ISSN 0387-4086 *Прикладна гідромеханіка. 1999. Том 1 (73), N 1. С. 64 – 72*

УДК 532.583

ВНУТРІШНІ ХВИЛІ ЗА ЛОКАЛЬНИМ ЗБУРЕННЯМ ПРИ ЙОГО СЛАБОНЕСТАЦІОНАРНОМУ РУСІ В СТРАТИФІКОВАНІЙ РІДИНІ СКІНЧЕНОЇ ГЛИБИНИ

Р. В. ОЛЬХОВСЬКИЙ*, О. Г. СТЕЦЕНКО**

* *Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка*
** *Інститут гідромеханіки НАН України, Київ*

Получено 20.03.97 ◇ Пересмотрено 11.11.98

Запропоновано метод побудови асимптотичного поля внутрішніх хвиль за локальним збуренням, яке рухається в слабонестаціонарному режимі при великих значеннях густинного числа Фруда. Метод базується на використанні локально-двомірного характеру еволюції поля внутрішніх хвиль за рівномірно рухомим локальним збуренням і застосуванні законів геометричної оптики поширення хвильових променів в горизонтально-однорідних середовищах. Використання методу продемонстровано на прикладі тіла-овоїда, яке нестаціонарно рухається в трьохшаровому стратифікованому середовищі.

Предложен метод построения асимптотического поля внутренних волн за локальным возмущением, движущимся в слабонестационарном режиме при больших значениях плотностного числа Фруда. Метод основан на использовании локально-двухмерного характера эволюции поля внутренних волн за равномерно двкжущимся локальным возмущением и применении законов геометрической оптики распространения волновых лучей в горизонтально-однородных средах. Использование метода продемонстрировано на примере тела-овоида, нестационарно движущегося в трехслойной стратифицированной среде.

Proposed is a method of constructing an asymptotic field of the internal waves following the local disturbance moving in a weakly nonstationary regime an large Froude number. The method is based on the use of the locally two-dimensional character of evolution of the internal waves field following the uniformy movable local disturbance as well as on the use of the methods of the geometrical optics for the expansion of wave rays in horizontally homogeneous mediums. The use of the method is demonstrated in terms of an ovoid body moving in the nonstationary regime in a three-layered stratified medium.

ВСТУП

Процеси генерації та поширення внутрішніх хвиль (ВХ) в стратифікованому середовищі є об'єктом уваги великої кількості дослідників; бібліографія робіт в цьому напрямку включає тисячі найменувань. Виконаний в [1] аналітичний бібліографічний огляд опублікованих робіт з питань вивчення лінійних ВХ містить детальний аналіз отриманих в них результатів. В ряду цих досліджень належне місце посідають і нестаціонарні внутрішні хвилі, інтерес до яких обумовлений, безперечно, важливістю їх ролі в динаміці процесів в реальних стратифікованих середовищах.

В більшості виконаних теоретичних робіт досліджувались періодичні рухи (коливання в потоці) джерел [2], циліндрів [3, 4 та ін.], сфер [5 та ін.], тіл простої форми [6, 7 та ін.], областей тиску [8, 9 та ін.]. В деяких із робіт здійснена спроба розглянути задачу про коливання тіл в потоці стратифікованої рідини в постановці з виконанням точної граничної умови на тілі та з визначенням гідродинамічних сил та моментів, що діють на нього [10]. Такі підходи виявляються громіздкими і потребують великого об'єму обчислювальних робіт.

Експериментальні дослідження нестаціонарних ВХ виконані для найпростіших схем стратифікації - двошарових [11] або з постійним значенням частоти Вяйсяля-Брента [12]. Характерною особливістю полів ВХ таких рухів є наявність певних зон концентрації або ослаблення енергії ВХ, при цьому затухання інтенсивності збурень неоднакове для різних напрямків [2, 3]. В певних умовах, коли групова швидкість ВХ більша швидкості потоку, попереду тіла можуть поширюватись внутрішні хвилі [13], а за певної комбінації частоти коливань, положення тіла і розподілу стратифікації можлива поява резонансного режиму, в якому має місце зростання амплітуди коливань тіла [6].

Такі види нестаціонарних рухів, як рух по колу, прямолінійний рух під кутом до горизонту, короткотривалий рух з додатнім або від'ємним прискоренням розглянуті в теоретичних роботах [14, 15]. Найбільш загальна задача про довільний рух джерела маси розглянута в [16]. Одержаний розв'язок виражається через потрійні інтеграли від Фур'є-образів функції, що описує траєкторію джерела, та власних функцій відповідної задачі ВХ. Розрахунки поля ВХ для такого класу задач вимагають значних обчислювальних затрат. Тому пошук нових підходів в розв'язанні задач про ВХ за нестаціонарно рухомим збуренням залишається актуальним, особливо з точки зору зменшення затрат на виконання чисельних розрахунків.

В даній роботі розглядається слабонестаціонарний рух локального збурення в горизонтальній площині (на фіксованому горизонті) вздовж траєкторії довільної форми за умови, що характерне значення густинного числа Фруда $2\pi Fr = 2\pi U/N_\star L \gg 1$. Тут U – швидкість руху, $N_\star$ – характерне значення частоти Вяйсяля-Брента, L – характерний (поздовжній) розмір збурення, який є малим порівняно з локальним радіусом кривизни траєкторії. За таких умов для розрахунку дальнього (асимптотичного) поля ВХ за рухомим об'єктом ефективно може бути використаний метод локального двомірного описання поля внутрішніх хвиль за швидко рухомим джерелом [16]. Суть цього підходу полягає в тому, що, як показано в [16], для рівномірних прямолінійних рухів з $2\pi Fr \gg 1$ в системі координат, зв'язаній з об'єктом, в області, достатньо віддаленій від самого збурення, для складових оператора ВХ мають місце оцінки

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Тут вісь x направлена протилежно вектору швидкості руху, а вісь z – вгору.

Рівняння нерозривності після введення характерних лінійних масштабів в поздовжньому і поперечному напрямках представляється у вигляді [16]

$$\frac{1}{Fr}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

тобто ($u, v, w,$ – відповідно поздовжня, поперечна і вертикальна складові збурення швидкості в полі ВХ), з точністю до $o(Fr^{-1})$ рух середовища в області ВХ має локально-двомірний характер в площині, перпендикулярній вісі руху. В такому хвильовому сліді присутні лише розбіжні (поперечні) внутрішні хвилі, а поздовжні ВХ відсутні. В цьому випадку для описання поля ВХ від трьохмірної рухомої системи координат можна перейти до двомірної нерухомої системи координат в площині, перпендикулярній локальній дотичній до траєкторії руху об'єкта.

Картина руху середовища в такій системі координат має нестаціонарний характер і описується рівнянням для функції течії $\psi(t, y, z)$ такої, що $u = \partial\psi/\partial z$, $w = -\partial\psi/\partial y$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_1\psi + N^2(z)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = F_\star(t, y, z), \qquad (1)$$

де $F_\star(t, y, z)$ визначається характером досліджуваного збурення;

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Перехід від локально нерухомої системи координат до рухомої виконується з допомогою співвідношення

$$x = Ut, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Вказаний підхід суттєво спрощує проблему розрахунку хвильового поля, оскільки за вказаних умов слабкої нестаціонарності в довільній точці траєкторії через певний час після проходу тіла картина ВХ має двомірний характер в площині, перпендикулярній до траєкторії руху в даній точці. При виконанні умов $U \gg c_g, c_p$ (c_g – групова, а c_p – фазова швидкості ВХ) кожна локальна ділянка траєкторії породжує плоский криволінійний хвильовий фронт, який починає поширюватись від траєкторії по законам двомірних хвиль. Радіус кривизни цього фронту визначається формою траєкторії тіла, а момент породження його – часом проходу тілом виділеної точки. Таким чином, в рамках даної моделі в процесі руху тіла воно в кожний момент часу породжує двомірні хвильові фронти з відомим радіусом кривизни у відповідній точці траєкторії. Ці фронти після старту поширюються вздовж хвильових променів, перпендикулярних дотичній до траєкторії в даній точці, в протилежних один до одного напрямках.

В даному дослідженні в ролі збурення розглядається овоїд, продольна вісь якого в кожен момент співпадає з напрямом вектора швидкості. Відомо, що в однорідному нескінченому середовищі картина течії при русі такого тіла еквівалентна картині течії, визваної рухом рознесених в напрямку поздовжньої вісі на деяку відстань $2a$ джерела і стоку мас рівної інтенсивності Q [17]. Величини Q и a визначаються в залежності від геометрії тіла і швидкості його руху. Неважко переконатись, що заміна джерела маси Q на силове джерело потужністю $F = -\rho_0 UQ$ (ρ_0 – густина середовища) дає те ж саме значення $F_\star(t, y, z)$ в рівнянні (1), тобто система силових джерел F і $-F$ також відповідає руху овоїда. В подальшому рух овоїда імітується якраз рухом системи рознесених силових джерел, що справедливо для випадку достатньої віддаленості овоїда від вільної поверхні;

в першому наближенні впливом стратифікації на ідентичність течій в околі овоїда і системи джерел можна знехтувати.

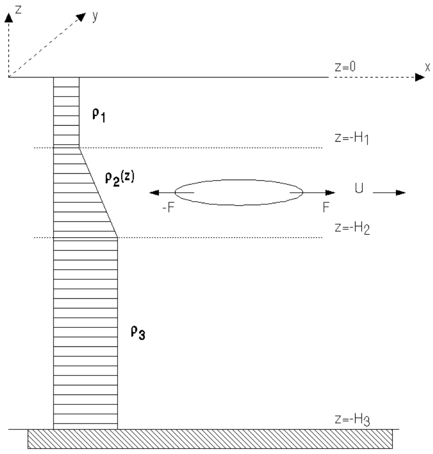

Рис. 1. Схема стратифікації середовища і модельне представлення рухомого збурення

1. СТАЦІОНАРНИЙ РУХ ОВОЇДА В СТРАТИФІКОВАНОМУ ШАРІ СКІНЧЕНОЇ ГЛИБИНИ

Розглядається схема стратифікованого середовища з розподілом густини, зображеним на рис. 1. В верхньому і нижньому шарах густина стала і дорівнює відповідно ρ_1 і ρ_3, а в середньому вона змінюється неперервно від ρ_1 до ρ_3 згідно лінійного закону

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{(z+H_1)(\rho_3-\rho_1)}{H_1-H_2}.$$

Система координат вибрана так, що вісь z направлена вгору з початком координат на вільній поверхні.

Якщо ввести характерні масштаби задачі: для координат x, y – H_3; для часу t – N^{-1}, де

$$N = \left(\frac{g}{\rho_1}\frac{\rho_3-\rho_2}{H_2-H_1}\right)^{1/2}$$

– постійне значення частоти Вяйсяля-Брента в середньому стратифікованому шарі; для густини ρ – ρ_1; для функції течії ψ – $H_3^2 N$; для кількості руху одиничного об'єму F_x – $\rho_1 H_3 N^2$, то система лінеаризованих рівнянь Ейлера в наближенні Бусинеска для стратифікованої рідини, рівнянь нерозривності і нестисливості зводиться до одного рівняння відносно функції течії збуреного руху:

$$\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial y}\Delta_1\psi + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = \frac{1}{Fr}\frac{\partial^3 F_x}{\partial t^2 \partial z}. \qquad (2)$$

У відповідності зі схемою стратифікації та заміною умови на вільній поверхні умовою "твердої кришки" для розв'язання поставленої задачі необхідно виконати граничні умови непротікання на дні й на вільній поверхні, а також кінематичну (рівність зміщень) і динамічну (неперервність тиску) умови на границях стратифікованого середнього шару. Виражені через функцію течії ці умови мають вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\ &\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] = 0 \quad \text{при} \quad z = H_1, z = H_2, \\ &\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial y \partial z}\right] = 0 \quad \text{при} \quad z = H_1, z = H_2, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad z = -1. \end{aligned} \qquad (3)$$

До них необхідно добавити умови затухання збурень на нескінченості:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{y^2+z^2} \to \infty$$

і нульові початкові умови

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Знак $[\ldots]$ означає стрибок відповідної величини.

Як зазначалось вище, рівняння (2) описує поле ВХ за овоїдом, якщо представити

$$F_x = -F\delta(y)\delta(z-h)[\delta(t) - \delta(t-t_1)], \qquad (4)$$

де h – глибина горизонту руху; $t_1 = 2a/Fr$ – відрізок часу, на протязі якого тіло проходить відстань $2a$ між центрами силових джерел, що моделюють овоїд.

Для розв'язання задачі (2), (3) використовується Фур'є-представлення $\psi(t, y, z)$, яке задовольняє умові причинності(що відповідає виконанню умови випромінювання):

$$\psi(t,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iky}dk \int\limits_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \bar{\psi}(\omega,k,z)e^{-i\omega t}d\omega. \qquad (5)$$

Для визначення функції $\bar{\psi}(\omega, k, z)$ застосовується метод роботи [18]. В результаті розв'язок для

$\psi(t,y,z)$ знаходиться у вигляді, що має модову структуру:

$$\psi(t,y,z) = -\frac{2H(t)}{\pi Fr} F \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{B_n(k,z)}{k} \{\sin(\omega_n t) -$$

$$- \sin[\omega_n(t-t_1)]\} \sin(ky) dk, \qquad (6)$$

де

$$B_n(k,z) = \frac{\varphi_n[k,z]\varphi'_n[k,-h]}{\frac{\partial D}{\partial \omega}|_{\omega=\omega_n(k)}};$$

$$D(\omega,k) = \varphi_n(0)\varphi'_n(0) = \varphi_n(-1)\varphi'_n(-1);$$

$H(t)$ – одинична функція Хевісайда; $\omega = \omega_n(k)$ – дисперсійне співвідношення, що є розв'язком дисперсійного рівняння

$$D(\omega,k) = 0, \qquad (7)$$

а $\varphi_n(z)$ і $c_n = \omega_n/k$ – власні функції і власні значення задачі Штурма-Ліувілля з k^2 в ролі спектрального параметра (штрих – диференціювання по z):

$$\bar{\psi}'' - k^2\bar{\psi} = 0, \text{ при } -H_1 < z \le 0$$
$$\text{і } -1 < z \le -H_2 ;$$

$$\bar{\psi}'' + (\tfrac{1}{c^2} - k^2)\bar{\psi} = 0, \text{ при } -H_2 < z \le -H_1 \qquad (8)$$

з граничними умовами

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 ,$$

$$[\psi] = 0 \quad \text{при} \quad z = -H_1, \ z = -H_2 ,$$

$$[\psi'] = 0 \quad \text{при} \quad z = -H_1, \ z = -H_2 ,$$

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad z = -1 .$$

Множина власних значень і відповідних власних функцій задачі (8) не більш ніж зліченна, всі вони дійсні [19]. Множина власних значень $\omega_n(k)$ обмежена зверху частотою Вяйсяля-Брента, тобто $0 \le \omega_n(k) \le 1$; кожне з ω_n відповідає модовій складовій з номером n.

Для власних функцій одержані прості аналітичні вирази

$$\varphi_n(k,z) = \begin{cases} e^{kz} - e^{-kz} , \\ \qquad \text{при } -H_1 < z \le 0 ; \\ c_1\cos(Mz) + c_2\sin(Mz), \\ \qquad \text{при } -H_2 < z \le -H_1 ; \\ c_3 e^{kz} + c_4 e^{-kz} , \\ \qquad \text{при } -1 < z \le -H_2; \end{cases} \qquad (9)$$

де

$$c_1 = \left(e^{-kH_1} - e^{kH_1}\right)\cos(MH_1) +$$
$$+ \frac{k}{M}\left(e^{kH_1} + e^{-kH_1}\right)\sin(MH_1) ,$$

$$c_2 = \frac{k}{M}\left(e^{kH_1} + e^{-kH_1}\right)\cos(MH_1) +$$
$$+ \left(e^{kH_1} - e^{-kH_1}\right)\sin(MH_1) ,$$

$$c_3 = \frac{M}{2k}e^{kH_2}[c_1\sin(MH_2) + c_2\cos(MH_2)] +$$
$$+ \frac{1}{2}e^{kH_2}[c_1\cos(MH_2) - c_2\sin(MH_2)] ,$$

$$c_4 = -\frac{M}{2k}e^{-kH_2}[c_1\sin(MH_2) + c_2\cos(MH_2)] +$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-kH_2}[c_1\cos(MH_2) - c_2\sin(MH_2)] ;$$

$$M[k,\omega_n(k)] = \frac{k}{\omega_n(k)}\sqrt{1-\omega_n^2(k)} .$$

Вираз для $D(\omega,k)$ може бути представлений у вигляді

$$D(\omega,k) = -2k\left[c_3(\omega,k) + e^{2k}c_4(\omega,k)\right] , \qquad (10)$$

так що дисперсійне співвідношення $\omega = \omega_n(k)$ визначається як розв'язок рівняння

$$c_3(\omega,k) + e^{2k}c_4(\omega,k) = 0 . \qquad (11)$$

Враховуючи, що амплітуда внутрішньої хвилі визначається як

$$\eta = -\int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial y} dt ,$$

для неї має місце розв'язок вигляду

$$\eta(t,y,z) = -\frac{2H(t)}{\pi Fr} F \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{B_n(k)}{\omega_n(k)} \{\cos(\omega_n t) -$$

$$- \cos[\omega_n(t-t_1)]\} \cos(ky) dk . \qquad (12)$$

2. ПОБУДОВА КАРТИНИ ВХ ЗА СЛАБОНЕСТАЦІОНАРНО РУХОМИМ ОВОЇДОМ

За сформульованих раніше умов слабкої нестаціонарності руху і $Fr \gg 1$ внутрішні хвилі від об'єкта поширюються локально-двомірним чином в площинах, перпендикулярних дотичним до траєкторії в її відповідних точках. Однак у випадку криволінійної траєкторії амплітудна картина ВХ в кожній з таких площин може бути побудована на основі виразу (12) тільки в ближньому околі траєкторії. В основній зоні поширення ВХ цей розв'язок не описує дійсну картину ВХ через наявність там ефектів сходження(конвергенції) або розходження (дивергенції) хвильових променів, що обумовлено кривизною траєкторії, а, отже, кривизною стартового хвильового фронту. Тому для побудови поля ВХ в цьому випадку амплітудний спектр розв'язку (12) виступає лише як початковий, що стартує від траєкторії руху так, що його відповідні хвильові промені направлені по нормалі до дотичної до траєкторії в точці старту. Від кожної точки траєкторії стартують дві протилежно направлені системи ВХ. При цьому сама траєкторія руху об'єкта в околі її довільної точки є деяким початковим криволінійним двомірним хвильовим фронтом, оскільки розв'язок (12) є суперпозицією плоских хвиль, що складають спектр згенерованих при русі збурення ВХ. Характер цього хвильового фронту змінюється вздовж траєкторії через зміну її локального радіуса кривизни, а час його породження обумовлений моментом проходу тіла через виділену точку. Амплітудна картина хвильового поля, породженого плоским криволінійним фронтом, визначається його радіусом кривизни [20], тому запропонований підхід з врахуванням зсуву в часі при породженні стартуючих хвильових фронтів дозволяє побудувати просторове хвильове поле за тілом, що рухається в слабонестаціонарному режимі вздовж довільної форми траєкторії (за умови, що локальні значення її радіуса кривизни значно більші від характерного лінійного розміру рухомого збурення). Для двомірного криволінійного хвильового фронту амплітуда η монохроматичної хвилі вздовж хвильового променя у відповідності з законом збереження енергії вздовж хвильової трубки змінюється як [20]

$$\eta = \eta_o \left(1 - \frac{y_\star}{R_T}\right)^{-\frac{1}{2}} = \eta_o \Phi_k; \qquad (13)$$

$$\Phi_k = \left(1 - \frac{y_\star}{R_T}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

для зон сходження хвильових променів, і

$$\eta = \eta_o \left(1 + \frac{y_\star}{R_T}\right)^{-\frac{1}{2}} = \eta_o \Phi_d; \qquad (14)$$

$$\Phi_d = \left(1 + \frac{y_\star}{R_T}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

для зон розходження хвильових променів.

Тут η_o – амплітуда ВХ в момент старту від траєкторії; $y_\star$ – віддаль вздовж променя до розрахункової точки; R_T – радіус кривизни траєкторії в точці виходу від неї хвильового променя. Відмітимо, що для випадку горизонтально однорідної стратифікації хвильові промені є прямі, напрямки яких в кожній точці траєкторії співпадають з напрямками фазової і групової швидкостей ВХ. Від кожної точки траєкторії одна із систем хвиль поширюється в область конвергенції, а друга - в область дивергенції. При $y_\star \to R_T$ в зоні конвергенції має місце зона каустики, яка є обвідною хвильових променів. Конфігурація каустики визначається характером геометричної форми криволінійної траєкторії об'єкта (каустика утворюється совокупністю її радіусів кривизни). В околі каустики співвідношення (13) несправедливе і тут необхідно виконувати спеціальний аналіз. В цій зоні слід очікувати максимального зростання (локального) амплітуд ВХ. В даній роботі ця область не розглядається.

Розрахунок поля ВХ за рухомим об'єктом на основі запропонованого тут підходу виконується в такій послідовності.

1. Задається траєкторія руху об'єкта в параметричній формі

$$x = X_T(t); \qquad (15)$$

$$y = Y_T(t). \qquad (16)$$

2. Для визначення амплітуди ВХ хвильового поля в розрахунковій точці з координатами $M(x, y, z)$ спочатку визначаються ті точки на траєкторії (15), (16), хвильові промені від яких направлені в цю точку. Це досягається шляхом розв'язання рівняння нормальної площини до заданої траєкторії руху відносно часу t при заданих координатах точки x, y. Воно має вигляд [21]

$$[x - X_T(t)] \frac{dX_T}{dt} + [y - Y_T(t)] \frac{dY_T}{dt} = 0. \qquad (17)$$

Розв'язок рівняння (17) дає ті моменти часу τ_i, коли з відповідних точок траєкторії $(X_T(\tau_i), Y_T(\tau_i))$ в напрямку точки $M(x, y, z)$ починають поширюватися внутрішні хвилі. В загальному випадку рівняння (17) може мати декілька розв'язків τ_i, наприклад m.

3. Значення амплітуди ВХ в розрахунковій точці знаходиться як результат додавання (в силу лінійності задачі) всіх амплітуд ВХ, які відповідають хвильовим променям, що виходять від траєкторії руху в знайдені раніше моменти часу τ_i і направлені в цю точку. Таким чином,

$$\eta(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{m} H(t - \tau_i) \Phi_i \eta_o(t - \tau_i, y_{\star i}, z), \qquad (18)$$

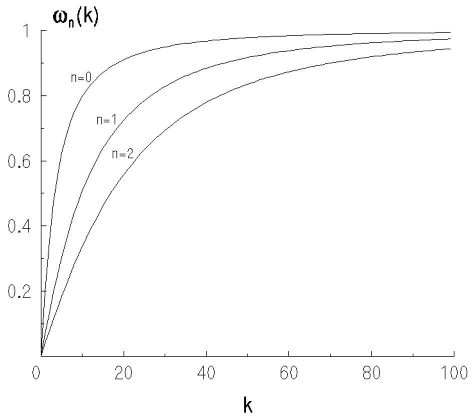

Рис. 2. Дисперсійні криві рівняння (11)

де

$$y_{\star i} = \sqrt{\left[x - X_T(\tau_i)\right]^2 + \left[y - Y_T(\tau_i)\right]^2};$$

$$\Phi_i = \Phi_k(y_{\star i}),$$

якщо точка M знаходиться в зоні конвергенції хвильових променів, і

$$\Phi_i = \Phi_d(y_{\star i}),$$

– якщо в зоні дивергенції. $H(t-\tau_i)$ – одинична функція Хевісайда; а η_o визначається розв'язком (12), в якому величини F и Fr є функціями часу (і координат точок траєкторії) в залежності від характеру зміни локальної швидкості руху $U(t)$.

3. РЕЗУЛЬТАТИ. РОЗРАХУНКОВИЙ ПРИКЛАД

В якості конкретного прикладу розглянуто рух овоїда по кругу радіуса R. При цьому рівняння траєкторії має вигляд

$$X_T(t) = X_0 - R\cos\beta t,$$

$$Y_T(t) = Y_0 - R\sin\beta t. \qquad (19)$$

Горизонт руху овоїда залишається незмінним, швидкість руху також прийнята постійною. Для порівняння хвильових картин виконані розрахунки так само для випадку прямолінійного руху. Для розрахунку були взяті такі параметри стратифікації:

$$\rho = \rho_1 = 1000.0\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$
$$\text{при} \quad -15\,\text{м} \le z < 0\,\text{м};$$

$$\rho = (-0.017z + 999.85)\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$
$$\text{при} \quad -40\,\text{м} \le z \le -15\,\text{м};$$

$$\rho = \rho_2 = 1000.25\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$
$$\text{при} \quad -100\,\text{м} < z \le -40\,\text{м}.$$

На рис. 2 наведені дисперсійні криві для трьох старших хвильових мод відповідної задачі на власні значення для заданого середовища. Параметри траєкторії руху відповідають $R = 30.0$; $\beta = 0.1$; $X_0 = 30.0$; $Y_0 = 40.0$; швидкість руху об'єкта вздовж траєкторії (19):

$$U = \sqrt{X_T'^2(t) + Y_T'^2(t)} = R\,\beta = 3.0;$$

густинне число Фруда $Fr = 18.0$. Задані параметри відповідають умовам слабкої нестаціонарності та режиму руху з великими значеннями Fr. Еволюція хвильової картини досліджувалась по

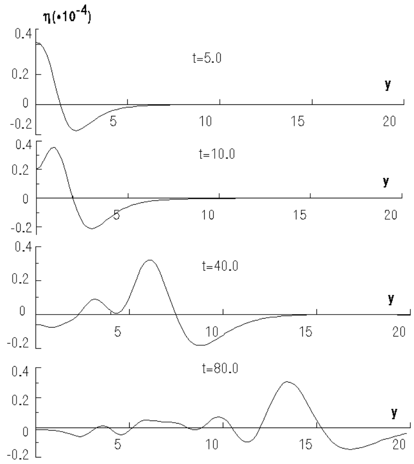

Рис. 3. Еволюція хвильової картини внутрішніх хвиль на фіксованому горизонті (h=-0.3; z=-0.3; t=5.0, 10.0, 40.0, 80.0)

всій товщині стратифікованого шару для різних положень горизонту руху об'єкта. Всі розрахунки виконані згідно розв'язку (12) і співвідношення (18). Про характер еволюції хвильової картини в виділеній точці можна судити, порівнюючи її з хвильовою картиною при прямолінійному русі. Відповідні результати розрахунків представлені на рис. 3 - 7. На рис. 3 представлений характер хвильової картини на фіксованому горизонті в площині, перпендикулярній вісі руху, для різних моментів часу при прямолінійному русі овоїда. Видно, як початкове збурення, внаслідок дисперсійних властивостей ВХ в процесі поширення розділюється на все більшу кількість гармонік, причому хвилі з більшими хвильовими числами поширюються швидше. Порівняння хвильових розрізів в один і той же момент часу для різних

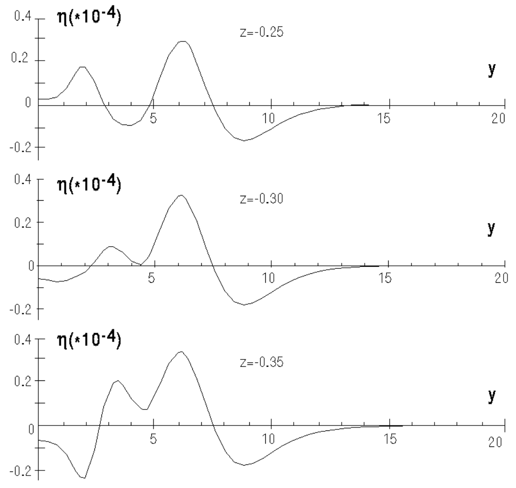

Рис. 4. Картина внутрішніх хвиль на різних горизонтах (h=-0.3; z=-0.25, -0.3, -0.35; t=40.0)

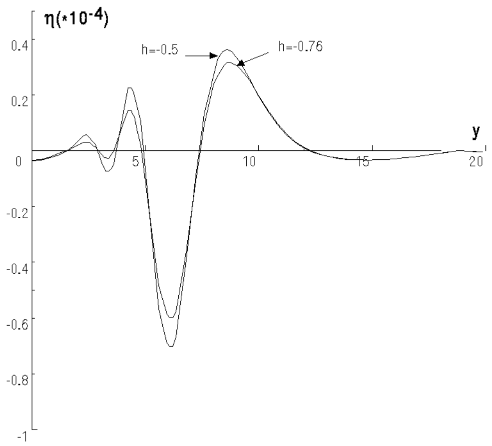

Рис. 5. Внутрішні хвилі на фіксованому горизонті при різних глибинах руху тіла (h=-0.5, -0.76; z=-0.3; t=40.0)

горизонтів (рис. 4) демонструє багатомодовість хвильової структури поля. Саме наявністю другої, третьої і т.д. мод обумовлені різні знаки відхилення ізопікн поля ВХ при $y < 5.0$ на горизонтах $z = -0.25$ і $z = -0.35$. На рис. 5 видно цілком зрозумілу залежність інтенсивності ВХ від горизонту руху тіла: чим ближче тіло до розрахункового горизонту, тим більше амплітуда ВХ.

На рис. 6 представлена просторова картина хвильового поля за овоїдом при його русі вздовж траєкторії (19). Сама траєкторія руху об'єкта на рис. 6 проходить в центрі між крайніми максимумами амплітудної картини по півколу. В напрямку до центру траєкторії знаходиться зона конвергенції ВХ, в протилежному напрямку - зона дивіргенції ВХ. Єдиним елементом нестаціонарності в даній задачі є кривизна траєкторії руху, що викликає згідно співвідношення (13) відносне зростання амплітуд ВХ в напрямку до центра траєкторії (центр кола (19)), а у відповідності з виразом (14) – відносне зменшення амплітуд ВХ при віддаленні від траєкторії в протилежному напрямку. Про це можна судити, порівнюючи хвильові профілі при прямолінійному русі та при русі по колу в області конвергенції і дивіргенції хвильових променів, представленому на рис. 7. Відносне збільшення амплітуди ВХ зростає тут при наближенні до центру траєкторії. І навпаки, при віддаленні від траєкторії в протилежному напрямку відносне зменшення амплітуди ВХ падає.

ЗАКЛЮЧЕННЯ

Запропонований в даній роботі підхід до розрахунку просторового поля внутрішніх хвиль за тілом, що рухається в слабонестаціонарному режимі на фіксованому горизонті, грунтується на локально-двомірному характері такого поля ВХ для випадку рівномірного і прямолінійного руху на фіксованому горизонті в режимі великих значень густинного числа Фруда [16]. Використання цього результату дозволяє суттєво спростити розрахунок поля ВХ за нестаціонарно рухомим тілом.

Визначення амплітудно-фазової картини поля ВХ локальними характеристиками двомірного хвильового фронту [20] обумовлює можливість побудови просторового поля ВХ за тілом на підставі розв'зку для прямолінійного руху з врахуванням поправки на конвергенцію (13) або дивергенцію (14) хвильових променів, що випливає з закону збереження енергії вздовж просторової хвильової трубки течії.

Для заданої форми траєкторії руху в кожній розрахунковій точці врахування нестаціонарності руху вирішуються на рівні розв'язання рівняння нормальних площин до траєкторії руху, які проходять через цю точку, з визначенням моментів старту початкових хвильових фронтів. Виняток тут становить зона каустик, де необхідно виконувати спеціальний аналіз. Представлений тут простий підхід може бути також використаний для розв'язання задачі для випадку, коли тіло рухається по просторовій траєкторії, дотичні до якої мають малий кут нахилу до горизонту.

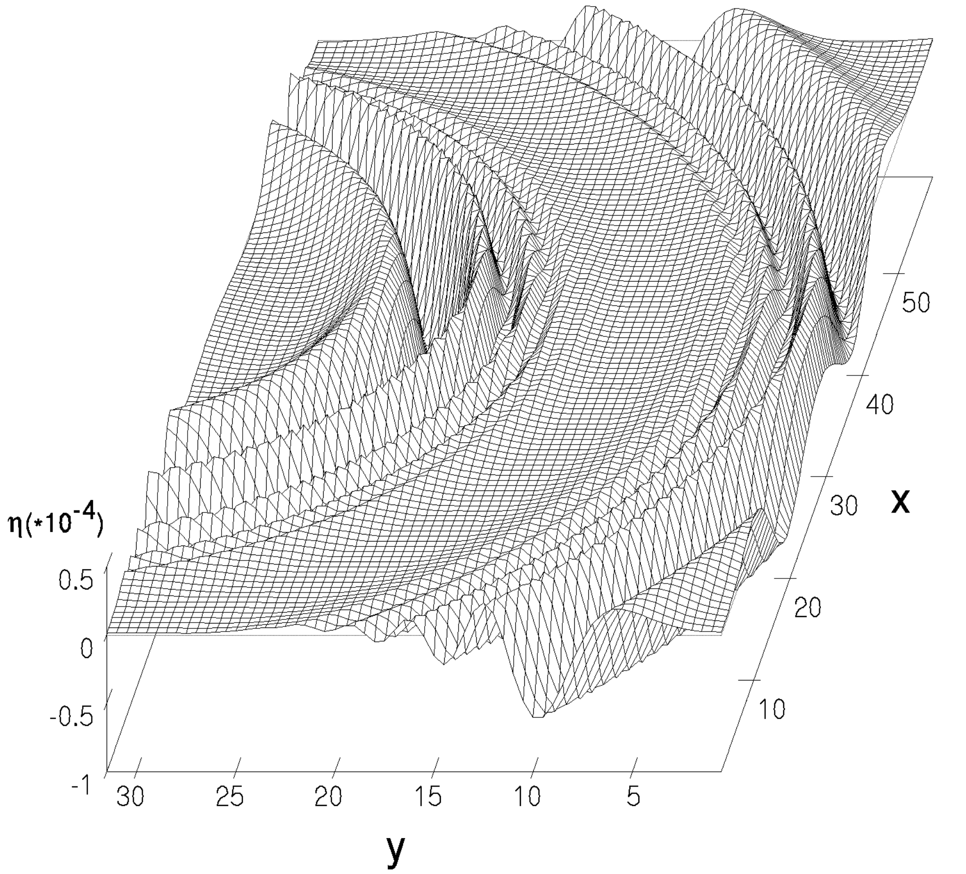

Рис. 6. Просторова картина хвильового поля (h=-0.5; z=-0.3; t=80.0)

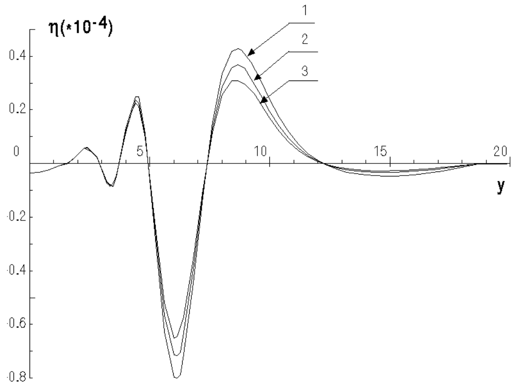

Рис. 7. ВХ для різних типів траєкторії (h=-0.5; z=-0.3; t=40.0; 1 – в зоні конвергенції при русі по півколу; 2 – при русі по прямій; 3 – в зоні дивіргенції при русі по півколу)

1. *Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович В.В.* Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. механика жидк. и газа.– 1987.– N 21.– С. 93–179.
2. *Городцов В.А., Теодорович Э.В.* Излучение внутренних волн при периодическом движении источников // ЖПМТФ.– 1983.– N 4.– С. 81–87.
3. *Hurley D.G.* The emission of internal waves by vibrating cylinders // J.Fluid Mech.– 1969.– **36,N 4**.– P. 657–672.
4. *Stevenson T.N., Thomas N.H.* Two-dimensional internal waves generated by a translating oscillating cylinder // J.Fluid Mech.– 1969.– **36,N 3**.– P. 525–541.
5. *Appleby J.C., Grighton D.G.* Internal gravity waves generated by oscillations of a sphere // J.Fluid Mech.– 1987.– **183**.– P. 439–450.
6. *Долина И.С.* Усиление колебательного движения тел в стратифицированной жидкости // Изв.АН СССР. Механика жидк. и газа.– 1984.– N 4.– С. 87–93.
7. *Graham E.W.* Transient internal waves produced by a moving body in a tank of density-stratified fluids // J.Fluid Mech.– 1973.– **61,N 3**.– P. 465–480.
8. *Васильева В.В.* Периодические давления в равномерном потоке двухслойной жидкости // Гидромеханика.– 1974.– N 28.– С. 32–36.
9. *Доценко С.Ф.* Об асимптотическом анализе неустановившихся волн от начальных периодических и движущихся возмущений // Морск. гидрофизические исследования.– 1977.– N 3.– С. 44–54.
10. *Васильева В.В., Войткунский Я.И., Микуцкая Г.С.* Колебания тела вращения вблизи поверхности раздела сред при наличии течения // Ходкость и мореходные качества корабля.– Ленинград.– 1982.– С. 31–40.
11. *Букреев В.И., Гусев А.В., Стурова И.В.* Генерация внутренних волн при совместном поступательном и колебательном движении цилиндра в двухслойной жидкости // ЖПМТФ.– 1986.– N 30.– С. 63–70.
12. *Graham E.W., Graham B.B.* The tank wall effect on internal waves due to a transient vertical force moving at a fixed depth in a density-stratified fluids // J.Fluid Mech.– 1980.– **97,N 1**.– P. 91–114.
13. *Rehm R.G., Radt H.S.* Internal waves generated by a translating oscillating body // J.Fluid Mech.– 1975.– **68,N 2**.– P. 235–258.
14. *Стурова И.В.* Внутренние волны, возникающие в экспоненциально стратифицированной жидкости при произвольном движении источника // Изв.АН СССР. Механика жидк. и газа.– 1980.– N 3.– С. 67–74.
15. *Чашечкин Ю.Д., Макаров С.А.* Нестационарные внутренние волны // ДАН СССР.– 1984.– **276,N 5**.– С. 1246–1250.
16. *Стеценко А.Г.* Двухмерное описание асимптотического поля внутренних волн за движущимся локальным источником // Гидромеханика.– 1992.– N 65.– С. 38–45.
17. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика, ч.1.– М.: ГИФМЛ, 1963.– 534 с.
18. *Keller J.B., Levy D.M., Ahluwalia D.S.* Internal and surface wave production in a stratified fluid // Wave Motion.– 1981.– N 3.– P. 215–229.
19. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане.– Л.: Гидрометеоиздат, 1981.– 302 с.
20. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1980.– 304 с.
21. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1966.– 870 с.