

УДК 534; 621.382

А. Ю. Липинский, А. Н. Рудякова, В. В. Данилов
Донецкий Национальный университет, кафедра радиофизики
ул. Университетская, 24, 83055 Донецк, Украина
e-mail: krf@dongu.donetsk.ua

Анализ профилей мод интегрального анизотропного оптического волновода методом конечных элементов

Современные технологии делают возможным формирование заданного профиля показателя преломления интегрального оптического волновода, что на этапе проектирования дает большую степень свободы при реализации таких его свойств как ширина полосы, профили мод, согласование фаз мод с различной длиной волны и т.д. Важным является численное исследование этого класса структур. В работе представлена схема метода конечных элементов Галеркина для расчета направленных мод анизотропного канального волновода. Выполнено моделирование термодиффузионного интегрального $Ti:LiNbO_3$ оптического волновода. Получены профили поля мод, а также дисперсионные характеристики.

Ключевые слова: интегральная оптика, метод конечных элементов, профили поля мод.

Введение

При построении устройств планарной оптики волноводные структуры являются неотъемлемыми элементами, используемыми для реализации функций коммутации, модуляции, разветвления, суммирования, мультиплексирования и демultipлексирования оптических сигналов [1–5].

Оптические волноводы, электрооптические компоненты, передатчики, приемники и управляющая электроника могут быть интегрированы в одном чипе с использованием планарной технологии аналогично микроэлектронике. На сегодняшний день теория волноводных устройств развита достаточно хорошо [6]. Однако, поскольку их технические характеристики зависят от многочисленных параметров, включающих геометрию, длину волны, начальное распределение поля, свойства материала и т.п., моделирование работы таких устройств с целью оптимизации тех или иных характеристик играет важную роль в процессе проектирования.

© А. Ю. Липинский, А. Н. Рудякова, В. В. Данилов

Целью настоящей работы является математическое моделирование дисперсионных характеристик и профилей мод интегрального оптического волновода (ИОВ) с использованием метода конечных элементов. Выбор метода обусловлен возможностью его применения для структур как волоконной, так и интегральной оптики, а также его преимуществами при расчете сложного профиля показателя преломления и геометрической формы поперечного сечения оптического волновода.

Современные технологии делают возможным формирование заданного профиля показателя преломления с достаточной точностью. Это дает большую степень свободы при реализации определенных свойств волноводов, таких как ширина полосы [7], профили мод [8], согласование фаз мод с различной длиной волны [9, 10] и т.д. Таким образом, численное исследование такого класса структур является важным.

Моделирование методом конечных элементов

Основная идея метода конечных элементов заключается в том, что непрерывные физические величины, такие как напряженности электрического E_{pq}^x и магнитного H_{pq}^x полей могут быть аппроксимированы дискретной моделью, построенной на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Кусочно-непрерывные функции определяются с помощью значений непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области [11].

Моделирование анизотропного ИОВ методом конечных элементов включало следующие этапы:

- разбиение области анализа на конечные элементы первого порядка треугольной формы методом триангуляции Делоне;
- определение функций формы конечного элемента;
- запись задачи на собственные значения с использованием метода взвешенных невязок (Галеркина);
- задание граничного условия Дирихле;
- определение постоянных распространения волноводных мод, а также нормированных значений поля в узловых точках из решения задачи на собственные значения.

Разбиение области анализа интегрального оптического волновода на конечные элементы

Термодиффузионный Ti:LiNbO_3 оптический волновод (рис. 1) можно рассматривать как градиентную структуру с монотонно-изменяющимся профилем показателя преломления [12], результат расчета которого для обыкновенной волны в поперечном сечении ИОВ ($\lambda_0 = 0,633$ мкм, $W = 3$ мкм, $\tau = 16$ мкм, время диффузии 14400 с, температура диффузии 1250 К), представлен на рис. 2.

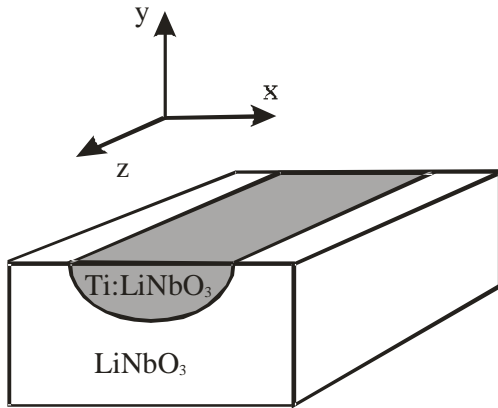


Рис. 1. Интегральный оптический волновод, сформированный термодиффузией Ti^{4+} в $LiNbO_3$

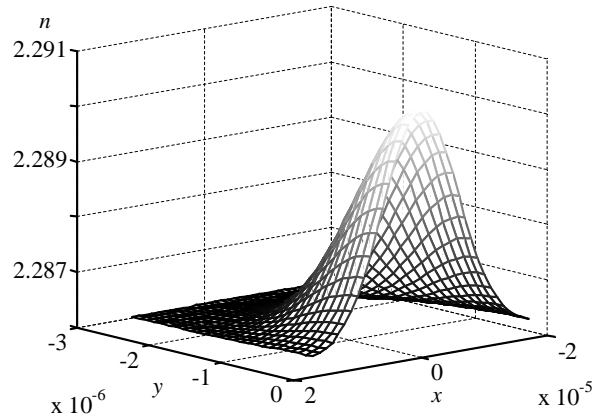


Рис. 2. Зависимость показателя преломления для обыкновенной волны в поперечном сечении ИОВ

В качестве области анализа выбрано поперечное сечение ИОВ. Разбиение области на конечные элементы первого порядка треугольной формы (рис. 3) проведено методом триангуляции Делоне [13].

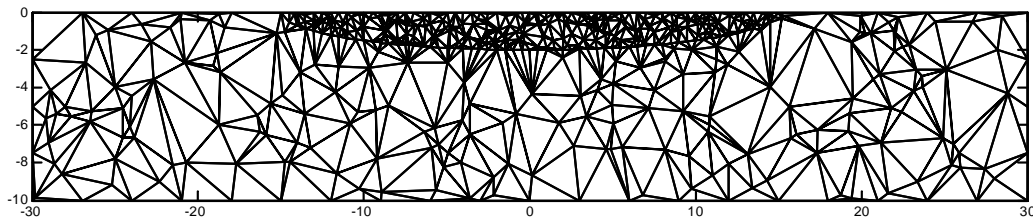


Рис. 3. Разбиение области анализа ИОВ на конечные элементы первого порядка треугольной формы

Функции формы конечного элемента

Для однородного в направлении z оптического волновода скалярное волновое уравнение записывается следующим образом [14]:

$$\eta^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + (k_0^2 \xi^2 - \eta^2 \beta^2) \phi = 0, \quad (1)$$

где для E_{pq}^x моды:

$$\phi = E_x, \quad \eta^2 = 1, \quad \xi^2 = \varepsilon_r = n_r^2,$$

и для E_{pq}^y моды:

$$\phi = H_x, \quad \eta^2 = \frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{1}{n_r^2}, \quad \xi^2 = 1.$$

На рис. 4 изображен треугольный элемент первого порядка, в котором волновая функция $\phi_e(x, y)$ для произвольной координаты (x, y) внутри элемента выражается через функции формы N_1, N_2 и N_3 (с полями ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 в вершинах треугольника):

$$\phi_e(x, y) = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 = [N_e]^T \{\phi_e\}, \quad (2)$$

где $[N_e] = [N_1, N_2, N_3]^T$ и $\{\phi_e\} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}^T$.

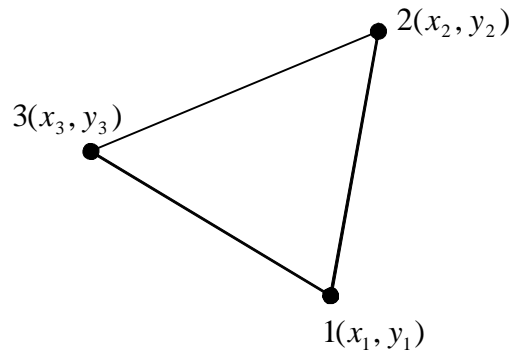


Рис. 4. Треугольный элемент первого порядка

Для определения функций формы N_1, N_2 и N_3 удобно использовать координаты площади L_i , определяемые отношением площади треугольника, образованного точкой p и стороной, противоположной узлу i , к общей площади треугольника:

$$L_1 = \frac{Q_1(x - x_2) + R_1(y - y_2)}{2S_e},$$

$$L_2 = \frac{Q_2(x - x_3) + R_2(y - y_3)}{2S_e},$$

$$L_3 = \frac{Q_3(x - x_1) + R_3(y - y_1)}{2S_e},$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= y_2 - y_3, & Q_2 &= y_3 - y_1, & Q_3 &= y_1 - y_2; \\ R_1 &= x_3 - x_2, & R_2 &= x_1 - x_3, & R_3 &= x_2 - x_1; \\ S_e &= \frac{1}{2}[(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]; \end{aligned}$$

S_e — площадь треугольного элемента; (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) — координаты его углов.

В случае линейного треугольного элемента, содержащего три узла, функции формы совпадают с соответствующими координатами площади:

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3.$$

Задача на собственные значения

Для записи задачи на собственные значения в матричной форме использован метод Галеркина [14]. Подставляя (2) в волновое уравнение (1), получим:

$$\eta_e^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [N_e]^T \{ \phi_e \} + (k_0^2 \xi_e^2 - \eta_e^2 \beta^2) [N_e]^T \{ \phi_e \} = 0.$$

Умножение левой части этого уравнения на функцию формы $[N_e]$, и интегрирование по элементу e дает:

$$\iint_e [N_e] \eta_e^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [N_e]^T dx dy \{ \phi_e \} + \iint_e (k_0^2 \xi_e^2 - \eta_e^2 \beta^2) [N_e] [N_e]^T dx dy \{ \phi_e \} = \{ 0 \}. \quad (3)$$

Интегрируя первое слагаемое (3) по x и y , получим:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\Gamma_e} \eta_e^2 [N_e] \frac{\partial [N_e]^T}{\partial x} dy + \int_{\Gamma_e} \eta_e^2 [N_e] \frac{\partial [N_e]^T}{\partial y} dx \right] \{ \phi_e \} - \\ & - \iint_e \eta_e^2 \left\{ \frac{\partial [N_e]}{\partial x} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial x} + \frac{\partial [N_e]}{\partial y} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial y} \right\} dx dy \{ \phi_e \} + \\ & + \iint_e (k_0^2 \xi_e^2 - \eta_e^2 \beta^2) [N_e] [N_e]^T dx dy \{ \phi_e \} = \{ 0 \}. \end{aligned}$$

Используя выражение

$$\int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dy + \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} dx = \int_{\Gamma} \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dy + \frac{\partial \phi}{\partial y} dx \right) = \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma$$

запишем:

$$\left[\int_{\Gamma_e} \eta_e^2 [N_e]^T \frac{\partial [N_e]^T}{\partial n} d\Gamma \right] \{\phi_e\} - \iint_e \eta_e^2 \left\{ \frac{\partial [N_e]}{\partial x} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial x} + \frac{\partial [N_e]}{\partial y} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial y} \right\} dx dy \{\phi_e\} + \\ + \iint_e (k_0^2 \xi_e^2 - \eta_e^2 \beta^2) [N_e] [N_e]^T dx dy \{\phi_e\} = \{0\},$$

где $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали и $\int_{\Gamma_e} d\Gamma$ — криволинейный интеграл по границе Γ_e . Суммирование по всем элементам дает:

$$\sum_e \left[\int_{\Gamma_e} \eta_e^2 [N_e]^T \frac{\partial [N_e]^T}{\partial n} d\Gamma \right] \{\phi_e\} - \sum_e \iint_e \eta_e^2 \left\{ \frac{\partial [N_e]}{\partial x} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial x} + \frac{\partial [N_e]}{\partial y} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial y} \right\} dx dy \{\phi_e\} + \\ + \sum_e \iint_e (k_0^2 \xi_e^2 - \eta_e^2 \beta^2) [N_e] [N_e]^T dx dy \{\phi_e\} = \{0\}. \quad (4)$$

Предположим, что левая часть (4) умножена на волновую функцию $\{\phi_e\}^T$:

$$\sum_e \left[\int_{\Gamma_e} \eta_e^2 [N_e]^T \frac{\partial [N_e]^T}{\partial n} d\Gamma \right] \{\phi_e\} \rightarrow \sum_e \left[\int_{\Gamma_e} \eta_e^2 \underbrace{\{\phi_e\}^T [N_e]}_{\text{Волновая функция}} \underbrace{\frac{\partial [N_e]^T \{\phi_e\}}{\partial n}}_{\text{Производная волновой функции}} d\Gamma \right].$$

Таким образом, первое слагаемое (4) может быть записано в виде:

$$\sum_e \left[\int_{\Gamma_e} \eta_e^2 \phi_e \frac{\partial \phi_e}{\partial n} d\Gamma \right] = \sum_e \left(\int_{\Gamma_{e+1}} \eta_{e+1}^2 \phi_{e+1} \frac{\partial \phi_{e+1}}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} \eta_e^2 \phi_e \frac{\partial \phi_e}{\partial n} d\Gamma \right).$$

Это выражение записано в предположении, что волновая функция ϕ_e и ее нормальная производная $\eta_e^2 \partial \phi_e / \partial n$, умноженная на константу η_e^2 , непрерывны на границах соседних элементов. При этом криволинейные интегралы по границам элементов внутри области анализа сокращаются, поскольку направления обхода границы при вычислении криволинейных интегралов противоположны для каждой пары соседних элементов. В результате остается только криволинейный интеграл по границе всей области анализа. Хотя такое предположение является одним из ограничений скалярного метода конечных элементов, оно является относительно хорошей аппроксимацией [14]. Таким образом, первое слагаемое (4) может быть записано как:

$$\oint_{\Gamma} \eta^2 \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), приведем второе к виду:

$$([K] - \beta^2[M])\{\phi\} + \oint_{\Gamma} \eta^2 \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = \{0\}, \quad (6)$$

где

$$[K] = \sum_e \left\{ -\eta_e^2 \iint_e \left(\frac{\partial [N_e]}{\partial x} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial x} + \frac{\partial [N_e]}{\partial y} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial y} \right) dx dy + k_0^2 \xi_e^2 \iint_e [N_e][N_e]^T dx dy \right\}, \quad (7)$$

$$[M] = \sum_e \eta_e^2 \iint_e [N_e][N_e]^T dx dy, \quad (8)$$

$$\{\phi\} = \sum_e \{\phi_e\}.$$

При наложении граничного условия Дирихле, обсуждаемого подробнее ниже, можно пренебречь вторым слагаемым левой части (6). В этом случае оно может быть упрощено до задачи на собственные значения в матричной форме:

$$([K] - \beta^2[M])\{\phi\} = \{0\}, \quad (9)$$

в которой квадрат постоянной распространения β является собственным значением, а $\{\phi\}$ — собственным вектором.

Используя замену переменных

$$\bar{x} = xk_0, \quad \bar{y} = yk_0,$$

для уменьшения ошибок округления в вычислениях, запишем (9) как:

$$([\bar{K}] - n_{eff}^2[\bar{M}])\{\phi\} = \{0\},$$

где

$$[\bar{K}] = \sum_e \left\{ -\eta_e^2 \iint_e \left(\frac{\partial [N_e]}{\partial \bar{x}} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial [N_e]}{\partial \bar{y}} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial \bar{y}} \right) d\bar{x}d\bar{y} + k_0^2 \xi_e^2 \iint_e [N_e][N_e]^T d\bar{x}d\bar{y} \right\},$$

$$[\bar{M}] = \sum_e \eta_e^2 \iint_e [N_e][N_e]^T d\bar{x}d\bar{y},$$

$$n_{eff} = \frac{\beta}{k_0}.$$

Поскольку диэлектрическая проницаемость ε_{re} предполагается постоянной в пределах элемента, η_e^2 и ξ_e^2 для него также будут постоянны, и для вычисления

компонент матриц $[K]$ и $[M]$ необходимо вычислить следующие слагаемые в (7), (8):

$$\begin{aligned} [A_e] &= \iint_e \frac{\partial[N_e]}{\partial x} \frac{\partial[N_e]^T}{\partial x} dx dy, \\ [B_e] &= \iint_e \frac{\partial[N_e]}{\partial y} \frac{\partial[N_e]^T}{\partial y} dx dy, \\ [C_e] &= \iint_e [N_e][N_e]^T dx dy. \end{aligned}$$

Производные координат площади по координатам x и y равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial x} &= \frac{Q_1}{2S_e}, & \frac{\partial L_2}{\partial x} &= \frac{Q_2}{2S_e}, & \frac{\partial L_3}{\partial x} &= \frac{Q_3}{2S_e}, \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} &= \frac{R_1}{2S_e}, & \frac{\partial L_2}{\partial y} &= \frac{R_2}{2S_e}, & \frac{\partial L_3}{\partial y} &= \frac{R_3}{2S_e}. \end{aligned}$$

Для координат площади используем следующую формулу интегрирования [14]:

$$\iint_e L_1^i L_2^j L_3^k dx dy = \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} 2S_e, \quad (i, j, k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (10)$$

Покомпонентное представление матрицы $[A_e]$ следующее:

$$[A_e] = \iint_e \frac{\partial[N_e]}{\partial x} \frac{\partial[N_e]^T}{\partial x} dx dy = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

подынтегральное выражение при этом можно представить как:

$$\frac{\partial[N_e]}{\partial x} \frac{\partial[N_e]^T}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \left(\frac{\partial N_2}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} & \left(\frac{\partial N_3}{\partial x}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу интегрирования (10), получим следующие выражения для элементов матрицы:

$$a_{11} = \iint_e \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \right)^2 dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} \right)^2 dx dy = \left(\frac{Q_1}{2S_e} \right)^2 \iint_e dx dy = \frac{Q_1^2}{4S_e}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= \iint_e \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \right) dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} \right) dx dy = \\ &= \left(\frac{Q_1}{2S_e} \right) \left(\frac{Q_2}{2S_e} \right) \iint_e dx dy = \frac{Q_1 Q_2}{4S_e} = a_{21}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= \iint_e \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \right) dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial L_3}{\partial x} \right) dx dy = \\ &= \left(\frac{Q_1}{2S_e} \right) \left(\frac{Q_3}{2S_e} \right) \iint_e dx dy = \frac{Q_1 Q_3}{4S_e} = a_{31} \end{aligned} \quad (14)$$

$$a_{22} = \iint_e \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \right)^2 dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} \right)^2 dx dy = \left(\frac{Q_2}{2S_e} \right)^2 \iint_e dx dy = \frac{Q_2^2}{4S_e}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{23} &= \iint_e \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \right) dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial L_3}{\partial x} \right) dx dy = \\ &= \left(\frac{Q_2}{2S_e} \right) \left(\frac{Q_3}{2S_e} \right) \iint_e dx dy = \frac{Q_2 Q_3}{4S_e} = a_{32}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$a_{33} = \iint_e \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \right)^2 dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_3}{\partial x} \right)^2 dx dy = \left(\frac{Q_3}{2S_e} \right)^2 \iint_e dx dy = \frac{Q_3^2}{4S_e}. \quad (17)$$

Покомпонентное представление матрицы $[B_e]$ следующее:

$$[B_e] = \iint_e \frac{\partial [N_e]}{\partial y} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial y} dx dy = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

подынтегральное выражение при этом можно представить как:

$$\frac{\partial[N_e]}{\partial y} \frac{\partial[N_e]^T}{\partial y} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial N_1}{\partial y}\right)^2 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \left(\frac{\partial N_2}{\partial y}\right)^2 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} & \left(\frac{\partial N_3}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая уравнение (11) с уравнением (18), можно заметить, что разница между ними состоит только в переменной, по которой проводится дифференцирование. Таким образом, компоненты матрицы в уравнении (18) определяются заменой Q_i на R_i в уравнениях (12)–(17):

$$b_{11} = \iint_e \left(\frac{\partial N_1}{\partial y}\right)^2 dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)^2 dx dy = \frac{R_1^2}{4S_e},$$

$$b_{12} = \iint_e \left(\frac{\partial N_1}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial N_2}{\partial y}\right) dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_1}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial L_2}{\partial y}\right) dx dy = \frac{R_1 R_2}{4S_e} = b_{21},$$

$$b_{13} = \iint_e \left(\frac{\partial N_1}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial N_3}{\partial y}\right) dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_1}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial L_3}{\partial y}\right) dx dy = \frac{R_1 R_3}{4S_e} = b_{31},$$

$$b_{22} = \iint_e \left(\frac{\partial N_2}{\partial y}\right)^2 dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_2}{\partial y}\right)^2 dx dy = \frac{R_2^2}{4S_e},$$

$$b_{23} = \iint_e \left(\frac{\partial N_2}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial N_3}{\partial y}\right) dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_2}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial L_3}{\partial y}\right) dx dy = \frac{R_2 R_3}{4S_e} = b_{32},$$

$$b_{33} = \iint_e \left(\frac{\partial N_3}{\partial y}\right)^2 dx dy = \iint_e \left(\frac{\partial L_3}{\partial y}\right)^2 dx dy = \frac{R_3^2}{4S_e}.$$

Покомпонентное представление матрицы $[C_e]$ следующее:

$$[C_e] = \iint_e [N_e][N_e]^T dx dy = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

подынтегральное выражение при этом можно представить как:

$$[N_e][N_e]^T = \begin{pmatrix} N_1^2 & N_1N_2 & N_1N_3 \\ N_2N_1 & N_2^2 & N_2N_3 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3^2 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу интегрирования (10), получим следующие выражения для элементов матрицы:

$$c_{11} = \iint_e N_1^2 dx dy = \iint_e L_1^2 dx dy = \frac{S_e}{6},$$

$$c_{12} = \iint_e N_1N_2 dx dy = \iint_e L_1L_2 dx dy = \frac{S_e}{12} = c_{21},$$

$$c_{13} = \iint_e N_1N_3 dx dy = \iint_e L_1L_3 dx dy = \frac{S_e}{12} = c_{31},$$

$$c_{22} = \iint_e N_2^2 dx dy = \iint_e L_2^2 dx dy = \frac{S_e}{6},$$

$$c_{23} = \iint_e N_2N_3 dx dy = \iint_e L_2L_3 dx dy = \frac{S_e}{12} = c_{32},$$

$$c_{33} = \iint_e N_3^2 dx dy = \iint_e L_3^2 dx dy = \frac{S_e}{6}.$$

Таким образом, получены матрицы $[A_e]$, $[B_e]$ и $[C_e]$ для треугольного элемента e первого порядка. Глобальные матрицы $[K]$ и $[M]$ могут быть определены подстановкой матриц $[A_e]$, $[B_e]$ и $[C_e]$ в уравнения (7) и (8) и их суммированием:

$$[K] = \sum_e \left\{ -\eta_e^2 ([A_e] + [B_e]) + k_0^2 \xi_e^2 [C_e] \right\},$$

$$[M] = \sum_e \eta_e^2 [C_e].$$

Граничное условие Дирихле

Условие Дирихле требует, чтобы волновая функция на границе области анализа ИОВ была равна нулю:

$$\phi_i = 0. \quad (19)$$

Таким образом, упрощая уравнение (6), получаем задачу на собственные значения в матричной форме (9). Поскольку уравнение (19) должно выполняться для i -й компоненты ϕ_i собственного вектора $\{\phi\}$, некоторые компоненты матриц $[K]$ и $[M]$, отличные от диагональных, должны быть равны нулю:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} K_{11} & & & 0 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & K_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & \ddots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & & & K_{MM} \end{array} \right) - \beta^2 \left(\begin{array}{ccccccc} M_{11} & & & 0 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & M_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & \ddots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & & & M_{MM} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_M \end{pmatrix} = \{0\} \quad (20)$$

Поскольку компоненты i -х строк матриц в уравнении (20) удовлетворяют уравнению

$$(K_{ii} - \beta^2 M_{ii})\phi_i = 0,$$

уравнение (19) выполняется.

Результаты расчета

Полученные в результате решения уравнения (1) дисперсионные характеристики и профили поля мод приведены на рис. 5–8.

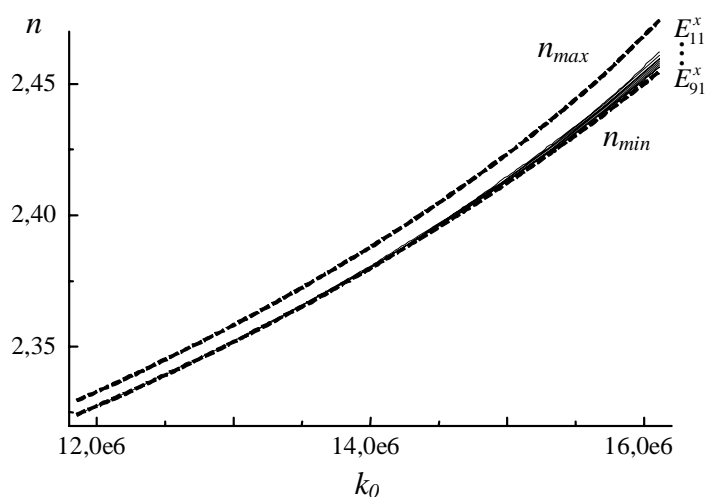


Рис. 5. Дисперсия мод E_{pq}^x для обыкновенной волны

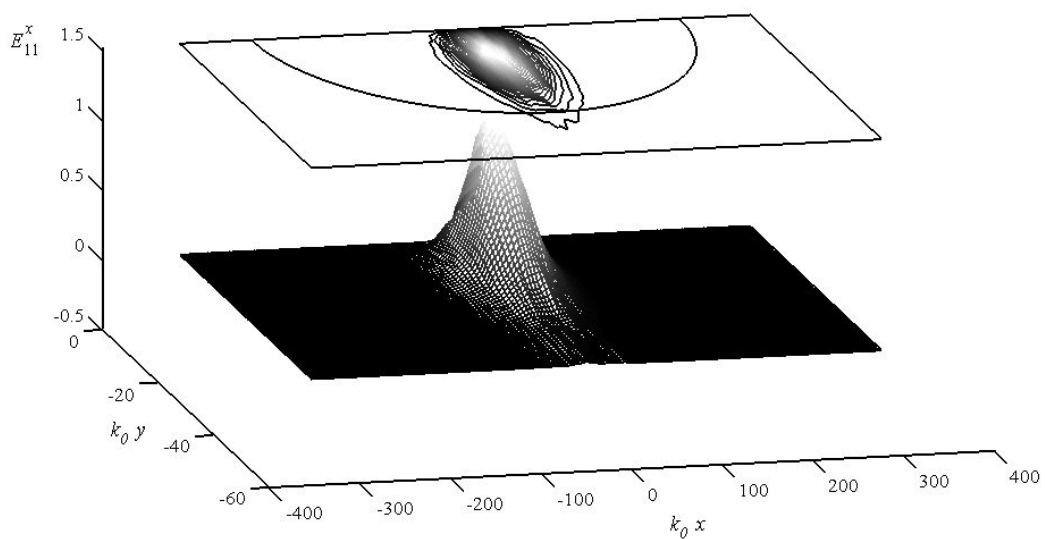


Рис. 6. Профиль поля моды E_{11}^x в поперечном сечении ИОВ

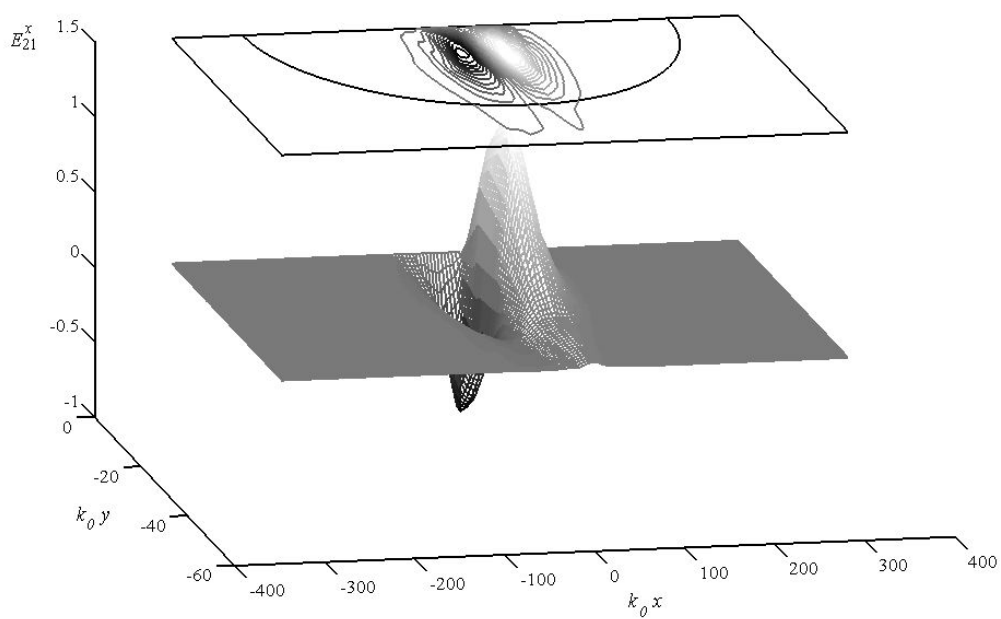


Рис. 7. Профиль поля моды E_{21}^x в поперечном сечении ИОВ

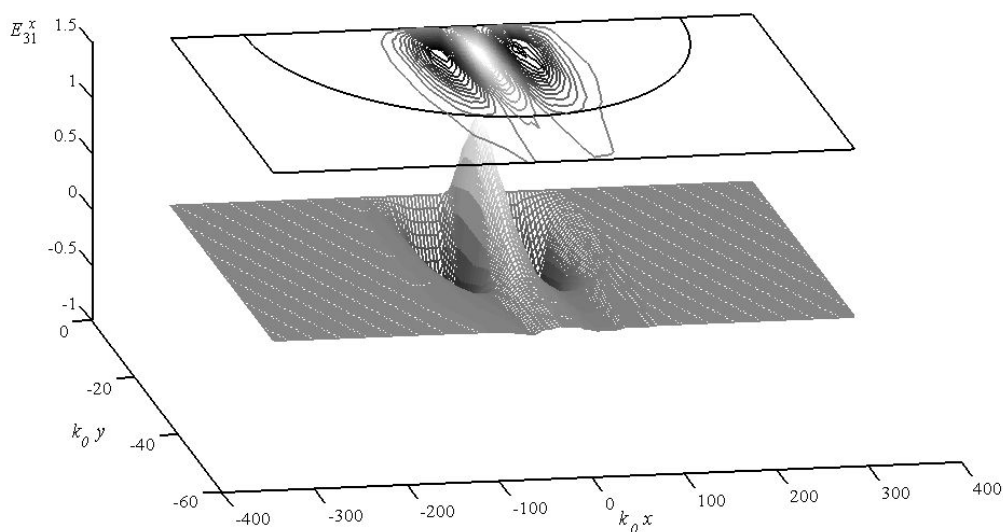


Рис. 8. Профиль поля моды E_{31}^x в поперечном сечении ИОВ

Выводы

Представлена схема метода конечных элементов Галеркина для расчета направленных мод анизотропного канального волновода. Для модели поля на границах области расчета использовалось граничное условие Дирихле.

Выполнено моделирование термодиффузионного интегрального Ti:LiNbO_3 оптического волновода. Получены профили поля мод, а также дисперсионные характеристики ИОВ.

К недостаткам метода можно отнести существенную зависимость успешного расчета от выбора способа разбиения области на конечные элементы, причем в случае задания равномерной сетки с тем же количеством узлов наблюдалось отсутствие сходимости.

Перспективно использование «прозрачных» граничных условий (transparent boundary conditions), что позволит расширить область применения метода на случай расчета затухающих мод ИОВ.

1. *Yaguang Tian, Jianmin Cui, Wei Liu, et al.* Novel Fully Dynamic and Reconfigurable Optical Add/Drop Multiplexer Based on AOTF with Low Crosstalk // Proc. SPIE. — 2004. — Vol. 5281. — P. 186–197.

2. *Lifeng Xiao, Ying Liu, Meng Tian, et al.* Research and Development on Integrated Optical AOTF // Proc. SPIE. — 2005. — Vol. 5644. — P. 452–458.

3. *Липинский А.Ю., Рудякова А.Н., Данилов В.В.* Интегральные акустооптические перестраиваемые фильтры для оптоволоконных линий передачи со спектральным уплотнением // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2005. — Т. 7, № 2. — С. 45–54.

4. *Chuanjing Wen, Jisheng Yang, Limin Zhang, et al.* Study on a Novel Quasi-Collinear AOTF // Proc. SPIE. — 2005. — Vol. 5623. — P. 243–247.
5. *Hang-you Lin, Ji-ping Ning, and Fan Geng.* Influence of SiO₂/In₂O₃ Film Acoustical Waveguide on the Mode Index of Ti:LiNbO₃ Optical Waveguide in Acousto-Optical Mode Converter // Proc. SPIE. — 2004. — Vol. 5279. — P. 505–508.
6. *Гончаренко А.М., Карпенко В.А.* Основы теории оптических волноводов. — Едиториал УРСС, 2004. — 240 с.
7. *Ishigure T. et al.* Accurate Refractive Index Profiling in a Graded-Index Plastic Optical Fiber Exceeding Gigabit Transmission Rates // J. Lightwave Technol. — 2002. — Vol. 20, N 8. — P. 1449–1456.
8. *Thompson C. and Weiss B.L.* Modal Characteristics of Graded Multilayer Optical Waveguides // J. Lightwave Technol. — 1996. — Vol. 14, N 5. — P. 894–900.
9. *Micheli M.* Nonlinear Effects in TIPE-LiNbO₃ Waveguides for Optical Communications // J. Opt. Commun. — 1983. — Vol. 4. — P. 25–31.
10. *Sande J.C.G., Leo G., and Assanto G.* Phase-Matching Engineering in Birefringent AlGaAs Waveguides for Difference Frequency Generation // J. Lightwave Technol. — 2002. — Vol. 20, N 4. — P. 651–660.
11. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979.—392 с.
12. *Strake E., Bava G.P., and Montrosset I.* Guided Modes of Ti:LiNbO₃ Channel Waveguides. a Novel Quasi-Analytical Technique in Comparison with the Scalar Finite-Element Method Channel // J. Lightwave Technology. — 1988. — Vol. 6. — P. 1126–1135.
13. *P. Su, R. Drysdale.* A Comparison of Sequential Delaunay Triangulation Algorithms // Proceedings of the Eleventh Annual Symp. on Computational Geometry. — 1995, June. — P. 61–70.
14. *Kawano K., Kitoh T.* Introduction to Optical Waveguide Analysis: Solving Maxwell's Equations and the Schrodinger Equation. — New York: John Wiley & Sons, 2001. — 273 p.

Поступила в редакцию 27.09.2005