x_3);
\end{gathered}
\tag{32}
$$

$$
D=\gamma(2x_2^2x_1^2(1+\gamma^2)+(1-\gamma)^2x_1^4+(1+\gamma)^2(x_2^4+x_2^2-x_1^2)).
\tag{33}
$$

Тогда гиперболический арккосинус, с учетом введенных обозначений, имеет вид:

$$
\mathrm{Arc}ch(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\ln(\sqrt{\gamma})e_1+\mathrm{arctg}\frac{x_2(\gamma-1)}{x_1(\gamma+1)}e_2+\frac{A}{B}e_3+\frac{C}{D}e_4,
$$

где A,B,C,D определяются из (30)–(33).

Как видно из текста статьи, математические выражения для нахождения обратных функций достаточно сложны. Это говорит о том, что в дальнейшем необходимо искать пути построения более простых выражений для обратных функций.

Работа выполнена благодаря поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины.

1. *Будьонний М.Ф., Каліновський Я.О., Панов А.П., Петренко А.І., Постнікова Т.Г., Синьков М.В., Синькова Т.В.* Про автоматизоване проектування системи програмно-апаратних засобів на базі гіперкомплексних чисел для задач орієнтації твердого тіла. Ч. 1 // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 4. — С. 73–83.

2. *Будьонний М.Ф., Калиновский Я.А., Панов А.П., Петренко А.І., Постнікова Т.Г., Синьков М.В., Синькова Т.В.* Про автоматизоване проектування системи програмно-апаратних засобів на базі гіперкомплексних чисел для задач орієнтації твердого тіла. Ч. 2 // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 4, № 4. — С. 69–77.

3. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Трубников П.В.* Развитие задачи разделения секрета // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 4. — С. 90–96.

4. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Трубников П.В.* Расширение возможностей постановки задачи разделения секрета. Тезисы докладов 7-й Междунар. практической конф. «Безопасность информации в информационно-телекоммуникационных системах». — Киев, 2004.

5. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Синькова Т.В.* Повышение эффективности цифровых фильтров с помощью гиперкомплексного представления информации: Сб. науч. тр. 8-й Международной научной конференции «Теория и техника передачи, приема и обработки информации» ИИИСТ-2002, Харьков, 2002. — С. 503–504.

6. *Синьков М.В., Трубников П.В., Калиновский Я.А., Синькова Т.В., Бояринова Ю.Е.* Новые применения гиперкомплексных квадриплексных чисел. Ч. 2 // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 3. — С. 4–7.

7. *Синьков М.В., Каліновський Я.О., Боярінова Ю.Є.* Розробка та дослідження алгоритмів побудови зображення обернених функцій від гіперкомплексного змінного // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2005. — Т. 7, № 1. — С. 32–42.

8. *Калиновский Я.А., Роенко Н.В., Синьков М.В.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 178–181.

9. Развитие и исследование методов гиперкомплексных числовых систем применительно к моделированию систем уравнений для широкого класса задач. Отчет о НИР / Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины; № ГР 0193V002137. — К., 1993. — 192 с.

Поступила в редакцию 01.03.2006